紀伊國屋数学叢書

27

西島　和彦

場の理論

紀伊國屋書店

まえがき

量子力学において強調されることの一つは，粒子性と波動性という二重性である．一つのものがある場合には粒子として扱われ，他の場合には波動として扱われるということは古典物理学では考えられなかったことであり，量子力学の出発点の一つとなったことである．その典型的な例が光であり，Newton の粒子説があったにせよ古典物理学では波動説が優勢であった．しかし，今世紀初頭に Einstein の光量子仮説が提唱されるや，もはや光は波動であるとも粒子であるとも言い切れなくなった．かくして量子力学が出現することになるが，古典論では徹底して粒子として扱われた電子は，量子力学では逆に終始波動として扱われる．そこで同一の理論内で粒子と波動の二重性を採り入れるにはどうしたら良いかという問題が生ずる．この疑問に応えるものが場の量子論である．

場の量子論は，量子力学誕生後間もなく展開されたが，現在までの約半世紀間に多くの変革を経験してきた．初期においては専ら電磁力学の領域に限られ，多くの成功をみたが，いわゆる発散の困難に遭遇して行き詰った．しかしながら戦後くりこみ理論が出現すると，摂動論に基づいた量子電磁力学は代表的な精密科学として完成される．他方，パイ中間子が加速器によって創り出されるようになると，再び場の理論の受難時代が始まる．強い相互作用に対して摂動論が使えないという認識，およびくりこみ理論を摂動論を越えるような近似法に拡張することの難しさなどが原因である．その結果として暫くは場の理論が停滞し，それに替って分散公式に基づいたS行列理論が登場する．また何百という“素”粒子が加速器により創り出されると，一体基本粒子とは何かという疑問が生ずる．そこでクォーク模型が登場し，また弱い相互作用の研究からゲージ場の理論が導入される．本書で取扱うのは上述の展開と関係した場の量子論の概説である．

ゲージ理論の登場後，極めて多くの新しい方向への発展があった．例えば，

古典的ゲージ場の位相的性質と関連したモノポール，ソリトン，インスタントン，あるいはローレンツ不変性よりもゲージ不変性を重視した格子ゲージ理論，統一場理論の宇宙論への応用，更に最近は超対称性や超重力の理論，超紘の理論等々である．これらの理論は現在発展中であり，それぞれが単行本を必要とするような膨大な内容を持ち，かつ私自身まだ良く理解していないので，これらの題目については後日もっと適当な方に書いていただくことにして本書では割愛させていただいた．

私はかつて素粒子論および場の理論の教科書として，W.A. Benjamin 社から Fundamental Particles(1963) および Fields and Particles(1969)を出版したが，いずれも内容が古くなり，また強調すべき題目も時代と共に変わってしまった．しかし基本的に変わらない部分については，本書も上記二書に基づいている．また数学を知らない者が，数学叢書に本を書くということにはためらいがあったが，伊藤清三教授のお勧めに従って数学的論理ならぬ物理学的論理に従った本を書かせていただくことにした．執筆依頼から随分と時間が経ってしまったが，辛棒強く待って下さった伊藤教授に感謝する．

昭和61年初秋　洛北にて

西島　和彦

目　　次

第7章　S行列

第8章　断面積と崩壊幅

第9章　離散対称性

第10章　グリーン関数

序章　素粒子論と場の理論

広い意味での場の理論は，無限自由度の系の量子力学として定義することができる．この広い定義には非相対論的多体問題を扱う物性論までも含まれる．しかし本書では狭い意味での場の理論，すなわち相対論的量子力学の定式化について議論することにする．このような狭義の場の理論の対象となるものは，いわゆる素粒子であり，素粒子の性質を調べる学問は素粒子論と呼ばれる．すなわち場の理論は，ある意味で素粒子の性質を記述するための文法体系を提供するものであるということができるし，また両者は一体となって発展してきたので，はっきりと分離することはできない．素粒子論で問題となるのは，どのような素粒子が存在し，その間にはどのような相互作用が働いているかということである．しかしこの問題設定には，現象論的段階ともっと本質的な段階とが存在する．例えば分割不可能と考えられていた原子が実は原子核と電子からなることが分かり，また原子核自身が陽子と中性子とからなることが分かるなど，何が最も基本的粒子であるかという問題の解答は時代と共に変わってきている．それに対応して何が最も基本的な相互作用かという問題の解答も変わってきている．このような見解の変化がどこまで続くのかは分からない．しかしながら現在の段階で知られていることは，クォークとかレプトンと呼ばれる粒子は，さし当たり最も基本的粒子と考えても良いであろうということと，最も基本的な相互作用はゲージ相互作用であろうということである．いかにしてクォークとかゲージ相互作用といった概念が発見されたかについては後に述べるとして，ここではそれ以前の現象論的段階における素粒子論の発展についての概観を述べることにする．

場とは，空間の各点で定義される力学変数の総称であり，巨視的物理学では温度とか流体の密度・流れの速度とかもその中に含まれる．しかしながら微視的物理学にまで生き残るものは，古典物理学の範囲内では少なく，たぶん電磁場ぐらいのものであろう．量子力学成立後問題となったことは，いかにして量

子力学を電磁場に適用したら良いかということであった．まえがきで述べたように，光は古典的には電磁波で表現される波動であるが，Einstein の光量子仮説に代表されるように微視的世界では粒子性をも示す．そこで電磁場に対して量子力学を適用して粒子性を導き出すということは基本的に重要な問題である．この方面の研究はまず Dirac(1927)によって進められた．また非相対論的な Schrödinger 方程式を相対論的方程式に書き直すということも Dirac(1928)によってなされた．ここに量子電磁力学の基礎付けが与えられたことになる．Heisenberg と Pauli (1928) は量子電磁力学を系統的に定式化し，場の理論の出発点を与えた．

Dirac による電子の相対論的理論は，電子の反粒子である陽電子の存在を予言し，実際に 1932 年に Anderson によりその存在が実証された．同様に陽子の反粒子たる反陽子の存在も予期されたが，その実証は 1955 年まで待たなければならなかった．他方原子核物理学にとっても 1932 年の Chadwick による中性子の発見は基本的重要性を持ち，原子核が陽子と中性子とからなるという描像が確立された．しかしながら，いわゆる素粒子論の誕生は湯川の中間子論に端を発したということが出来るであろう．

§1　相互作用の分類と湯川理論

現在研究が進行中の大統一場理論や超重力の理論などは，多くの異なる強さの相互作用が存在するという認識から出発している．その中でも最も古くから知られているのは，重力を除いては電磁的相互作用であり，既に述べたように量子力学の誕生以来研究の対象となってきた．しかしながら電磁的相互作用のみでは説明のつかない現象が多く知られていた．例えばベーター崩壊がその例である．放射性原子核の寿命は電磁的に励起された状態の寿命よりも長く，このことはベーター崩壊に関与する相互作用は電磁的なものよりもずっと弱いことを示している．実際，ベーター崩壊の際に放出される電子のエネルギーの連続スペクトルを説明するために，Pauli はニュートリノ仮説を導入した．このような新しい種類の粒子の導入に対して Pauli は大変良い言い訳を持っていた．すなわち，多くの保存則，すなわちエネルギー，運動量および角運動量の保存則を救うためという大義名分を持っていたのである．

Pauli の提案をもっと具体化したのは Fermi であり，ベーター崩壊という現象を，四体 Fermi 型相互作用を導入することにより場の理論に組み込んだのである．これが電磁的相互作用の次に場の理論に現れた相互作用である．かくして，電磁的および弱い相互作用が場の理論に導入されたことになる．

1932 年の中性子の発見後，原子核は陽子と中性子から成立していることが分かってきた．そこで問題となったことは，陽子と中性子とを結びつけて原子核を形成するのに関与しているいわゆる核力とは何かということである．中性子は電気的に中性であるから，核力は電磁気的な力とは考えられない．そこで Fermi 理論が提出された直後に，Ivanenko と Tamm は核力とは，陽子と中性子とが，Fermi 型相互作用を媒介として電子・ニュートリノ対をお互いに交換することによって生じるのではないかと考えて核力を計算した．しかしながら，結果として得られた力は弱すぎてとても核力の成因とは考えられないことが判明した．

その結果，核力は電磁的および弱い相互作用とは全く異なる種類の力であることになる．またいろいろな粒子は，それぞれ役割が決まっていて，定まった型の相互作用にしか関与しないことが分かった．これは表 1 に示される．

表 1 素粒子と関与する相互作用

素粒子	関与する相互作用
ν	弱
e	弱＋電磁的
n, p	弱＋電磁的＋強
γ	電磁的（担い手）

ただし，素粒子の記号は，ν（ニュートリノ），e（電子），n（中性子），p（陽子），γ（光子）であり，弱は Fermi 型の弱い相互作用，電磁的は電磁的相互作用，強は核力のような強い相互作用を表わす．また陽子と中性子とは原子核の構成要素という意味で核子と総称される．

1935 年に湯川は，**すべての力は場によって媒介される**という原理に基づいて中間子論を提唱した．電磁的相互作用は電磁場によって媒介されるから，強い相互作用も弱い相互作用も場によって媒介されなければならない．そこで湯川

は強い相互作用を媒介するものとして中間子場を導入した．電磁場を量子化すると光量子(光子)が生ずるように，すべての場は量子化するとその場の粒子的側面に対応する量子が現れることになる．そして中間子場の量子が中間子と呼ばれる素粒子なのである．湯川の重要な寄与の一つは，場の量子の質量と力の到達距離との関係を明らかにしたことである．一般に，ある場を媒介として生ずる力の到達距離は，その場の量子のコンプトン波長によって与えられる．例えば，質量0の光子によって媒介される電磁的相互作用の到達距離は無限大である．従って 10^{-13}cm の程度の核力を媒介する中間子場の量子，すなわち中間子の質量は電子質量の200倍程度でなければならない．これはちょうど，核子と電子との中間の質量となるので中間子という名称が生まれたのである．また現象論的に一点における Fermi 型相互作用によって表現される弱い相互作用を媒介する場の量子は非常に重くなくてはいけない．湯川は，強い核力も弱い相互作用も共に中間子場によって媒介されると考えた．その後 Klein は後者に対しては異なる場を導入すべきことを示唆した．いずれにしてもこのような考え方は，当時にあっては仮説の域を出なかった．そしてこの仮説を証明するためには中間子を創ることが必要であった．しかしながら十分高いエネルギーの加速器の存在しなかった当時としては，中間子は宇宙線中で見つけなければならなかった．歴史的には，湯川粒子の発見は紆余曲折を経ることとなった．

§2 第二世代の最初のメンバーとしてのミューオン

理論家はまだ実験的に発見されていない粒子の存在を予言し，実験家は理論家が予言していない粒子を発見する．湯川粒子とミューオンとの関係はこのように表現することができる．現代的な用語を用いれば，我々を取り巻く世界は第一世代の素粒子から成り立っている．第二世代に属する素粒子はニュートリノを除いては一般に不安定だからである．従って第二世代の素粒子の発見は常に混乱を惹起してきた．第二世代に属する素粒子とは，ミューオンであり，また奇妙な粒子やチャームなどである．これらの仲間で最初に発見されたのがミューオンである．

1937年に宇宙線中で質量が約100 MeV の粒子，すなわちミューオンが発見された．次の約10年間，この粒子は湯川粒子であると思われていた．

1945年に，Conversi，Pancini，および Piccioni は，ミューオンの原子核との相互作用はミューオンの弱い崩壊相互作用と同程度の強さであることを見出した．この発見のもたらしたものは，ミューオンと湯川粒子，すなわちパイオンとは異なる粒子であるという結論であった．次の年に Powell のグループは，写真乾板中で次のような二段崩壊過程を観測した．

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu, \qquad \mu^+ \to e^+ + \nu + \nu.$$

ここに π はパイオン，μ はミューオン，ν はニュートリノを表わす．厳密には多種類のニュートリノが存在するが，ここでは区別していない．

パイオンとミューオンという二種類の中性子の存在を認める二中間子論は，1946年に坂田，井上，谷川等によって展開され，アメリカにおいても，翌年 Marshak と Bethe によって展開された．

§3　量子電磁力学

第二次世界大戦後，量子電磁力学は目覚ましい進歩を遂げた．量子電磁力学，あるいは QED (Quantum Electrodynamics) は最も典型的な場の理論であり，**くりこみ**という新しい武器を導入することで，水素原子中での Lamb のずれ，すなわち $2s$ と $2p$ 状態間のエネルギーのずれ，および電子の異常磁気能率の計算を可能としたのである．この成功に力を貸したのは，朝永，Schwinger，Feynman，Dyson 等による共変的摂動論の定式化であり，QED はもっとも成功した精密科学の分野という位置を獲得した．また理論のくりこみ可能性という概念は，場の理論における重要な指導原理としてその後の場の理論の発展，特にゲージ理論の発見と結び付いている．

§4　パイオンからハドロンへの道

1948年に Berkeley においてパイオンが初めて人工的に創られた．更に 1952年に Fermi のグループによりパイオンと核子系における Δ という共鳴状態が発見された．この共鳴状態は次の反応に現れる：

$$\pi + \mathrm{N} \to \Delta \to \mathrm{N} + \pi$$

ただしNは核子を表わしている．この共鳴状態の存在は，低いエネルギーにおけるパイオン・核子系の強い相互作用を特徴付けるものである．

その後，QED において非常に有効であった共変的摂動論は，強い相互作用に対してはほとんど無力であることが分かってきた．それに伴って理論家は，強い相互作用に対する場の理論に疑いを持つようになってきた．事実，パイオンのスピンとかパリティの決定は，一般的な不変性の原理に基づいてなされ，共変的摂動論は全くこの目的には役に立たなかったのである．勿論，場の理論における非摂動論的方法も研究されたが，くりこみの処法が摂動論と強く結び付いていたために成功しなかった．この教訓によって，パイオン・核子系の強い相互作用の詳細によらないような一般的原理のみに基づいてこの系の性質を調べるという傾向が拡がった．その一例はアイソ・スピンである．アイソ・スピンという概念は，核力の荷電独立性と湯川理論とを結び付けるために 1938 年に Kemmer によって導入されたものである．この概念は仮想的な荷電空間における対称性であって，パイオンが人工的に創り出されるようになると再び活発な研究対象となった．そして現代用語のフレイバーの最初の二例を与えることとなった．もう一つの例は場の理論における因果律と深く結び付いた分散関係である．これは，与えられた散乱振幅，あるいは形状因子の吸収部分（虚数部）と分散部分（実数部）との関係を与える式で，その形は元の相互作用の形の詳細によらない．分散関係で重要なことは，関与する種々の粒子が，時空的あるいは内部対称性に関係した変換に対してどのような表現に従って変換されるかということと，考えている力学系がどのような質量スペクトルを持っているかということのみである．しかしながら，それでも分散関係式には，元の相互作用の痕跡をわずかに留めている．例えば最も有名なパイオン・核子系に対する前方散乱振幅の満足する分散関係式は，あるローレンツ不変な変数に関して一次の極となる項を含んでいるが，その留数は湯川相互作用のくりこまれた結合定数で表わされている．また電磁的形状因子に対する分散関係式は，いわゆる引算定数が関与する粒子の電荷で与えられる．いずれの場合にもこれらの定数は，場の理論におけるくりこまれた結合定数である．

分散式の方法から我々は多くのことを学びとることができる．まず場の理論における摂動計算と比較することにより，分散式の方法ではくりこみがどのよ

うな形式で実行されているかを知ることができる．与えられたＳ行列要素（例えば散乱振幅）を摂動論のある次数で考えると，その吸収部分はＳ行列のユニタリー性によってそれより低い次数のＳ行列要素によって表現することができる．この評価には有限な位相空間における積分を実行することになるが，ここでは発散は出てこない．次にＳ行列要素の分散部分をその吸収部分から分散式によって評価してみよう．これはヒルベルト変換と呼ばれる積分変換を実行することに相当するが，この積分は発散することがある．この発散はちょうど場の理論の発散に対応している．もし発散が生ずるならば，引算をした分散式を用いることによりそれを除くことができる．この引算が場の理論におけるくりこみに対応し，引算定数がくりこまれた結合定数に相当する．従って分散理論では発散は分散部分のみに現れて，吸収部分に現れることはない．更に，上の引算という処法の妥当性は，摂動論に限定されないのである．

そこで考えられることは，素粒子の動力学をＳ行列を使って定式化できないかということである．すなわち，上に述べたようにＳ行列のユニタリー性と分散式とを組み合わせることによってＳ行列を決めることはできないかという問題である．この際，くりこみは引算された分散式を導入することにより自動的に処理され，従って摂動論によらないくりこみ理論が実現されているはずである．またこの理論では，散乱振幅に極を与える安定粒子は，素粒子であっても複合粒子であっても同じ形の分散式を与えることになる．換言すれば，Ｓ行列理論で大切なのは粒子の安定性のみであって，その粒子が素粒子であるか複合粒子であるかということは全く問題にならない．この事実は，素粒子論のその後の発展に対して重要な意義を持つことになる．1956年に提唱された Chew-Low 理論は，非相対論的なＳ行列理論の典型的な一例である．そしてこのような考え方は，1958年の Mandelstam 表示の発見により更に進展した．この表示における散乱振幅は，二重分散積分という形に書かれ，クロッシングに対する対称性を持つ，この対称性については後に説明するが，ここでは触れない．

しかしながら力学的Ｓ行列理論は二つの難点を持っている．まず第一の難点は，分散式の完全系を見出すことが不可能，あるいは極めて難しいことである．

第二の難点は，粒子数の多い状態を無視するという近似に限っても解が一義的に定まらないということである．このことは上に述べた如く，Ｓ行列理論で

は素粒子と複合粒子との区別がつけられないということと関係している．例えば，与えられた分散式の組に対してそれに対応するラグランジアンとして湯川理論のものを採ることもでき，また量子色力学，あるいは QCD (Quantum Chromodynamics) のものを採ることもできる．S行列理論自身は，しかしながら，異なる方向へ進んでいった．クロッシングに対する対称性を持った散乱振幅の高エネルギーでの振舞いの研究から1960年代には Regge 極，あるいは Regge 軌道の理論が生まれた．1950年代に反陽子の発見に続いてベバトロンにより泡箱の助けを借りて多くのハドロンが発見されたが，Regge 軌道はこれらの多くのハドロンの類別に応用された．ハドロンとは，強い相互作用を持つ素粒子の総称である．また Regge 軌道とは，二体の束縛状態を考えた時に，その角運動量 J を連続変数にまで拡張して束縛状態の質量の自乗 M^2 との関係をプロットしてできる軌道を意味する．スピンを除いては同じ量子数を持つ複数のハドロンを同一の Regge 軌道上に乗せることにより，それらの力学的血縁関係を明らかにしてハドロンの分類に役立てようとするものである．特に Chew と Frautschi は，すべての Regge 軌道は普遍的な傾きを持つ直線であるとして多くのハドロンを分類するのに成功した．既に述べたように，Regge 軌道は束縛状態に対応するのであるから，Chew-Frautschi プロットの成功はすべてのハドロンは基本的粒子というよりも複合粒子であるということを意味している．この事実をいかに解釈するかは素粒子論にとって基本的重要性を持つ問題であり，後で詳しく議論する．

§5　第二世代のメンバーとしての奇妙な粒子

素粒子の中でフェルミ統計に従うものは強い相互作用を持つハドロンと強い相互作用を持たないレプトンとに分類される．第二世代に属するミューオンはレプトンであり，その発見とそれに伴う混乱については既に述べたが，第二世代に属するハドロンが発見された時も多くの混乱が生じた．そこで第二世代に属するハドロンを奇妙な粒子と呼ぶようになった．ミューオンの発見に関連して，実験家は理論家が予言していない粒子を発見すると述べたが，奇妙な粒子に関しても同様な事情が生じた．1947年に Rochester と Butler とは二つのV粒子を霧箱中で発見した．V粒子とは霧箱中での荷電粒子の飛跡の形から付

けられた名前で，これはある粒子の崩壊現象に対応している．その後更に二年間観測を続けたが，新しい例は一つも見つからなかった．このような場合には二つの事が起り得る．追試者が何も見つけないか，あるいは観測方法を改善することにより突然多くの事例を見つけるかである．V粒子，あるいは奇妙な粒子の場合には後者が実現されたのである．改善された方法とは高い山の上に登って宇宙線中のV粒子を探すことであった．1950年代の初頭に，Pasadena グループは White Mountain で，そして Manchester グループはピレネー山脈中の Pic du Midi に登って何十というV粒子を観測した．V粒子に関する一番大きな問題は，その大きい頻度と 10^{-10} 秒程度の（素粒子の世界のスケールで）比較的長い寿命とを如何にして調和させるかということであった．この問題はミューオンの問題と類似性を持っていた．今になって考えてみると両者とも第二世代に属していたからである．その後霧箱や写真乾板中に多くの新しい粒子が見つかった．例えば Λ^0, $\Sigma^{\pm}$, Ξ^- のようなハイペロン，すなわちフェルミ統計に従うハドロン，や重い中間子 K (θ あるいは τ とも呼ばれた) 等である．

さて大きい頻度と長い寿命との間に存する矛盾を除くためにV粒子あるいは奇妙な粒子は対発生するという仮説が提唱された．例えば，1951年に南部，山口および著者により，大根田により，あるいは宮沢により，また1952年に Pais によりこのような理論が言い出された．しかしながら，対発生理論は宇宙線の観測ではなかなか実証されなかった．これらの理論に共通なことは，奇妙な粒子は強い相互作用により常に対になって創られ，孤立した奇妙な粒子が崩壊するときには弱い相互作用を通じて起るというものである．それにより大きい生成率と長い寿命が説明できることになる．しかしながらこの仮説のみでは説明のつかない現象がいくつかあった．例えば，$\Xi^- \to \Lambda^0 + \pi^-$ と $\Xi^- \to \mathrm{n} + \pi^-$ という二つの崩壊様式がいずれも強い相互作用を通して生じないのは何故か？　また乾板でも霧箱でも正荷電の重い中間子は負のものよりもずっと多いのは何故か？　これらの疑問は上の仮説の範囲内では答えられないものである．

1953年になって，宇宙線では確かめられなかった奇妙な粒子の対発生が，Brookhaven のコズモトロンという加速器を用いた実験で実証された．そしてその結果，中野と著者により，また独立に Gell-Mann により奇妙さという概念が導入された．この概念はアイソ・スピンと密接な関係にある．一つのアイ

ソ・スピン多重項に属するすべてのメンバーは同一の値の奇妙さを持つことになる．また奇妙さは加法的量子数であり，強い相互作用および電磁的相互作用に対して保存されるが，弱い相互作用に対しては保存されない．後に述べるがパリティも同様な性格を持った量子数である．またK中間子は素粒子論の歴史において極めて重要な役割を果たすことになる．近代物理学の歴史においては，たぶん水素原子の次ぐらいに重要な役割を果たしたと言えるであろう．奇妙さという概念は，中性K中間子 K^0 が，その反粒子 $\bar{K}^0$ と異なるということと密接に関係しており，また弱い相互作用におけるパリティの非保存はK中間子の崩壊様式の多様性と関連して発見されたものであり，CP（Cは荷電共役，Pはパリティ）という変換が弱い相互作用で保存されないことも中性K中間子のある種の崩壊様式の観測によって発見されたものである．このようにK中間子は多くの新しいアイディアを提供し続けたのである．現代用語を使えば，奇妙さはフレイバーの第三の例であり，第二世代のハドロンによって担われている．後に述べるように，アイソ・スピンの対称群 SU(2) に奇妙さを組み合わせることにより SU(3) という対称群が提唱されることになった．

§6　パリティの非保存

奇妙なK中間子はその崩壊様式によって初めは異なる名称を与えられた．

$$\theta \to 2\pi, \qquad \tau \to 3\pi$$

しかしながら θ と τ とが同じ粒子であるかどうかは深刻な問題であった．測定の精度が改善されるにつれて θ と τ との質量も寿命もだんだん一致してきた．また両者の生成比も生成過程とは無関係に一定であることが分かってきた．これは θ と τ とが同種粒子であることを示している．ところが Dalitz や Fabri の解析によると，このことはパリティが崩壊過程においては保存されないことを意味している．そこでこの同定とパリティ保存則との間の矛盾は $\theta\tau$ の謎と呼ばれるようになった．このような事情の下に Lee と Yang は，パリティの非保存はK中間子の崩壊のみでなく弱い相互作用においては一般に生起しているのではないかと考え，種々の実験的験証方法を提案した．Wu による Co^{60} の実験はベーター崩壊におけるパリティの非保存を実証する最初の例となった．

特にニュートリノの関与する崩壊過程ではパリティ保存が最大限に破れていることが分かり，ニュートリノの二成分理論が提唱された．奇妙さの場合と異なり，パリティは時空対称性と関係しているので，パリティ非保存の発見は多くの物理学者にショックを与えた．

パリティ非保存の発見後，それと関連して多くの研究が進んだが，ここでは特に最も重要な発展について述べる．さてすべての力は場によって媒介されると考えた場合に，弱い相互作用を媒介する場の性格を定めるために大切なことは現象論的な Fermi 型相互作用の詳しいタイプを調べなければならない．この方向への重要な第一歩は，1958年に提唱された（V－A）理論である．この理論の意味するものは，弱い相互作用を媒介する場はベクトル場であるということである．そしてこのベクトル場の量子はWボゾンと名付けられた．勿論Wは weak の頭文字である．これと関連して大切なのは1940年代の終頃に発見された Fermi 型相互作用の普遍性に基づいた CVC (Conserved Vector Current) 仮説である．このような考え方は，Marshak と Sudarshan あるいは桜井等により提唱され，Gell-Mann と Feynman により更に進められたものである．実験によれば，いろいろな過程に対する Fermi 型相互作用のベクトル結合に対する結合定数は強い相互作用による補正があるにもかかわらず過程によらず共通である．この事実は，Fermi 型相互作用のハドロン部分を表わしている四元ベクトル密度を四元アイソ・スピン流れ密度に比例すると仮定することにより説明される．この詳しい内容は本文において説明するが，上の仮定を CVC 仮説と呼ぶ．現象論的な Fermi 型相互作用をWボゾンを媒介する二つの湯川型相互作用の積として表わした場合に，それぞれの湯川型相互作用は，保存されるアイソ・スピン流れ密度とW場との積で表わされるということである．電磁的相互作用が保存される電流密度と電磁場の四元ポテンシャルの積であることと比較すると大変に暗示的である．またこの考えは(V－A)のAに相当する軸性ベクトル流を含めて，量子力学では保存量の集りが代数を形成するという事実と関連して，流れの代数（current algebra）という方法に進展した．§4において強い相互作用をその詳細に立ち入らないで議論する方法として分散式と対称性に基づくものを導入したが，流れの代数は後者の延長線上にある．さてアイソ・スピンの3成分は，角運動量の3成分と同じ交換関係を

満たし，これは SU(2) という代数を形成する．これは (V−A) のV部分のみをとり，その時間成分の空間積分，すなわちアイソ・スピンの満たす代数であるが，(V−A) 自身をとっても同じく SU(2) 代数を満たす．(V−A) は後述の左巻きの流れに対応するので，この代数を $SU(2)_L$ と書く．また奇妙さを変える流れを導入するとこの代数は $SU(3)_L$ にまで拡張される．更に (V+A) に基づいた $SU(3)_R$ を導入すると，流れの代数は $SU(3)_L \times SU(3)_R$ にまで拡張される．この代数の最初の成功例は，1965 年に導出された Adler-Weisberger の公式であろう．また 1963年には，Cabibbo が普遍的 Fermi 型相互作用の概念を奇妙さの変わる場合に拡張し，クォーク模型への道を開くのに貢献した．

§7 第二世代のニュートリノ

ニュートリノは 1933年に初めて Pauli によって考えられ，直ちに Fermi によってベーター崩壊の場の理論の定式化に用いられた．このニュートリノは 1956年に Cowan と Reines によってその存在が立証された．これが第一世代のニュートリノである．

弱い相互作用によって惹起される種々の過程に関する研究からレプトン数の保存則およびそれに基づいた禁止則が存在するのではないかと考えられた．ところがレプトン数に関しては二つの異なる定義が与えられた．一つは 1953 年に Konopinski と Mahmoud により与えられたもので，e^-, μ^+, ν をレプトンと見なすものであり，他は 1957 年に Lee と Yang により与えられたもので，e^-, μ^-，そして左巻きの(反)ニュートリノをレプトンと見なすものである．いずれの定義も実験と矛盾しないように思われる．そこで 1957 年に著者は 4 成分のニュートリノを仮定し，いずれの保存則も成り立つと仮定してどういう理論が成り立つかを調べた．上の二種の保存則を適当に組み合わせると電子族とミューオン族との保存則が別々に出てくることが分かった．電子族では e^-, ν_L の数と e^+, $\bar{\nu}_R$ との数の差が保存され，ミューオン族では μ^-, $\bar{\nu}_L$ の数と μ^+, ν_R との数の差が保存されることになる．換言すると，我々は二種類のレプトン数の保存則を持つことになり，一つは第一世代のレプトン数であり，もう一つは第二世代のレプトン数である．ν あるいは $\bar{\nu}$ の添字 L, R はそれぞれ左巻き，右巻きを意味し，いずれも 2 成分のニュートリノである．すなわち二種類の 2 成

分ニュートリノがあり，一つは第一世代の電子族に，もう一つは第二世代のミューオン族に属する．これに似たような考えは Schwinger によっても提唱された．

第二世代のニュートリノの仮説は，1962年にコロンビア大学のグループにより，Brookhaven の AGS という加速器により実証された．

§8 ハドロンの民主主義と貴族主義——クォーク模型

1948年に Fermi と Yang とは，パイオンを核子と反核子との束縛状態と解釈する理論をたてた．彼らはいわゆる素粒子と呼ばれている粒子が多すぎるから，その一部を複合粒子と考えた方が良いというのが動機であった．1955年に，基本粒子の組，すなわち陽子と中性子，に奇妙な Λ 粒子を加えることによって坂田は Fermi-Yang 模型をもっと広い範囲のハドロンに拡張した．すなわち，すべてのハドロンは，陽子，中性子，Λ 粒子およびその反粒子の束縛状態であると考えたのである．池田，小川，大貫は，この三種の基本粒子，p, n, Λ の間に対称性が存在すると考え，SU(3) という対称群を導入し，ハドロンがどのような表現に属するかを研究した．中間子，あるいはボーズ統計に従うハドロン，に関しては，坂田模型は多くの成功をおさめた．1961年に発見された η 中間子は坂田模型の予言の成功例と考えられている．しかしながら，バリオンに関してはあまりうまくゆかなかった．とにかく，これは何百というハドロンを少数の最も基本的な粒子の束縛状態として解釈する試みの一つであった．

1961年に，Gell-Mann と Ne'eman とは独立に SU(3) 対称性という概念を坂田模型から抽出した．坂田模型では，p, n, Λ を SU(3) の3次元表現に割当てたが，彼らは，Σ と Ξ とを合わせて8次元表現を割当てたのである．これを八道説と呼ぶ．中間子に関しては，坂田模型でも八道説でも8次元表現になるので定性的には差が出ない．

SU(3) 対称性は正確ではなく，ある一定のパターンで破れている．それによって一つの既約表現に属する粒子の質量の間に Gell-Mann-大久保の公式と呼ばれる関係式が成立する．この公式のハイライトは，質量公式で 1983 MeV と予言された Ω^- が観測され，その質量が 1972 MeV であったことであろう．

さてここで多数のハドロンをどのように解釈すべきかという§4で提起した

問題に戻ることにする．現象論的見地からは，ハドロンはChew-Frautschiプロットおよび SU(3) 群によって分類される．そしてこの分類法の成功は，すべての観測されたハドロンが複合粒子であることを意味する．そしてこの結果を解釈するには二つの可能性がある．一つの可能性は，既に観測されているハドロンよりも基本的な粒子はないということであり，もう一つの可能性は，もっと基本的な粒子があるが観測にかかっていないということである．これらをそれぞれ，民主主義的ハドロン，貴族主義的ハドロンと呼ぶことにする．前者は1960年頃に Berkeley で，特に Chew のグループにより展開された．近代物理学では，分子→原子→原子核→素粒子 というようにどんどんより基本的なものを求めて進んでゆくという傾向が目立ったが，それにストップをかける考えを提出したのである．この考え方によると，すべてのハドロンが同格に扱われなければならない．すなわち他に比してより基本的なハドロンは存在しないで，各々のハドロンは一番軽いパイオンから最も重い原子核に至るまで，他のハドロンの束縛状態であると考えなければならない．そして各ハドロンの質量，スピン等は自己無撞着法によって定められると考えられた．この考えの中には最も基本的な場という考え方がないので，場の理論による記述には適していない．この意味において，これは純粋なS行列理論である．特に分散式は，関与している粒子が素粒子か複合粒子かによらずに成り立つのでこの目的に適している．しかしながら，完全な力学を数学的に矛盾なく決定するような枠組は遂に与えられなかった．以上の考え方がハドロンの民主主義である．

もう一つの考え方は，観測にかかるハドロンは，もっと基本的な粒子の複合粒子であるとするものである．これはもっとも基本的粒子を貴族とするハドロン世界の貴族主義と言うことができる．1964 年に，Gell-Mann と Zweig は，SU(3) 群に基づいてハドロンのクォーク模型を提唱した．クォークが最も基本的な粒子となる模型であり，これは坂田模型の改良版であると言える．坂田模型における p, n, Λ の代りに，クォーク模型では u, d, s という三種類のフレイバーを持ったクォークを導入する．中間子は，坂田模型におけるのと同様にクォークと反クォークの束縛状態とし，バリオンは三つのクォークの束縛状態であると考える．そしてその可能な表現は次式で与えられる．

$$\text{中間子} : 3\otimes\bar{3} = 1\oplus 8$$
$$\text{バリオン} : 3\otimes 3\otimes 3 = 1\oplus 8\oplus 8\oplus 10$$

この模型の長所は，右辺に現れるすべての表現が自然界に実現されているという点である．更にこの模型は，質量や磁気能率のようなハドロンの静的性質を説明するのに成功した．しかしながら，この模型を実際のハドロンの解釈に用いると，排他律と矛盾しないためには，今までに知られていなかった新しい自由度を導入しなければならないことが Han と南部，あるいは Gell-Mann によって気付かれた．この自由度はカラーと呼ばれてフレイバーと区別される．

ハドロンの民主主義的理論の場合と違って，クォーク模型は容易に場の理論にとり入れられる．クォークとレプトンとは基本的な場により記述され，ハドロンは複合粒子と考えられる．更に流れの代数における左巻き，あるいは右巻きの流れ密度は，クォークを用いると大変簡単な双一次形式で表現される．換言すると，弱い相互作用を湯川型に書いたとき，そのハドロン部分はクォークの双一次形式とW場との積に書けるということになる．これは上述の左巻き，あるいは右巻きの流れ密度をハドロン場で表現するには非常に非線形な表現を必要とすることと比べて大変な利点である．従って，弱い相互作用をくりこむという立場からは，クォーク模型は非常に有望である．

さて，バリオンが三つのクォークから成るということから三種類のクォークの電荷が定まる．u の電荷が $(2/3)e$，そして d と s のが $-(1/3)e$ となる．ただし e は陽子の電荷である．このように分数電荷を持つというのがクォーク模型の特徴であり，実験家は分数電荷を一生懸命に探したが，未だに見つかっていない．そこでどういう理由か分からないが，孤立したクォークは原理的に観測できないという仮説が導入された．これがクォークの閉じ込めの仮説である．もしこの仮説を認めれば Chew のハドロン民主主義の考えは再びある意味で成立することになる．すなわちS行列理論は観測されるハドロンだけを取扱う理論となるからである．分散式はハドロンのみの関与する過程に対するS行列要素に対して与えられ，ユニタリー性の条件もハドロンのみの状態を用いて表現されることになり，クォーク状態は現れないことになるからである．

しかしながらハドロンの力学は，S行列理論の範囲内では決定されない．決

定のためには，クォークと強い相互作用を媒介するグルーオンとの力学が必要である．このような強弱両相互作用に対するクォーク模型の応用は，強い相互作用，電磁的相互作用，弱い相互作用を媒介するゲージ場の理論への道を開いたということができる．ゲージ場の理論については，本書の後半で議論することになるが，この章ではゲージ場の理論に到達するまでの試行錯誤の歴史について簡単に述べた．またこの章では多くの述語を定義なしに用いたが，それらの意味は，本文において順を追って説明される．

第1章　正準形式と量子力学

場の量子論とは，自由度が無限大の系の量子力学であり，有限自由度の系の量子力学の極限として建設されている．そこでまず有限自由度の系の量子力学の一般的特徴を把握し，それに基づいて拡張を試みることにする．

なお本章以下において，人名その他の固有名詞，および日本語訳の定着していない述語は原綴りのままで表現することにする．

§1　Schrödinger 表示と Heisenberg 表示

量子力学における運動方程式は，通常 Schrödinger の方程式，あるいは Heisenberg の方程式によって与えられる．Schrödinger の方程式は，正準共役な変数の組 $q_1, q_2, \cdots, q_f$ および $p_1, p_2, \cdots, p_f$ の関数であるハミルトニアン $H(q_r, p_r)$ が与えられたときに

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t)=H\left(q_r,\ \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q_r}\right)\Psi(t) \tag{1.1}$$

の形に書かれる．$\Psi(t)$ は確率振幅，あるいは状態ベクトルなどと呼ばれる．この方程式は，いわゆる Schrödinger 表示で成り立ち，この表示では物理量を表わす演算子 $\mathcal{O}$ は陽に時間には依らない．任意の物理量 $\mathcal{O}$ の与えられた状態 $\Psi(t)$ における期待値は

$$\langle\mathcal{O}\rangle=\int\Psi^*(t)\mathcal{O}\Psi(t)dq, \qquad dq=\rho dq_1\cdots dq_f \tag{1.2}$$

により与えられる．ただし ρ は適当な密度を表わす．なお本書においては自然単位系 $\hbar=c=1$ を用いる．相対論の見地からは，時間と空間に単一の単位を用いることは自然であり，時間の単位は，光が単位の長さ，例えば 1cm，を走るのに要する時間となる．また量子論で常に出てくる $\hbar=h/2\pi$ は人間的尺度では非常に小さい量であるが，微視的世界の物理量を表わす時には常に現れるので，これを単位に選ぶと便利である．例えば，角運動量は常に $\hbar$ を単位として現れるが，自然単位系では単なる整数，あるいは半整数となる．ただし h は

Planck の定数，c は光速度を表わし，自然単位系ではすべての物理量の単位は，長さの適当な巾として与えられることになる.

Schrödinger 表示では，系の時間的変化はすべて状態ベクトルに押し付けるが，Heisenberg 表示では，物理量に対応する演算子に押し付ける．そしてすべての物理量は，正準変数の関数となるから，それらに対する運動方程式，すなわち Heisenberg の方程式を与えれば決定される：

$$\frac{dq_r(t)}{dt}=i[H,q_r(t)], \qquad \frac{dp_r(t)}{dt}=i[H,p_r(t)] \tag{1.3}$$

ただし，正準変数は正準交換関係を満足していなければならない：

$$[q_r(t),p_s(t)]=i\delta_{rs} \qquad (p\text{ 同士あるいは }q\text{ 同士は可換}) \tag{1.4}$$

このときに，(1.2) に対応する $\mathcal{O}$ の期待値は次式で与えられる：

$$\langle\mathcal{O}\rangle=\int\Psi^*\mathcal{O}(t)\Psi\,dq \tag{1.5}$$

この二つの表示の間の関係は，状態ベクトルおよび演算子に対してそれぞれ次のユニタリー変換によって与えられる：

$$\Psi(t)=e^{-itH}\Psi, \qquad \mathcal{O}(t)=e^{itH}\mathcal{O}e^{-itH} \tag{1.6}$$

また演算子の順序に関して適当な注意を払えば，p と q との関数 F に対して，(1.4) の結果として次式が成り立つ：

$$\frac{\partial F}{\partial p_r}=i[F,q_r], \qquad \frac{\partial F}{\partial q_r}=-i[F,p_r] \tag{1.7}$$

従って方程式 (1.3) は，次の正準形に書かれることになる：

$$\frac{dq_r(t)}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_r(t)}, \qquad \frac{dp_r(t)}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_r(t)} \tag{1.8}$$

ただし，$q_r(t)$, $p_r(t)$ のように t 依存性を陽に書いているのは，これらの演算子が Heisenberg 表示で定義されていることを意味する.

§2 Hamilton の原理

古典力学においては，運動方程式は Euler-Lagrange の方程式と呼ばれるように変分原理から導かれる：

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}dtL(q_r,\dot{q}_r)=0 \tag{2.1}$$

これを Hamilton の原理と呼ぶ．変分に対して $q_r(t_0)$, $q_r(t_1)$ は与えられている

ものとして

$$\delta q_r(t_0)=\delta q_r(t_1)=0 \tag{2.2}$$

という条件を課すると，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_r}=0 \tag{2.3}$$

という Euler-Lagrange の方程式が導出されることになる．ただし $\dot{q}_r$ は，q_r の時間微分である．この理論から正準形に移るには，q_r の正準共役量 p_r を

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \tag{2.4}$$

で定義すれば良い．この式から $\dot{q}_r$ が，q と p とで表わされるときに，この L を non-singular Lagrangian と呼ぶ．このときにハミルトニアンは

$$H=\sum_{r=1}^{f} p_r\dot{q}_r-L \tag{2.5}$$

で与えられることになる．

§3　正準方程式と Lagrange の方程式の等価性

この節では，正準方程式と正準交換関係とを組み合わせて Lagrange の方程式を導出してみよう．正準方程式 (1.3)，正準交換関係 (1.4) とハミルトニアンの定義式 (2.5) を組み合わせると

$$\begin{aligned}\frac{dq_r}{dt}&=i[H, q_r]\\ &=i\left[\sum_{j=1}^{f} p_j\dot{q}_j-L,\ q_r\right]\\ &=\dot{q}_r+i\sum p_j[\dot{q}_j, q_r]-i[L, q_r]\end{aligned}$$

を得る．そこで次式を用いる：

$$[L, q_r]=\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}[\dot{q}_j, q_r]+\sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}[q_j, q_r]=\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}[\dot{q}_j, q_r]$$

ただし q 同士は可換であることを使った．この結果を前式に代入すると

$$\frac{dq_r}{dt}=\dot{q}_r+i\sum_j\left(p_j-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)[\dot{q}_j, q_r]$$

が得られる．この式は p_j の定義式 (2.4) が成り立っている限り常に成立している．次にもう一つの正準方程式を調べてみると上の導出と同様に

$$\begin{aligned}\frac{dp_r}{dt}&=i[H, p_r]\\&=\frac{\partial L}{\partial q_r}+i\sum_j\left(p_j-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)[\dot{q}_j, p_r]\end{aligned}$$

従って (2.4) が成り立っていれば

$$\frac{dp_r}{dt}-\frac{\partial L}{\partial q_r}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_r}=0.$$

すなわち正準方程式は，正準交換関係が成り立っている限り Lagrange の方程式と等価であることが分かる．この事実は後に場の量子化に利用される．

§4　同時刻正準交換関係

前節で見たように同時刻交換関係 (1.4) は量子力学における基礎的関係である．この関係は，ある時刻 $t=t_0$ で成立すればすべての時刻で成り立つことが次のようにして証明される．まず正準方程式 (1.3) と Jacobi の恒等式より

$$\frac{d}{dt}[q_r(t), p_s(t)]=i[H, [q_r(t), p_s(t)]] \tag{4.1}$$

という微分方程式を得る．この方程式を初期条件

$$[q_r(t_0), p_s(t_0)]=i\delta_{rs} \tag{4.2}$$

の下に解けば，任意の時刻 t に対して次の関係を得ることができる：

$$[q_r(t), p_s(t)]=i\delta_{rs}. \tag{4.3}$$

第2章　簡単な場の量子化

前章で述べた力学系は有限の自由度 f を持っていたが，$f \to \infty$ の極限にまで理論を拡張するにはどうしたら良いであろうか？　この問題を調べるためにまず簡単な拡張をしてから更に一般化することを考えてみよう．

§1　正準形式の場の理論

まずお互いに相互作用のない N 個の系を考える．全系のラグランジアンは

$$L=\sum_{n=1}^{N} L_n(q_n, \dot{q}_n) \tag{1.1}$$

のように表わされるし，Hamilton の原理，あるいは最小作用の原理は

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} dt\sum_{n=1}^{N} L_n(q_n, \dot{q}_n)=0 \tag{1.2}$$

で与えられる．さて N を連続無限として，離散的な番号 n を連続パラメーター x で置き換えることにする．それと同時に力学変数 q_n も $\varphi(x)$ のような書き方に変えることにしよう．このような連続変数の関数となる力学変数を場と呼ぶことにする．この時に最小作用の原理は，積分領域を指定したとして

$$\delta\int dtL=\delta\int dt\left(\int dx\,\mathcal{L}[\varphi(x), \dot{\varphi}(x)]\right)=0 \tag{1.3}$$

のような形に表わされることになる．この時に，$\mathcal{L}$ をラグランジアン密度と呼ぶ．x が3次元の空間座標を表わす時には，dx は体積素片 $d^3x=dxdydz$ を表わすことになる．この時に $dtd^3x=d^4x$ は自然単位系における4次元的体積素片を表わす．この単位系では，t はしばしば x_0 と書かれる．しからば3次元空間における最小作用の原理は，Ω を適当な4次元的領域として

$$\delta\int_{\Omega} d^4x\,\mathcal{L}[\varphi(x), \dot{\varphi}(x)]=0 \tag{1.4}$$

のように表わされる．ただし x は4次元的座標を表わすものとする．これは3次元空間で，異なる点における場の間に何ら相互作用のない時の作用原理であるが，これでは空間内を伝わってゆく波等は記述できない．さて近接作用の原

理に基づいた相対論的な場の理論においては，ある点における場はその無限小の距離にある隣接点における場とのみ相互作用をすると考える．このことはラグランジアン密度が，$\varphi(x)$，$\dot{\varphi}(x)$ および $\varphi(x+dx)$ の関数であると言って良い．そこで

$$\varphi(x+dx)=\varphi(x)+\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k}dx_k \qquad (k=1,2,3)$$

を用いると，結局ラグランジアン密度は，φ とその時間的および空間的微分の関数であるということになるので，それをまとめて

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}\left[\varphi(x),\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\mu}\right] \qquad (\mu=1,2,3,4) \tag{1.5}$$

と書くことができる．ここに $x_4=ix_0=it$ である．一般に複数個の場があれば，添字 α で区別して $\varphi_\alpha(x)$ のように書くことにする．しからば作用原理は

$$\delta\int d^4x\,\mathcal{L}\left[\varphi_\alpha(x),\frac{\partial\varphi_\alpha(x)}{\partial x_\mu}\right]=0 \tag{1.6}$$

という形で表わされることになる．

正準交換関係

有限自由度系における正準交換関係を無限自由度系に拡張するにはどうしたら良いかを考えてみよう．まず有限自由度系での正準交換関係を同時刻で

$$\sum_s[q_r,p_s]A_s=iA_r \tag{1.7}$$

という形に書き，離散的変数から連続的変数へ移る時の辞書を作ってみよう．

$$q_s\longrightarrow\varphi_\alpha(x)$$

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\longrightarrow\pi_\alpha(x)=\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}_\alpha(x)}\mathcal{L}\left[\varphi_\alpha(x),\frac{\partial\varphi_\alpha(x)}{\partial x_\mu}\right]$$

$$\sum_s\longrightarrow\sum_\alpha\int d^3x$$

この規則によって (1.7) を連続変数の場合に翻訳してみよう．同時刻という条件があるので以下では $x_0=x_0'$ を仮定すると，

$$\sum_\beta\int d^3x'[\varphi_\alpha(x),\pi_\beta(x')]f_\beta(x')=if_\alpha(x) \tag{1.8}$$

となる．これが任意の $f_\beta(x')$ に対して成り立つとすると

$$[\varphi_\alpha(x),\ \pi_\beta(x')]=i\delta_{\alpha\beta}\delta^3(x-x') \tag{1.9}$$

という場の理論における正準交換関係を得る．ただし $x_0=x_0'$ であり，

$$\delta^3(x-x')=\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z').$$

後で分かるように，このような交換関係はボーズ統計に従う場にのみ成立し，フェルミ統計に従う場に対しては，交換子を反交換子で置き換えなければならないが，ここでは触れないことにする．また

$$[q_r, q_s]=[p_r, p_s]=0 \tag{1.10}$$

に相当する関係は

$$[\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x')]=[\pi_\alpha(x), \pi_\beta(x')]=0 \qquad (x_0=x_0') \tag{1.11}$$

で与えられることになる．

このような正準交換関係の設定，すなわち場の量子化は，Heisenberg と Pauli とによって導入された．

Euler-Lagrange の方程式

場の従う方程式は最小作用の原理から導かれる．

$$\delta\int_\Omega d^4x\,\mathcal{L}=0 \tag{1.12}$$

ただし場 φ_α は4次元領域 Ω の表面 $\partial\Omega$ において与えられ，従って表面では $\delta\varphi_\alpha=0$ となっているものとする．ここで考える変分は $\delta\varphi_\alpha(x)=\varphi'_\alpha(x)-\varphi_\alpha(x)$ であり，変分と微分とは交換する．また以下では微分を次のように書く．

$$\frac{\partial\varphi_\alpha(x)}{\partial x_\mu}=\partial_\mu\varphi_\alpha(x)=\varphi_{\alpha:\mu}(x) \tag{1.13}$$

さて次式から出発する：

$$\delta\int_\Omega d^4x\,\mathcal{L}=\int_\Omega d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\varphi_\alpha(x)}\delta\varphi_\alpha(x)+\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\varphi_{\alpha:\mu}(x)}\delta\varphi_{\alpha:\mu}(x)\right] \tag{1.14}$$

ここで微分と変分の可換性を用いると

$$\delta\varphi_{\alpha:\mu}(x)=\partial_\mu\delta\varphi_\alpha(x) \tag{1.15}$$

これを用いて部分積分を行う．その際に次の Gauss の定理を利用する：

$$\int_\Omega d^4x\partial_\mu A_\mu=\int_{\partial\Omega}d\sigma_\mu A_\mu, \qquad \text{ただし}\ d\sigma_\mu=d^4x/dx_\mu \tag{1.16}$$

しからば

$$\delta\int_\Omega d^4x\,\mathcal{L}(x)=\int_\Omega d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\varphi_\alpha(x)}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\varphi_{\alpha:\mu}(x)}\right)\right]\delta\varphi_\alpha(x)$$
$$+\int_{\partial\Omega}d\sigma_\mu\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\varphi_{\alpha:\mu}(x)}\delta\varphi_\alpha(x) \tag{1.17}$$

仮定により右辺第二項は消え，第一項では $\delta\varphi_\alpha$ の任意性から

$$[\mathcal{L}]_{\varphi_\alpha}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\alpha}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{\alpha:\mu}}\right)=0 \tag{1.18}$$

これが Euler-Lagrange の方程式である．この左辺を Euler 微分と呼ぶ．

例 Klein-Gordon の方程式

次の方程式を Klein-Gordon の方程式と呼ぶ：

$$(\Box-m^2)\varphi=0, \qquad \text{ただし}\ \Box=\partial_\mu{}^2=\triangle-\partial_0{}^2 \tag{1.19}$$

この方程式に対して次のようなラグランジアン密度を選ぶ．

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}[(\partial_\mu\varphi)^2+m^2\varphi^2] \tag{1.20}$$

以下において我々は Pauli metric を用いる．すなわちベクトルの内積を

$$x\cdot y=\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}-x_0y_0 \tag{1.21}$$

によって定義するのである．しからば (1.20) から出る場の方程式は

$$[\mathcal{L}]_\varphi=-m^2\varphi+\partial_\mu{}^2\varphi=(\Box-m^2)\varphi=0$$

となり，(1.19)が再現される．さてラグランジアン密度中の運動エネルギーに相当する項は，$(1/2)\dot{\varphi}^2$ であり，この項は正であるのでそれにより全系のエネルギーが正定値となる．これについては次に述べる．

ハミルトニアン

場のハミルトニアンを求めるには再び質点系のものに翻訳規則を適用する．さて (1.2.5) 式におけるハミルトニアンの定義式を前に与えた規則により書き替えよう．ただし (1.2.5) 式とは第1章の (2.5) 式という意味である．

$$H=\sum_\alpha\int d^3x\ \pi_\alpha(x)\dot{\varphi}_\alpha(x)-\int d^3x\mathcal{L}(x)\equiv\int d^3x\mathcal{H}(x), \tag{1.22}$$

$$\mathcal{H}(x)=\sum_\alpha\pi_\alpha(x)\dot{\varphi}_\alpha(x)-\mathcal{L}(x). \tag{1.23}$$

H がハミルトニアンであり，$\mathcal{H}$ がハミルトニアン密度である．

例 実スカラー場のハミルトニアン

前出の例 (1.20) を書き直すと

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}[\dot{\varphi}^2-(\nabla\varphi)^2-m^2\varphi^2] \tag{1.24}$$

これから φ の正準共役量 π は

$$\pi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=\dot{\varphi} \tag{1.25}$$

従って

$$\mathscr{H}=\pi\dot{\varphi}-\mathscr{L}=\frac{1}{2}[\pi^2+(\nabla\varphi)^2+m^2\varphi^2] \tag{1.26}$$

これは明らかに正定値である.

以上で見たように，質点力学に対する正準形式は，簡単な翻訳規則によって場の理論にも拡張されることが分かった.

§2　正準方程式の相対論的一般化

量子力学における正準方程式

$$\frac{d\mathcal{O}}{dt}=i[H,\mathcal{O}] \tag{2.1}$$

は場の理論でもそのまま成立する．さて $P_4=iP_0=iH$ と書くと，P_0 はエネルギー・運動量ベクトルの時間成分であるから，$\mathcal{O}(x)$ を場の演算子の多項式とした時に (2.1) 式を次の形に書くことができる:

$$[P_4,\mathcal{O}(x)]=i\frac{\partial\mathcal{O}(x)}{\partial x_4}$$

従って理論が相対論的に不変であればこの式を一般化して

$$[\mathcal{O}(x),P_\mu]=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\mathcal{O}(x) \tag{2.2}$$

と書くことができ，この式を満たす空間成分 P_k $(k=1,2,3)$ が存在するはずである.

実際に P_k は次のような形に選べば良いことが分かる:

$$P_k=-\int d^3x\sum_\alpha \pi_\alpha(x)\partial_k\varphi_\alpha(x) \tag{2.3}$$

実例として，$\mathcal{O}$ として φ_α，あるいは π_α を選ぶと

$$[\varphi_\alpha(x),P_k]=-i\int d^3x'\delta^3(x-x')\partial_k\varphi_\alpha(x')=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_\alpha(x)$$

$$[\pi_\alpha(x),P_k]=i\int d^3x'\,\pi_\alpha(x')\frac{\partial}{\partial x_k'}\delta^3(x-x')=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\pi_\alpha(x)$$

このようにして我々はエネルギー・運動量ベクトルを表わす四元ベクトル演算子 P_μ を得たことになる．この 4 成分はお互いに可換である.

$$[P_\mu,P_\nu]=0 \tag{2.4}$$

そこで一般の演算子 $\mathcal{O}(x)$ を P_μ の固有状態 $|a\rangle$, $|b\rangle$ で挟んでみる.

$$P_\mu|a\rangle=p_\mu|a\rangle, \qquad P_\mu|b\rangle=q_\mu|b\rangle \tag{2.5}$$

しからば

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle a|\mathcal{O}(x)|b\rangle=i\langle a|[\mathcal{O}(x),P_\mu]|b\rangle=-i(p_\mu-q_\mu)\langle a|\mathcal{O}(x)|b\rangle \tag{2.6}$$

この微分方程式の解は次式で与えられ，$\mathcal{O}(x)$ の x 依存性が定められる．

$$\langle a|\mathcal{O}(x)|b\rangle=\langle a|\mathcal{O}(0)|b\rangle e^{-i(p-q)\cdot x} \tag{2.7}$$

この関係式は後に繰り返し使用される重要なものである．

§3 実スカラー場の量子化

実スカラー場については既に例として出てきたのでその量子化を実行してみよう．まず相互作用の無い場合を考えるが，ラグランジアン密度$\mathcal{L}$を選ぶのに次のような条件を考慮する．

(1) $\mathcal{L}$ はローレンツ変換に対して不変である．

(2) $\mathcal{L}$ から計算したハミルトニアン密度 $\mathcal{H}$ は正定値となる．

(3) 相互作用の無い場合には，場は Klein-Gordon の方程式を満たす．

以上の条件の中で，(1) についてもっと詳しく述べれば，不変性は本義ローレンツ変換，すなわち無限小ローレンツ変換を積み重ねて生成されるような変換に対してだけ $\mathcal{L}$ が不変であれば良い．(3)の条件は，Einstein の関係式

$$p^2+m^2=p_\mu{}^2+m^2=0 \tag{3.1}$$

において，p_μ を微分演算子 $-i\partial/\partial x_\mu$ で置き換えて場に作用させると Klein-Gordon の方程式が得られる．これは与えられた自由場が，一定の質量を持った粒子に対応しているという条件である．

さて (1.20) で与えたラグランジアン密度は，スカラーであり，勿論ローレンツ不変である．またこれから計算したハミルトニアン密度 (1.26) は正定値である．変分原理から出した場の方程式は Klein-Gordon の方程式そのものになる．従って (1.20) は正しいラグランジアン密度であると言える．φ の正準共役量は (1.25) で与えられるように，φ の時間微分 $\dot{\varphi}$ に等しくなる．

さて場の量子化は同時刻交換関係を通じて実行される．

$$[\varphi(x),\varphi(x')]=[\pi(x),\pi(x')]=0, \tag{3.2}$$

$$[\varphi(x),\pi(x')]=i\delta^3(x-x'), \qquad \text{ただし}\ x_0=x'_0 \tag{3.3}$$

次にこの系を体積 $V=L^3$ という立方体の内部に入れ，週期性の条件を課し，

次いで $\varphi(x)$ をフーリエ展開してやる．この箱の中では関数系

$$\{e^{ipx}\}, \qquad \text{ただし}\ p_j = n_j\left(\frac{2\pi}{L}\right), \quad n_j = \text{整数} \tag{3.4}$$

は完全系をなすから，我々は次の展開式を得る．

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}} e^{ipx} c(\boldsymbol{p}, t) \tag{3.5}$$

この展開式を Klein-Gordon 方程式に代入すると，c の方程式が得られる．

$$\ddot{c}(\boldsymbol{p}, t) = -(\boldsymbol{p}^2 + m^2) c(\boldsymbol{p}, t) \tag{3.6}$$

そこで $p_0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ と置けば，上の方程式の一般解は

$$c(\boldsymbol{p}, t) = c_1(\boldsymbol{p}) e^{-ip_0 t} + c_2(\boldsymbol{p}) e^{ip_0 t} \tag{3.7}$$

従って

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}} e^{ipx}\{c_1(\boldsymbol{p}) e^{-ip_0 t} + c_2(\boldsymbol{p}) e^{ip_0 t}\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}}\{e^{ipx - ip_0 t} c_1(\boldsymbol{p}) + e^{-ipx + ip_0 t} c_2(-\boldsymbol{p})\}\end{aligned} \tag{3.8}$$

しかるに φ は実数，あるいは演算子としてエルミートであるから

$$c_2(\boldsymbol{p}) = c_1^\dagger(-\boldsymbol{p}) \tag{3.9}$$

今後 c_1 を単に c と書き，$p\cdot x = \boldsymbol{px} - p_0 t$ と書くことにすれば，φ と π とは

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}}\{e^{ip\cdot x} c(\boldsymbol{p}) + e^{-ip\cdot x} c^\dagger(\boldsymbol{p})\} \tag{3.10}$$

$$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}}\{-ip_0 e^{ip\cdot x} c(\boldsymbol{p}) + ip_0 e^{-ip\cdot x} c^\dagger(\boldsymbol{p})\} \tag{3.11}$$

これらの展開を (3.2) の同時刻交換関係に代入すると

$$[c(\boldsymbol{p}), c(\boldsymbol{q})] = [c^\dagger(\boldsymbol{p}), c^\dagger(\boldsymbol{q})] = 0, \tag{3.12}$$

$$[c(\boldsymbol{p}), c^\dagger(\boldsymbol{q})] + [c^\dagger(-\boldsymbol{p}), c(-\boldsymbol{q})] = 0. \tag{3.13}$$

次に (3.3) を変形して書き替える：

$$[\varphi(x), \pi(x')] = \frac{i}{V}\sum_{\boldsymbol{p}} e^{ip(x-x')}, \qquad x_0' = x_0$$

この式に上の展開 (3.10)，(3.11) を代入すると

$$ip_0[c(\boldsymbol{p}), c^\dagger(\boldsymbol{q})] - ip_0[c^\dagger(-\boldsymbol{p}), c(-\boldsymbol{q})] = i\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}$$

あるいは

$$[c(\boldsymbol{p}), c^\dagger(\boldsymbol{q})] - [c^\dagger(-\boldsymbol{p}), c(-\boldsymbol{q})] = \frac{1}{p_0}\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} \tag{3.14}$$

この式と (3.13) とを組み合わせると,

$$[c(\boldsymbol{p}),\ c^{\dagger}(\boldsymbol{q})]=\frac{1}{2p_0}\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} \tag{3.15}$$

そこで $c(\boldsymbol{p})$ の代りに $a(\boldsymbol{p})$ を次式で定義する:

$$c(\boldsymbol{p})=\frac{1}{\sqrt{2p_0}}a(\boldsymbol{p}),\qquad c^{\dagger}(\boldsymbol{p})=\frac{1}{\sqrt{2p_0}}a^{\dagger}(\boldsymbol{p}) \tag{3.16}$$

しからば交換関係は次のように簡単化される:

$$[a(\boldsymbol{p}),a(\boldsymbol{q})]=[a^{\dagger}(\boldsymbol{p}),a^{\dagger}(\boldsymbol{q})]=0, \tag{3.17}$$

$$[a(\boldsymbol{p}),a^{\dagger}(\boldsymbol{q})]=\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} \tag{3.18}$$

(3.16) を (3.10) に代入すると

$$\varphi(x)=\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{\sqrt{2p_0V}}(e^{ip\cdot x}a(\boldsymbol{p})+e^{-ip\cdot x}a^{\dagger}(\boldsymbol{p})) \tag{3.19}$$

このようにして出てきた演算子 $a, a^{\dagger}$ の解釈をするために，全系のエネルギーと運動量とを $a, a^{\dagger}$ で表わしてみる.

$$H=\int_V d^3x\mathcal{H}(x)=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{p}}p_0[a(\boldsymbol{p})a^{\dagger}(\boldsymbol{p})+a^{\dagger}(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})] \tag{3.20}$$

$$P_k=-\int_V d^3x\ \pi(x)\partial_k\varphi(x)=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{p}}p_k[a(\boldsymbol{p})a^{\dagger}(\boldsymbol{p})+a^{\dagger}(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})] \tag{3.21}$$

そこで次の $n(\boldsymbol{p})$ を定義する:

$$n(\boldsymbol{p})=a^{\dagger}(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) \tag{3.22}$$

しからば，(3.18) より $a(\boldsymbol{p})a^{\dagger}(\boldsymbol{p})=n(\boldsymbol{p})+1$ となるから，(3.20), (3.21) は

$$H=\sum_{\boldsymbol{p}}p_0\left(n(\boldsymbol{p})+\frac{1}{2}\right),\qquad P_k=\sum_{\boldsymbol{p}}p_k\left(n(\boldsymbol{p})+\frac{1}{2}\right) \tag{3.23}$$

ここで強調したいことは，$n(\boldsymbol{p})$ (あるいは $\boldsymbol{p}$ を固定して単に n と書くが) という演算子の固有値は，0, 1, 2, … という負でない整数になるということである. このことを証明するには $[a,a^{\dagger}]=1$ より出発する. しからば

$$[n,a]=-a,\qquad [n,a^{\dagger}]=a^{\dagger} \tag{3,24}$$

ここで n の固有状態を $|n'\rangle$ のように表わすことにする. n' は n の固有値で,

$$n|n'\rangle=n'|n'\rangle \tag{3.25}$$

しからば (3.24) から

$$\langle n'|[n,a^{\dagger}]|n''\rangle=(n'-n'')\langle n'|a^{\dagger}|n''\rangle=\langle n'|a^{\dagger}|n''\rangle$$

すなわち，$a^{\dagger}$ の行列要素が生き残るのは $n'=n''+1$ の時のみである. 換言す

れば $a^\dagger$ は n の固有値を1だけ増加させる演算子である．逆に a は n の固有値を1だけ減少させる演算子である．そこで a，あるいは $a^\dagger$ で結ばれている状態に対する n の固有値は，一つの n_1 という固有値から出発すると

$$\cdots, n_1-2, n_1-1, n_1, n_1+1, n_1+2, \cdots \tag{3.26}$$

の形になるはずである．しかるに(3.22)の定義により，n の固有値は負にはなれないから上の数列には最小値があるはずであり，これを n_0 とすると，(3.26)は

$$n_0, n_0+1, n_0+2, \cdots. \tag{3.27}$$

さて

$$\begin{aligned}\langle n'|n|n'\rangle &= \sum_{n''} \langle n'|a^\dagger|n''\rangle\langle n''|a|n'\rangle \\ &= \langle n'|a^\dagger|n'-1\rangle\langle n'-1|a|n'\rangle \\ &= |\langle n'-1|a|n'\rangle|^2 = n'\end{aligned} \tag{3.28}$$

従って不定の位相因子を次のように選ぶことが出来る：

$$\langle n'-1|a|n'\rangle = \langle n'|a^\dagger|n'-1\rangle = \sqrt{n'} \tag{3.29}$$

さて n_0 を見つけるのには

$$a|n_0\rangle = 0 \tag{3.30}$$

これを (3.29) と比べれば直ちに

$$n_0 = 0 \tag{3.31}$$

これで演算子 n の固有値が完全に求まった．この n を粒子数演算子と呼ぶ．

再び (3.23) に戻ると

$$H = \sum_{\boldsymbol{p}} p_0 n(\boldsymbol{p}) + \text{c 数}, \qquad P_k = \sum_{\boldsymbol{p}} p_k n(\boldsymbol{p}) + \text{c 数} \tag{3.32}$$

我々はこの c 数を二つの理由で落とすことにする．

(1) 古典論から量子力学へ移行する時に演算子の順序をどう選ぶかは一意的でない．例えば (3.20) で $aa^\dagger$ を古典論の範囲内で $a^\dagger a$ と書き換えておいてから量子力学へ移れば，このような c 数は出てこない．(2) 観測にかかるのは，これらの演算子の固有値の差のみである．

さて c 数を落とせば (3.32) 式を統一して

$$P_\mu = \sum_{\boldsymbol{p}} p_\mu n(\boldsymbol{p}). \tag{3.33}$$

この解釈は，$n(\boldsymbol{p})$ は運動量 $\boldsymbol{p}$，エネルギー p_0 を持つ粒子の数を表わす．この解釈が可能であることは，既に述べたように $n(\boldsymbol{p})$ の固有値が負でない整数

だからである．かくしてスカラー場φは波動方程式を満たす波動と考えて出発したのに，正準交換関係を課して量子化をした結果その粒子性が出てきた．これは Einstein の光量子仮説をスカラー場に拡張したものに外ならない．また(3.1) から明らかなように m はスカラー場の量子の質量を表わすことになる．n を粒子数演算子と呼ぶように，a と $a^\dagger$ とをそれぞれ消滅演算子，生成演算子，等と呼ぶ．

§4　複素スカラー場の量子化

実のスカラー場が量子化されれば同様な方法で複素スカラー場も量子化される．第一の方法は，複素スカラー場を二つの実スカラー場に分解して量子化する方法である．まずラグランジアン密度として次のものを選ぶ：

$$\mathcal{L}=-[\partial_\mu\varphi^\dagger\cdot\partial_\mu\varphi+m^2\varphi^\dagger\varphi] \tag{4.1}$$

ここに$\varphi^\dagger$はφのエルミート共役な演算子である．古典論ではφの複素共役量φ^*を用いるが，量子化して演算子となるので$\varphi^\dagger$を用いるのである．さて

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1-i\varphi_2),\qquad \varphi^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1+i\varphi_2) \tag{4.2}$$

という置換えをすると，ラグランジアン密度は次の形に書き替えられる：

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}[(\partial_\mu\varphi_1)^2+m^2\varphi_1{}^2]-\frac{1}{2}[(\partial_\mu\varphi_2)^2+m^2\varphi_2{}^2] \tag{4.3}$$

これは二つの実スカラー場であるからその量子化は前節と同じである．

第二の方法は，実スカラー場に分解しない方法であって，まずφと$\varphi^\dagger$との正準共役量を次式で定義する：

$$\pi^\dagger=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}},\qquad \pi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}^\dagger} \tag{4.4}$$

しからば直ちに次式が得られる：

$$\pi^\dagger=\dot{\varphi}^\dagger,\qquad \pi=\dot{\varphi} \tag{4.5}$$

同時刻交換関係で消えないものとフーリエ展開は次式で与えられる：

$$[\varphi(x),\pi^\dagger(x')]=[\varphi^\dagger(x),\pi(x')]=i\delta^3(x-x'),\quad \text{ただし } x_0=x_0' \tag{4.6}$$

$$\varphi(x)=\sum_p\frac{1}{\sqrt{2p_0V}}[a(\boldsymbol{p})e^{ip\cdot x}+b^\dagger(\boldsymbol{p})e^{-ip\cdot x}], \tag{4.7}$$

$$\varphi^\dagger(x)=\sum_p\frac{1}{\sqrt{2p_0V}}[b(\boldsymbol{p})e^{ip\cdot x}+a^\dagger(\boldsymbol{p})e^{-ip\cdot x}] \tag{4.8}$$

このように複素スカラー場の場合の量子化には，a と b という二種類の演算子が必要になる．そして同時刻交換関係を a と b を用いて表現すると，前節における計算を繰り返すことにより次の式が得られる．

$$[a(\boldsymbol{p}), a^{+}(\boldsymbol{q})] = [b(\boldsymbol{p}), b^{+}(\boldsymbol{q})] = \delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} \tag{4.9}$$

ただし他の交換関係，例えば $[a(\boldsymbol{p}), a(\boldsymbol{q})]$ 等，はすべて消える．従って

$$n_{+}(\boldsymbol{p}) = a^{+}(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}), \qquad n_{-}(\boldsymbol{p}) = b^{+}(\boldsymbol{p})b(\boldsymbol{p}) \tag{4.10}$$

を導入すれば，いずれも粒子数演算子となる．これらは質量 m の量子に対応するが，両者間には電荷のように両者を区別する量子数が存在する．このような対をなしている粒子の例は，π^{+} と π^{-}, K^0 と $\overline{K}^0$ 等である．後者に対しては実スカラーの表示の方が便利であり，対応する粒子は K_1^0 と K_2^0 とである．複素共役な場に対応する二種類の量子はお互いに他の反粒子と呼ばれる．この相互作用のない理論は，両者の入替えに対して不変であり，この入替えはユニタリー変換で表現される．それを $\mathscr{C}$ と書くことにすると次の形の関係式が成り立つ：

$$\mathscr{C}^{-1}\varphi(x)\mathscr{C} = e^{i\alpha}\varphi^{+}(x), \qquad \mathscr{C}^{-1}\varphi^{+}(x)\mathscr{C} = e^{-i\alpha}\varphi(x) \tag{4.11}$$

ただし α は実数である．この変換 $\mathscr{C}$ を荷電共役と呼ぶ．この変換は P_μ と可換であり，従って粒子と反粒子とは同じ質量を持つことになる．上式において φ の位相を適当に変えれば，$e^{i\alpha}$ という位相因子を ± 1 のように選べる．

§5 Dirac 方程式

多くの素粒子はスピン 1/2 を持ち，Dirac 方程式に従う．Dirac 方程式の性質については，拙著「相対論的量子力学」(培風館)において詳しく論じられているが，ここでは量子化に必要な性質のみについて論ずることにする．

非相対論的な Schrödinger 方程式を相対論的な Dirac 方程式に書き換えるために用いられるのは，次の条件である：

1) 波動関数は Klein-Gordon の方程式を満たす．

2) 確率密度 ρ と確率の流れ密度 $\boldsymbol{j}$ とが波動関数の二次形式として定義され，次の連続の方程式を満たさせることができる：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0, \qquad \rho \geqq 0 \tag{5.1}$$

まず非相対論的近似で Pauli の 2 成分波動関数が得られるためには，波動関数は多成分を持たねばならない．これを次のように書くことにしよう：

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{5.2}$$

しからば ρ は ψ の二次形式として，あるいはもっと厳密には ψ と $\psi^\dagger$ との双一次形式として，次の形に書かれなければならない．

$$\rho=\sum_{r,s}\psi_r^* a_{rs}\psi_s \tag{5.3}$$

これが正定値となるためには，係数 a_{rs} が正定値エルミート行列となれば良く，適当なユニタリー変換により対角化され，更にスケール変換により単位行列の形に書き直されるから，一般性を失うことなしに初めから次の形を選ぶ:

$$\rho=\sum_r \psi_r^*\psi_r=\psi^\dagger\psi \tag{5.4}$$

ここに $\psi^\dagger$ は ψ のエルミート共役であり1行 n 列の行列である．

さて H をハミルトニアンとすると，運動方程式は次の形に書かれる:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi=H\psi,\quad \text{あるいは}\quad \left(i\frac{\partial}{\partial t}-H\right)\psi=0 \tag{5.5}$$

これから t について二階微分の方程式を導き出すと，次の形となる:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+H^2\right)\psi=0 \tag{5.6}$$

これが Klein-Gordon の方程式と一致するためには

$$H^2=m^2+\boldsymbol{p}^2=m^2-\boldsymbol{\nabla}^2 \tag{5.7}$$

でなければならない． H は p について一次であるとすると，その最も一般的な形は，$\boldsymbol{\alpha}$ と β とを適当な行列として次の形になる:

$$H=\boldsymbol{\alpha p}+m\beta=\alpha_x p_x+\alpha_y p_y+\alpha_z p_z+m\beta \tag{5.8}$$

従って運動方程式の形は $\boldsymbol{\alpha}$ と β との行列要素を用いて

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_r=\sum_s\left(\boldsymbol{\alpha}_{rs}\frac{1}{i}\boldsymbol{\nabla}+m\beta_{rs}\right)\psi_s \tag{5.9}$$

次に α と β との性質を決めてみよう．

1)　H はエルミートであるから，α と β とはエルミート行列である．

2)　H は (5.7) 式を満たさねばならない．

そこで (5.8) を (5.7) に代入すると次の関係式が得られる:

$$\alpha_x{}^2=\alpha_y{}^2=\alpha_z{}^2=\beta^2=1\quad (\text{単位行列}),$$

$$\alpha_x\alpha_y+\alpha_y\alpha_x=\cdots=0, \qquad \alpha_x\beta+\beta\alpha_x=\cdots=0$$

あるいはこれらをまとめて

$$\alpha_k\alpha_l+\alpha_l\alpha_k=2\delta_{kl}1, \qquad \alpha_k\beta+\beta\alpha_k=0, \qquad \beta^2=1 \tag{5.10}$$

次に連続の方程式を導出しよう．それには次のように置けば良い．

$$\rho=\psi^\dagger\psi, \qquad \boldsymbol{j}=\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi \tag{5.11}$$

(5.9) 式の複素共役をとると，α と β とのエルミート性を用いて

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_r^*=\sum_s\left(\frac{1}{i}\nabla\psi_s^*\boldsymbol{\alpha}_{sr}-m\psi_s^*\,\beta_{sr}\right) \tag{5.12}$$

(5.9) と (5.12) とを組み合わせると連続の方程式が導き出される．

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial\rho}{\partial t}&=i\sum_r\left(\frac{\partial\psi_r^*}{\partial t}\psi_r+\psi_r^*\frac{\partial\psi_r}{\partial t}\right)\\
&=\sum_{s,r}\left(\frac{1}{i}\nabla\psi_s^*\boldsymbol{\alpha}_{sr}\psi_r-m\psi_s^*\,\beta_{sr}\psi_r\right)+\sum_{r,s}\left(\psi_r^*\boldsymbol{\alpha}_{rs}\frac{1}{i}\nabla\psi_s+m\,\psi_r^*\beta_{rs}\psi_s\right)\\
&=-i\nabla\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi-i\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\nabla\psi\\
&=-i\,\mathrm{div}(\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi)\\
&=-i\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

Pauli 表現

α と β との交換関係 (5.10) を満たすためには，これらの行列が最低 4 次元でなければならない．その具体的表現を求めるために Pauli は 4 次元の σ 行列と ρ 行列とを導入した．

$$\sigma_j=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}_j & O\\ O & \boldsymbol{\sigma}_j\end{pmatrix} \qquad (j=1,2,3) \tag{5.13}$$

ただし $\boldsymbol{\sigma}_j$ は 2 次元 Pauli 行列，O は 2 次元零行列，σ_j は 4 次元 Pauli 行列である．明らかにそれらの間の関係は

$$\sigma_1\sigma_2=-\sigma_2\sigma_1=i\sigma_3, \quad \text{およびその巡回置換} \tag{5.14}$$

$$\sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2=\sigma_3{}^3=1 \quad (\text{4 次元単位行列}) \tag{5.15}$$

次に ρ 行列は次式で定義される：

$$\rho_1=\begin{pmatrix}O & I\\ I & O\end{pmatrix}, \qquad \rho_2=\begin{pmatrix}O & -iI\\ iI & O\end{pmatrix}, \qquad \rho_3=\begin{pmatrix}I & O\\ O & -I\end{pmatrix} \tag{5.16}$$

ただし I は 2 次元単位行列である．ρ についても (5.14)，(5.15) が成立する．

$$\rho_1\rho_2=-\rho_2\rho_1=i\rho_3, \quad \text{およびその巡回置換} \tag{5.17}$$

$$\rho_1{}^2=\rho_2{}^2=\rho_3{}^2=1 \tag{5.18}$$

これらの3個の σ 行列と3個の ρ 行列とはお互いに可換である．すなわち，$[\sigma_i, \rho_j]=0$ $(i, j=1, 2, 3)$ を満たしていることが容易に示される．

さて Pauli 表現においては，$\boldsymbol{\alpha}$ と β とは次式で与えられる：

$$\alpha_j=\rho_1\sigma_j=\begin{pmatrix} O & \sigma_j \\ \sigma_j & O \end{pmatrix}, \qquad \beta=\rho_3 \tag{5.19}$$

こうして作られた $\boldsymbol{\alpha}$ と β とは，明らかに (5.10) 式を満たしている．

Weyl 方程式

今までの Dirac 方程式の議論では，$m\neq0$ を仮定していた．この時に波動関数は4成分であったが，$m=0$ の場合には2成分が可能となる．この時には

$$H=\boldsymbol{\alpha p} \tag{5.20}$$

となるので β は必要なくなり，要求される交換関係は，(5.10)式の第一式，すなわち α 同士の交換関係のみとなる．これを満たすものとして

$$\alpha_k=\pm\sigma_k \tag{5.21}$$

という2次元の表現が存在する．この表現に対応して運動方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi=\pm\boldsymbol{\sigma p}\psi \tag{5.22}$$

という2成分のものとなる．この方程式を Weyl 方程式と呼ぶ．この方程式はパリティ保存と矛盾するために初めは真剣に考えられなかったが，1956年に Lee と Yang によりパリティの非保存が提唱されて以来脚光を浴び，現在では質量が0のニュートリノの方程式として用いられている．パリティ非保存との関係については次節で述べられる．

§6　Dirac 波動関数の相対論的変換性

場の演算子は一般にローレンツ変換に対して一定の変換性を有する．例えば

$$x_\mu \to x'_\mu=\sum_\nu a_{\mu\nu}x_\nu \tag{6.1}$$

というローレンツ変換に対して，スカラー場の変換は

$$\varphi'(x')=\varphi(x) \tag{6.2}$$

で与えられる．φ を φ' にしたのは，変数が新変数に変換されるのでその関数形が変化するためである．すなわち，スカラー場では変数の変化と関数形の変

化とがお互いに打ち消し合って，全体として不変に保たれるようになっている．x と書いても x' と書いても実は同じ点を表わしているのである．これに対してベクトル場 $A_\mu(x)$ を考えると，その変換性は

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x') = \sum_\nu a_{\mu\nu} A_\nu(x) \tag{6.3}$$

で与えられる．そこで問題は4成分の Dirac 場 ψ はローレンツ変換に対してどのように変換されるかということである．そこで次の一次変換を仮定する：

$$\psi \to \psi' = S\psi \tag{6.4}$$

もっと詳しく書くと，

$$\psi_r(x) \to \psi'_r(x') = \sum_s S_{rs}\psi_s(x) \tag{6.5}$$

そしてこの変換が Dirac 方程式と矛盾しないように行列 S を定める．勿論 S はローレンツ変換 (6.1) の一つの表現でなければならない．このような行列 S が存在すれば，Dirac方程式はいずれの慣性系においても完全に同じ形になる．

このような変換を定めるために，まず Dirac 方程式の書き替えをする．

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{i}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\nabla} + m\beta\right)\psi = 0$$

の左から β を乗ずると

$$\left(\beta\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{1}{i}\beta\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\nabla} + m\right)\psi = 0 \tag{6.6}$$

そこで γ 行列を次式で定義する：

$$\gamma_j = \frac{1}{i}\beta\alpha_j \quad (j=1, 2, 3)\,; \qquad \gamma_4 = \beta \tag{6.7}$$

この4個の γ 行列はいずれもエルミート行列であり，かつ交換関係 (5.10) は，γ 行列を用いると次のように統一的に表現される：

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}\,\mathbf{1} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \tag{6.8}$$

そして Dirac 方程式は次の形に書かれる．

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi = 0 \tag{6.9}$$

証明すべきことは，上の式から出発して S をうまく定めれば

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x'_\mu} + m\right)\psi' = 0 \tag{6.10}$$

が成り立つようにすることができるということである．

そこでまず次のローレンツ変換を考える：

$$x'_\mu=\sum_\nu a_{\mu\nu}x_\nu, \qquad \sum_\mu a_{\mu\rho}a_{\mu\sigma}=\delta_{\rho\sigma}$$
$$x_\nu=\sum_\mu a_{\mu\nu}x'_\mu, \qquad \sum_\mu a_{\rho\mu}a_{\sigma\mu}=\delta_{\rho\sigma} \tag{6.11}$$

ここに $(a_{\mu\nu})$ は直交行列であり，a_{j4} と a_{4j} $(j=1,2,3)$ は純虚数である．さて

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu}=\sum_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}=\sum_\nu a_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

これを (6.10) 式に代入すると，(6.4) を用いて

$$\sum_\mu\sum_\nu \gamma_\mu S a_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\psi+m\,S\psi=0$$

左から S^{-1} を乗ずると

$$\sum_\mu\sum_\nu (S^{-1}\gamma_\mu S)a_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\psi+m\psi=0$$

これが (6.9) 式と一致するためには

$$\sum_\mu(S^{-1}\gamma_\mu S)a_{\mu\nu}=\gamma_\nu \quad \text{あるいは} \quad S^{-1}\gamma_\mu S=\sum_\nu a_{\mu\nu}\gamma_\nu \tag{6.12}$$

これが S を定めるための一つの条件となる．この S は明らかにローレンツ変換の一つの表現になっているが，それは次の考察から明らかである．

S と $(a_{\mu\nu})$ との関係と同様にもう一つのローレンツ変換 $(b_{\mu\nu})$ に対して

$$T^{-1}\gamma_\mu T=\sum_\nu b_{\mu\nu}\gamma_\nu$$

が成り立つとすると直ちに次式が得られる：

$$(ST)^{-1}\gamma_\mu(ST)=\sum_\sigma(\sum_\nu a_{\mu\nu}b_{\nu\sigma})\gamma_\sigma.$$

従って S と T とがそれぞれ a と b とに対応すれば，ST は ab に対応し，その意味で S や T はローレンツ変換 a や b の表現となっている．

次に S の満たすべきもう一つの条件を導き出す．Dirac 方程式の複素共役は

$$\left((\gamma_\mu)^*_{rs}\frac{\partial}{\partial x^*_\mu}+m\delta_{rs}\right)\psi^*_s=0 \tag{6.13}$$

ただし s については和をとるものとする．x_μ は空間成分は実数であり，時間成分は純虚数である．また γ 行列はエルミート行列である．これらのことを考慮すると次式が得られる：

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\psi^*_s}{\partial x_j}(\gamma_j)_{sr}-\frac{\partial\psi^*_s}{\partial x_4}(\gamma_4)_{sr}+m\psi^*_r=0$$

次いで右から γ_4 を乗じ，$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ との反可換性を用いると

$$-\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu+m\overline{\psi}=0 \tag{6.14}$$

という式を得る．ただし $\overline{\psi}$ は

$$\overline{\psi}=\psi^{\dagger}\gamma_4 \tag{6.15}$$

この $\overline{\psi}$ について方程式 (6.14) がどんな慣性系でも成り立つための条件を調べてみると，ψ の時の S を用いて次のような変換を $\overline{\psi}$ が受ければ良いことが分かる：

$$\overline{\psi}\to\overline{\psi}'=\overline{\psi}S^{-1}. \tag{6.16}$$

$\psi^{\dagger}$ の代りに $\overline{\psi}$ を考えるのはその方が変換性が簡単だからである．ところが ψ と $\overline{\psi}$ とは独立ではないので (6.4) と (6.16) とが両立するためには S に対して一つの制限が課せられることになる．(6.4) のエルミート共役を用いると

$$\overline{\psi}'=\psi'^{\dagger}\gamma_4=\psi^{\dagger}S^{\dagger}\gamma_4=\overline{\psi}\gamma_4S^{\dagger}\gamma_4$$

この式と (6.16) とを比較すると次の条件式が得られる：

$$\gamma_4S^{\dagger}\gamma_4=S^{-1}\quad \text{あるいは}\quad S^{\dagger}\gamma_4=\gamma_4S^{-1}. \tag{6.17}$$

ここで注意すべきことは，S は必ずしもユニタリーにならないので $S^{\dagger}$ と S^{-1} とは等しいと置けないということである．さて S を定めるための二条件は，(6.12) 式と (6.17) 式とになる．以下においては無限小ローレンツ変換に対して行列 S を決めてみよう．

無限小ローレンツ変換を次の形に書く：

$$x'_\mu=x_\mu+\sum_\nu\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu,\qquad \varepsilon_{\mu\nu}=-\varepsilon_{\nu\mu}\text{は無限小} \tag{6.18}$$

ここに μ,ν のいずれか一方が 4 に等しければ $\varepsilon_{\mu\nu}$ は純虚数である．(6.18) に対応して，S を次の形に仮定する：

$$S=1+\frac{1}{2}\sum_\mu\sum_\nu\varepsilon_{\mu\nu}T_{\mu\nu},\qquad T_{\mu\nu}=-T_{\nu\mu} \tag{6.19}$$

ただし $T_{\mu\nu}$ は 4 行 4 列の行列で γ 行列から生成されるものとする．上式を (6.12) に代入すると，ε の一次の項は

$$\left[\gamma_\mu,\frac{1}{2}\sum_\lambda\sum_\nu\varepsilon_{\lambda\nu}T_{\lambda\nu}\right]=\sum_\nu\varepsilon_{\mu\nu}\gamma_\nu$$

$$=\frac{1}{2}\sum_\lambda\sum_\nu\varepsilon_{\lambda\nu}(\delta_{\lambda\mu}\gamma_\nu-\delta_{\mu\nu}\gamma_\lambda)$$

そこで $\varepsilon_{\lambda\nu}$ という反対称テンソルの反対称化された係数を比較すると

$$\gamma_\mu T_{\lambda\nu}-T_{\lambda\nu}\gamma_\mu=\delta_{\lambda\mu}\gamma_\nu-\delta_{\nu\mu}\gamma_\lambda \tag{6.20}$$

これが $T_{\lambda\nu}$ という反対称テンソルを決定するための条件式となる．この式を満

たす $T_{\lambda\nu}$ は次の式で与えられる：

$$T_{\lambda\nu}=\frac{1}{4}(\gamma_\lambda\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\lambda). \tag{6.21}$$

この式が (6.12) だけではなく (6.17) も満たすことは次のようにして分かる．

(6.19) を (6.17) に代入すると

$$\sum_\mu\sum_\nu \varepsilon^*_{\mu\nu}T^\dagger_{\mu\nu}=-\sum_\mu\sum_\nu \varepsilon_{\mu\nu}\gamma_4 T_{\mu\nu}\gamma_4 \tag{6.22}$$

この式を μ,ν が 4 を含む場合とそうでない場合に分ける．

$$\varepsilon_{ik}T^\dagger_{ik}=-\varepsilon_{ik}\gamma_4 T_{ik}\gamma_4=-\varepsilon_{ik}T_{ik},$$

$$-\varepsilon_{4k}T^\dagger_{4k}=-\varepsilon_{4k}\gamma_4 T_{4k}\gamma_4=\varepsilon_{4k}T_{4k}$$

従っていずれの場合にもこの条件は次のようになり満たされていることが分かる．

$$T^\dagger_{\mu\nu}=-T_{\mu\nu} \tag{6.23}$$

従って無限小ローレンツ変換に対しては $T_{\mu\nu}$，すなわち行列 S が存在することが証明された．またこの結果より

$$\mathrm{Tr}(T_{\mu\nu})=0 \tag{6.24}$$

またこの条件は S に対して次の制限を与える．

$$\det S=1 \tag{6.25}$$

この結果を一般化すると，無限小ローレンツ変換から生成される本義ローレンツ変換に対しても S が存在するということができる．有限な変換に対して S の具体的な形を求めることについては，この節の初めに述べた拙著を参照されたい．その際有限の変換に対しても (6.25) が成り立つことは明らかであろう．

空間反転

本義ローレンツ変換に属さない特別なローレンツ変換の一例は空間反転である．この場合には S は定義から直接定めなければならない．空間反転は

$$x'_j=-x_j\quad(j=1,2,3)\ ;\qquad x'_4=x_4 \tag{6.26}$$

で定義される．これに対応する S の満たすべき条件は

$$\gamma_j S=-S\gamma_j,\qquad \gamma_4 S=S\gamma_4,\qquad S^\dagger\gamma_4=\gamma_4 S^{-1} \tag{6.27}$$

これらの条件を満たす解は，不定の位相因子を除いて次式で与えられる：

$$S=\gamma_4 \tag{6.28}$$

すなわち，Dirac 方程式はパリティを保存すると言うことができる．ところがこのことは 2 成分の Weyl 方程式に対しては成立しない．このことについては

以下に議論する.

Weyl 方程式の相対論的共変性

§5において2次元の Pauli 行列を4次元のものと区別するために太字を用いたが，以下では太字は3次元ベクトルにのみ用い，成分には細字を使う．以下においては，Dirac 方程式にならって Weyl 方程式の相対論的共変性を証明する．Weyl 方程式 (5.22) から出発する.

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi=\pm\frac{1}{i}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nabla}\psi \tag{6.29}$$

正符号は右巻きの，負符号は左巻きのニュートリノに対応するが，それについては次節において述べる．そこで Γ_μ を導入する.

$$\Gamma_j=\sigma_j \quad (j=1,2,3)\,; \qquad \Gamma_4=\pm i \tag{6.30}$$

Weyl 方程式は，Γ 行列を用いて次の形に書かれる:

$$\Gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}=0, \qquad \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x_\mu}\Gamma_\mu=0 \tag{6.31}$$

従ってローレンツ変換に対応する変換は次の形となる:

$$\psi\to\psi'=S\psi, \qquad \psi^\dagger\to\psi'^\dagger=\psi^\dagger S^\dagger \tag{6.32}$$

Dirac 方程式との大きな差違は，Weyl 方程式には質量項が存在しないことである．そして二種類の方程式 (6.31) の共変性，あるいは任意の慣性系で同じ形の方程式が成立するための条件は次のように表わされる:

$$S^\dagger\Gamma_\mu S=\sum_\nu a_{\mu\nu}\Gamma_\nu \tag{6.33}$$

特に無限小ローレンツ変換(6.18)に対して，再び S を(6.19)の形に仮定すると

$$\frac{1}{2}\varepsilon^*_{\mu\nu}T^\dagger_{\mu\nu}\Gamma_\lambda+\frac{1}{2}\Gamma_\lambda\varepsilon_{\mu\nu}T_{\mu\nu}=\varepsilon_{\lambda\rho}\Gamma_\rho=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}(\delta_{\mu\lambda}\Gamma_\nu-\delta_{\nu\lambda}\Gamma_\mu) \tag{6.34}$$

この式から $T_{\mu\nu}$ は直ちに次のように求められる:

$$T_{12}=\pm T_{34}=\frac{i}{2}\sigma_3, \quad T_{23}=\pm T_{14}=\frac{i}{2}\sigma_1, \quad T_{31}=\pm T_{24}=\frac{i}{2}\sigma_2 \tag{6.35}$$

従って再び次の条件を得る.

$$\mathrm{Tr}(T_{\mu\nu})=0 \tag{6.36}$$

この場合に行列 S は unimodular である．すなわち,

$$\det S=1 \tag{6.37}$$

さて空間反転 (6.26) に対する S は次の四式を満たさねばならない.

$$S^\dagger\sigma_j S=-\sigma_j \quad (j=1,2,3)\,; \qquad S^\dagger S=1 \tag{6.38}$$

ところが2次元行列でこの四式を満たすものは存在しない．すなわち，Weyl方程式は，空間反転に対してはその形を保つことができない．換言すると，この方程式は空間反転に対しては定義されていないことになる．従って勿論，パリティも保存されない．この理由でWeyl方程式は長い間非現実的な方程式と考えられてきた．しかし1956年にLeeとYangとにより提唱されたパリティの非保存が実験的支持を得ると，この方程式は質量0のニュートリノを記述するものとして突然脚光を浴びるようになった．そしてこの方程式によって記述されるニュートリノ理論を二成分ニュートリノ理論と呼ぶ．

§7　自由なDirac方程式の解

Dirac場を量子化するには，まずDirac方程式の解の完全系を求めなければならない．そこでPauli表現を採るとハミルトニアンは

$$H=\boldsymbol{\alpha p}+\beta m=\rho_1\boldsymbol{\sigma p}+\rho_3 m \tag{7.1}$$

まず自由なDirac方程式に対する運動の恒量，すなわち保存量を求める．

$$[H,H]=0,\qquad [\boldsymbol{p},H]=0 \tag{7.2}$$

これはエネルギー・運動量の保存則を表現している．次に角運動量を考える．

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{7.3}$$

ところが下に見るようにこの量は保存されない．

$$[L_3,\boldsymbol{\alpha p}+\beta m]=\boldsymbol{\alpha}[L_3,\boldsymbol{p}]=i(\alpha_1 p_2-\alpha_2 p_1)=i(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{p})_3$$

すなわち，この式を一般化すると軌道角運動が保存量でないことが分かる．

$$[\boldsymbol{L},H]=i\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{p}=i\rho_1\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{p} \tag{7.4}$$

ところでスピンについても同様な事情が存する．

$$[\sigma_3,\boldsymbol{\alpha p}+\beta m]=\rho_1[\sigma_3,\boldsymbol{\sigma}]\boldsymbol{p}=2i\rho_1(\sigma_2 p_1-\sigma_1 p_2)=-2i\rho_1(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{p})_3,$$

あるいは

$$[\boldsymbol{\sigma},H]=-2i\rho_1\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{p} \tag{7.5}$$

(7.4) と (7.5) とを組み合わせると保存量として全角運動量が見つけられる．

$$[\boldsymbol{J},H]=0,\qquad \text{ただし}\ \boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \tag{7.6}$$

非相対論的理論と違うのは，自由粒子に対してもスピンと軌道角運動量とは，別々には保存されず，その和のみが保存される．

もう一つ大切な保存量としてヘリシティがある．すなわち

$$h=\boldsymbol{\sigma p}/p \quad \text{あるいは} \quad \lambda=h/2 \tag{7.7}$$

は保存量であり，h の固有値は ±1 である．厳密には λ のことをヘリシティと呼ぶが，ここでは h もヘリシティと呼ぶことにする．

さて自由な Dirac 粒子の運動は，運動量とヘリシティを与えることにより決定される．与えられた運動量 $\boldsymbol{p}$ に対する波動関数は

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\boldsymbol{px}-iEt}u(\boldsymbol{p}) \tag{7.8}$$

の形になる．ここに V は全系の閉じ込められている体積であり，$u(\boldsymbol{p})$ は 4 成分のスピノールである．ただしスピノールとは，スカラーやベクトルと違って，変換法則 (6.4) に従う物理量のことである．(7.8) を Dirac 方程式に代入して

$$Eu(\boldsymbol{p})=(\rho_1\boldsymbol{\sigma p}+\rho_3 m)u(\boldsymbol{p})\equiv H(\boldsymbol{p})u(\boldsymbol{p}) \tag{7.9}$$

が得られる．エネルギー固有値 E を求めるために，$H(\boldsymbol{p})$ をユニタリー変換で対角化する．そのために次の公式を利用する：

$$\exp\left(-\frac{i}{2}a\rho_2\right)\rho_3\exp\left(\frac{i}{2}a\rho_2\right)=\rho_3\cos a+\rho_1\sin a \tag{7.10}$$

そして $H(\boldsymbol{p})$ を次のように書く：

$$\rho_1\boldsymbol{\sigma p}+\rho_3 m=A(\rho_3\cos a+\rho_1\sin a)$$

しからば

$$A=\sqrt{(\boldsymbol{\sigma p})^2+m^2}=\sqrt{p^2+m^2}, \qquad \tan a=\boldsymbol{\sigma p}/m \tag{7.11}$$

ただし p はベクトル $\boldsymbol{p}$ の絶対値を表わす．そこで U を次のように選ぶ：

$$U=\exp\left(\frac{i}{2}a\rho_2\right)=\exp\left(\frac{i}{2}\rho_2\tan^{-1}\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{m}\right) \tag{7.12}$$

しからば $H(\boldsymbol{p})$ は次のように対角化される．

$$UH(\boldsymbol{p})U^{-1}=\sqrt{p^2+m^2}\ \rho_3 \tag{7.13}$$

さて U の具体的な形を求めるために，公式

$$\tan^{-1}\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{m}=\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{m}\left(\tan^{-1}\frac{p}{m}\Big/\frac{p}{m}\right)$$

を用いると，U は次の形になる．

$$U=\frac{1}{\sqrt{2A}}\left(\sqrt{A+m}+i\rho_2\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{\sqrt{A+m}}\right) \tag{7.14}$$

次に $v(\boldsymbol{p})=Uu(\boldsymbol{p})$ なるスピノールを導入すると

$$Ev(\boldsymbol{p})=\sqrt{p^2+m^2}\ \rho_3 v(\boldsymbol{p}) \tag{7.15}$$

さて ρ_3 の固有値は ±1 であるから，固有値 E は次のようになる．

$$E=\pm\sqrt{p^2+m^2} \tag{7.16}$$

それぞれの固有値は二重に縮退しているのでヘリシティを用いる．

1)　$E=\sqrt{p^2+m^2}$，$h=1$

$$v(p)=\begin{pmatrix}\cos\theta/2\\ e^{i\varphi}\sin\theta/2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

2)　$E=\sqrt{p^2+m^2}$，$h=-1$

$$v(p)=\begin{pmatrix}-e^{i\varphi}\sin\theta/2\\ \cos\theta/2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

3)　$E=-\sqrt{p^2+m^2}$，$h=1$

$$v(p)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \cos\theta/2\\ e^{i\varphi}\sin\theta/2\end{pmatrix}$$

4)　$E=-\sqrt{p^2+m^2}$，$h=-1$

$$v(p)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -e^{i\varphi}\sin\theta/2\\ \cos\theta/2\end{pmatrix}$$

以上で自由な Dirac 方程式が解けたことになる．波動関数の規格化は

$$\int_V d^3x\,\psi^\dagger(x)\psi(x)=1 \tag{7.17}$$

ここで気が付くことは，エネルギー固有値には正のものと負のものとがあることである．負エネルギー解の解釈は，量子化をしてはじめて正しく与えられるのである．また Dirac 粒子は，スピン 0 のスカラー粒子と違ってボーズ統計には従わない．スピン 1/2 の粒子としてフェルミ統計に従うことになる．そのためにはどのような量子化をしたら良いか？　これは次節の課題である．

Dirac 方程式と Weyl 方程式との関係

質量項の無い Dirac 方程式と Weyl 方程式との関係を示す．

$$H\psi=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p}\psi=E\psi \tag{7.18}$$

そこで次のようなエルミート行列を導入する：

$$\sigma_{\mu\nu}=\frac{1}{2i}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)=\frac{2}{i}T_{\mu\nu}, \tag{7.19}$$

$$\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \tag{7.20}$$

しからば Pauli 表現を含めて我々の用いる実用的な表示では，σ_{23}，σ_{31}，σ_{12} は (5.13) における $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ と等しくなる．そこでこのような表現では

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p}=-\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p} \tag{7.21}$$

と書くことが出来る．ただし $\boldsymbol{\sigma}$ はその 3 成分が $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ で与えられる 3 次元

ベクトルを表現する．この行列は都合により2次元とも4次元とも考えることが出来る．そこで波動関数 ψ を次のように分解する：

$$\psi=\psi_L+\psi_R=\frac{1+\gamma_5}{2}\psi+\frac{1-\gamma_5}{2}\psi \tag{7.22}$$

質量が0の場合には，Dirac 方程式 (7.18) は可約であり，次の二式を得る．

$$E\psi_L=-\boldsymbol{\sigma p}\psi_L, \qquad E\psi_R=\boldsymbol{\sigma p}\psi_R \tag{7.23}$$

そこで正エネルギーの解に限れば $E=p$ であるから，ψ_L に対しては $h=-1$，すなわちスピンと運動量は反平行でいわゆる左巻きに対応し，ψ_R に対しては $h=1$，すなわちスピンと運動量は平行でいわゆる右巻きに対応する．そこで γ_5 を対角形とする Weyl 表示では

$$\gamma_5=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix} \tag{7.24}$$

となり，従って ψ_L と ψ_R とは次のように2成分となる．

$$\psi_L=\begin{pmatrix}\times\\\times\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \psi_R=\begin{pmatrix}0\\0\\\times\\\times\end{pmatrix} \tag{7.25}$$

×は一般に0でないことを表わしている．これで2成分の Weyl 方程式が導き出されたことになる．しかし上に見たように，4成分の形にも表現される．

既に述べたように，ニュートリノは Weyl 方程式に従うと考えられる．それではニュートリノのヘリシティの符号は正負いずれであろうか，あるいは，ニュートリノは左巻きであろうか右巻きであろうか？　ニュートリノのヘリシティは，1958年に Goldhaber, Grozins および Sunyar によって測定された．彼らの用いた過程は，ベーター崩壊と本質的に同じ相互作用によって生ずるK捕獲という素過程であり，

$$e^-+p\to n+\nu \tag{7.26}$$

によって表わされる．実際には p も n も原子核の中の核子であり，

$$\begin{array}{ll} e^-+A\to B^*+\nu, & B^*\to B+\gamma \\ J=0\quad J=1 & J=1\quad J=0 \end{array} \tag{7.27}$$

の形の二段階の過程を利用する．Aはスピン0の原子核であり，K殻にある電

子を(7.26)により吸収し，スピン1のB^*という励起状態の原子核になると共にニュートリノを放出する．ついでB^*はγ線を出して基底状態Bに移る．Bは再びスピン0である．こういう原子核が存在すれば，ニュートリノのヘリシティは次のようにして決定される．

まずγのエネルギーが最大となるのは，ニュートリノνがγと逆方向に放出された時であることは容易に分かる．そこでこの時の角運動量の保存則を調べてみよう．νの出る方向をz軸に選び，J_zのバランスを考える．

もしνが左巻きならば，νのスピンはz軸に反平行で$-1/2$に等しいから

$$\begin{array}{lccccccc} & e^- + & A \to & B^* + & \nu \to & \gamma + & B & + \nu \\ J_z: & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ J_z: & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ & & & & & \text{禁止} & & \end{array}$$

上の保存則では，e^-のスピンのz成分が$-1/2$の時には，$-z$方向へ放出される光子のスピンのz成分が± 1になれないので禁止となる．このことについては後に触れるが，これは質量0の粒子の特徴である．従って許されるのは，光が$-z$方向に出て，$J_z=1$の時，すなわち左巻きの光子が放出される時のみである．すなわち，νが左巻きであれば最大エネルギーで放出される光子も左巻きとなる．勿論νが右巻きであれば，光子も右巻きとなる．

実際の実験で用いられた原子核は，

$$A = {}_{63}Eu^{152}(0^-), \qquad B = {}_{62}Sm^{152}(0^+), \qquad B^* = {}_{62}Sm^{152}(1^-) \tag{7.28}$$

ここに括弧の中の数字はスピン，右肩の符号はパリティを表わしている．また実験結果は，νが**左巻き**であることを示している．

§8 Dirac 場の量子化

Dirac 場を量子化するためには，Dirac 方程式を導くための出発点となるラグランジアン密度が必要であり，次の形を採用する：

$$\mathcal{L} = -\overline{\psi}\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi \tag{8.1}$$

これから変分原理に基づいて場の方程式を導き出す際には，ψと$\overline{\psi}$とを独立な量として変分を考えなければならない．その結果として出る方程式は

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}+m\right)\psi=0, \qquad -\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu+m\bar{\psi}=0 \tag{8.2}$$

また ψ_r の正準共役量 $\pi_r^\dagger$ は

$$\pi_r^\dagger=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_r}=i(\bar{\psi}\gamma_4)_r=i\psi_r^\dagger \tag{8.3}$$

以前に議論した確率保存則に関係した四次元的連続方程式は

$$\partial_\mu j_\mu=0 \qquad ただし\ \ j_\mu=i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \tag{8.4}$$

ここに j_μ がローレンツ変換に対して四次元ベクトルとして変換されることは，方程式 (6.4), (6.16), (6.12) を組み合わせることにより容易に示される．またフェルミ統計に従う Dirac 場の正準交換関係は，(1.9) 式の代りに次のような反交換関係を用いなければならないことが順を追って示される：

$$[\psi_r(x), \pi_s^\dagger(x')]_+=i\delta_{rs}\delta^3(x-x') \qquad ただし\ \ x_0=x_0' \tag{8.5}$$

ただし $[\ ,\ ]_+$ は反交換子と呼ばれ，$\{\ ,\ \}$ とも書かれ，次式で定義される：

$$[A,B]_+=\{A,B\}=AB+BA \tag{8.6}$$

それに対して交換子 $[\ ,\ ]$ は $[\ ,\ ]_-$ と書かれることもある．

従って同時刻反交換関係をまとめて書くと次のようになる．$x_0=x_0'$ に対し，

$$\begin{aligned}&[\psi_r(x), \psi_s^\dagger(x')]_+=\delta_{rs}\delta^3(x-x'),\\&[\psi_r(x), \psi_s(x')]_+=[\psi_r^\dagger(x), \psi_s^\dagger(x')]_+=0\end{aligned} \tag{8.7}$$

さてハミルトニアン密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{H}&=\sum_r \pi_r^\dagger\dot{\psi}_r-\mathcal{L}=i\bar{\psi}\gamma_4\dot{\psi}+\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi\\&=\psi^\dagger(\boldsymbol{\alpha p}+\beta m)\psi \qquad ただし\ \ \boldsymbol{p}=-i\boldsymbol{\nabla}\end{aligned} \tag{8.8}$$

となり，Dirac のハミルトニアンを ψ と $\psi^\dagger$ とで挾んだものが出てくる．さてハミルトニアン自身は次式で与えられる：

$$H=\int d^3x\,\mathcal{H}(x)=\int d^3x\,\psi^\dagger(x)\left(\frac{1}{i}\boldsymbol{\alpha\nabla}+\beta m\right)\psi(x) \tag{8.9}$$

ここまでで正準形式の適用が終る．量子化のためにフーリエ展開を導入する．

$$\begin{aligned}\psi_r(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{q}}\Big[&e^{i\boldsymbol{qx}-iE_qx_0}\sum_h u_r^{(+)}(\boldsymbol{q},h)a_+(\boldsymbol{q},h)\\&+e^{i\boldsymbol{qx}+iE_qx_0}\sum_h u_r^{(-)}(\boldsymbol{q},h)a_-(\boldsymbol{q},h)\Big]\end{aligned} \tag{8.10}$$

ここに $E_q=\sqrt{q^2+m^2}$，$q=|\boldsymbol{q}|$ であり，$u^{(+)}$ と $u^{(-)}$ とはそれぞれ正エネルギー解と負エネルギー解であり，従って次の方程式を満たす：

$$(\boldsymbol{\alpha q}+\beta m)u^{(\pm)}(\boldsymbol{q},h)=\pm E_q u^{(\pm)}(\boldsymbol{q},h) \tag{8.11}$$

上のフーリエ展開をハミルトニアン (8.9) に代入すると，

$$H=\sum_{\boldsymbol{q}} E_q\left[\sum_h a_+^\dagger(\boldsymbol{q},h)a_+(\boldsymbol{q},h)-\sum_h a_-^\dagger(\boldsymbol{q},h)a_-(\boldsymbol{q},h)\right] \tag{8.12}$$

また次の保存量（実は電荷に比例する量）も重要である：

$$N=\int d^3x j_0(x)=\sum_{\boldsymbol{q}}\sum_h [a_+^\dagger(\boldsymbol{q},h)a_+(\boldsymbol{q},h)+a_-^\dagger(\boldsymbol{q},h)a_-(\boldsymbol{q},h)] \tag{8.13}$$

次にフーリエ展開 (8.10) を (8.7) に代入すると，

$$\begin{aligned} &[a_+(\boldsymbol{q},h),\ a_+^\dagger(\boldsymbol{q}',h')]_+=\delta_{h,h'}\delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}'}, \\ &[a_-(\boldsymbol{q},h),\ a_-^\dagger(\boldsymbol{q}',h')]_+=\delta_{h,h'}\delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}'}, \\ &\text{他の反交換子}=0 \end{aligned} \tag{8.14}$$

(8.12) 式を見て分かることは，この系のエネルギーは正定値ではないことである．

この負エネルギーの困難は Dirac 理論の難点と考えられたが，Dirac は電子がフェルミ統計に従うことを利用して，真空とは負のエネルギー状態が完全に占められているものと仮定してこの困難を切り抜けた．しかしこの考えは，負エネルギー状態の無限個の電子の作り出す電磁場等を考えるといかにも不自然である．もっとすっきりとした解決は，場を量子化することにより与えられることになる．そのために次のトリックを用いる．

$$-\sum_h a_-^\dagger(\boldsymbol{q},h)a_-(\boldsymbol{q},h)=\sum_h a_-(\boldsymbol{q},h)a_-^\dagger(\boldsymbol{q},h)-2 \tag{8.15}$$

この定数2を（3.32）で定数を捨てたことにならって捨てることにすると，ハミルトニアンは次のように正定値になる：

$$H=\sum_{\boldsymbol{q}} E_q\left[\sum_h a_+^\dagger(\boldsymbol{q},h)a_+(\boldsymbol{q},h)+\sum_h a_-(\boldsymbol{q},h)a_-^\dagger(\boldsymbol{q},h)\right] \tag{8.16}$$

この際に捨てた項は負の無限大であるが，しかし定数である．

$$-2\sum_{\boldsymbol{q}} E_q \tag{8.17}$$

これはちょうど Dirac の空孔理論において，負エネルギー状態の電子の総エネルギーを無視することに相当する．そして空孔理論の解釈を演算子の再解釈によって再現しよう．$a_+^\dagger$ と a_+ とは，それぞれ正エネルギーの電子(Dirac 粒子)を創ったり消したりする演算子であり，$a_-^\dagger$ と a_- とは，それぞれ負エネルギーの電子を創ったり消したりする演算子である．ところが，負エネルギー電子を創ることは正エネルギー粒子を消すことと同値であり，またある加法的量子数の粒子を創ることは逆符号の量子数の粒子を消すことと同値である．そこで負

エネルギーの電子を創ることは，すべての加法的量子数の符号を変えた正エネルギーの粒子を消すことと同値であると考える．そして次の書換えをする：

$$a_+(\boldsymbol{q},h)\to a(\boldsymbol{q},h),\qquad a_+^\dagger(\boldsymbol{q},h)\to a^\dagger(\boldsymbol{q},h),$$
$$a_-(\boldsymbol{q},h)\to b^\dagger(-\boldsymbol{q},h),\qquad a_-^\dagger(\boldsymbol{q},h)\to b(-\boldsymbol{q},h) \tag{8.18}$$

ヘリシティは加法的量子数 $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{\sigma}$ との積なので符号が変わらないのである．

電子のすべての加法的量子数の符号を逆転した粒子は正の電荷を持つので陽電子と呼ばれる．そして次の演算子を定義する：

$$N_+(\boldsymbol{q},h)=a^\dagger(\boldsymbol{q},h)a(\boldsymbol{q},h),\qquad N_-(\boldsymbol{q},h)=b^\dagger(\boldsymbol{q},h)b(\boldsymbol{q},h) \tag{8.19}$$

しからば，H と N とはそれぞれ次のように書かれる：

$$H=\sum_{\boldsymbol{q}}\sum_h E_q(N_+(\boldsymbol{q},h)+N_-(\boldsymbol{q},h)) \tag{8.20}$$
$$N=\sum_{\boldsymbol{q}}\sum_h (N_+(\boldsymbol{q},h)-N_-(\boldsymbol{q},h)) \tag{8.21}$$

b と $b^\dagger$ とはそれぞれ陽電子の消滅演算子と生成演算子である．$N_\pm$ は粒子数演算子であるが，ボーズ統計の時とは異なりフェルミ統計に従うためにその固有値は 0 と 1 しかとれないことが反交換関係（8.14）から出る．$\boldsymbol{q}$ と h とを固定して

$$N^2=a^\dagger aa^\dagger a=a^\dagger(1-a^\dagger a)a=a^\dagger a-(a^\dagger)^2a^2=a^\dagger a=N$$

すなわち，反交換関係より

$$(N_\pm(\boldsymbol{q},h))^2=N_\pm(\boldsymbol{q},h) \tag{8.22}$$

が出てくるが，これは固有値が 0 と 1 しかないことを示し，一つの状態は一つの粒子しか占められないという Pauli の排他律を表わしている．従って，フェルミ統計に従う粒子の場は反交換関係により量子化しなければならない．

新しい演算子を用いると Dirac 場のフーリエ展開は

$$\psi_r(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{q}}\left[e^{iq\cdot x}\sum_h u_r(q,h)a(q,h)+e^{-iq\cdot x}\sum_h v_r(q,h)b^\dagger(q,h)\right] \tag{8.23}$$

ただし $q\cdot x=\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}-E_qx_0$ は 4 次元スカラー積であり，a や b の中の $\boldsymbol{q}$ は単に q と書くことにする．また

$$u_r(q,h)=u_r^{(+)}(\boldsymbol{q},h),\qquad v_r(q,h)=u_r^{(-)}(-\boldsymbol{q},h) \tag{8.24}$$

という書換えをしている．

Casimir 演算子

いろいろな実験をする時にスピン，あるいはヘリシティを測定せずに四元運動量のみを測定することが多い．このような時には，そのスピン状態について

は和をとらなければならない．このような場合には Casimir 演算子と呼ばれるものを用いると便利である．電子あるいは陽電子，あるいはもっと一般的に四元運動量 p の粒子状態や四元運動量 $\bar{p}$ の反粒子状態をそれぞれ $|p, h\rangle$，$|\bar{p}, h\rangle$ のように書くことにする．ここに h はヘリシティを指定する．この際フーリエ展開より

$$\langle 0|\psi(x)|p, h\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ip\cdot x} u(p, h), \tag{8.25 a}$$

$$\langle p, h|\overline{\psi}(x)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-ip\cdot x} \overline{u}(p, h) \tag{8.25 b}$$

が得られる．ただし $|0\rangle$ は真空状態を表わしている．反粒子状態に対しても

$$\langle 0|\overline{\psi}(x)|\bar{p}, h\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\bar{p}\cdot x} \overline{v}(\bar{p}, h), \tag{8.26 a}$$

$$\langle \bar{p}, h|\psi(x)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\bar{p}\cdot x} v(\bar{p}, h) \tag{8.26 b}$$

が得られる．(7.9)の解の直交性，およびその解の (7.17) による規格化より

$$\begin{aligned} &\sum_s \left(\sum_{h'} u_r^{(+)}(\boldsymbol{p}, h') u_s^{(+)*}(\boldsymbol{p}, h') \right) u_s^{(+)}(\boldsymbol{p}, h) = u_r^{(+)}(\boldsymbol{p}, h), \\ &\sum_s \left(\sum_{h'} u_r^{(+)}(\boldsymbol{p}, h') u_s^{(+)*}(\boldsymbol{p}, h') \right) u_s^{(-)}(\boldsymbol{p}, h) = 0 \end{aligned} \tag{8.27}$$

これから括弧の中の和は，正エネルギー解の時のみ生き残る射影演算子に等しいことが分かる．すなわち

$$\sum_{h'} u_r^{(+)}(\boldsymbol{p}, h') u_s^{(+)*}(\boldsymbol{p}, h') = \left(\frac{H(p) + E_p}{2E_p} \right)_{rs} = \left(\frac{\boldsymbol{\alpha p} + \beta m + E_p}{2E_p} \right)_{rs} \tag{8.28}$$

これを書き替えると

$$\sum_h u_r(p, h) \overline{u}_s(p, h) = \left(\frac{-ip\cdot\gamma + m}{2E_p} \right)_{rs} \tag{8.29}$$

同様に負エネルギー解に対して

$$\sum_{h'} u_r^{(-)}(-\boldsymbol{p}, h') u_s^{(-)*}(-\boldsymbol{p}, h') = \left(\frac{-\boldsymbol{\alpha p} + \beta m - E_p}{-2E_p} \right)_{rs} \tag{8.30}$$

すなわち

$$\sum_h v_r(\bar{p}, h) \overline{v}_s(\bar{p}, h) = \left(\frac{-i\bar{p}\cdot\gamma - m}{2E_{\bar{p}}} \right)_{rs} \tag{8.31}$$

このような射影演算子を Casimir 演算子と呼ぶ．この演算子を用いることによってDirac スピノールの具体的表現を使うことなしにすべての計算が行えることになる．

§9 荷電共役

複素スカラー場および Dirac 場の量子化に際して，粒子と反粒子という概念が出てきたが，その間の対称性が問題となる．相互作用が存在しない自由場ではこのような対称性は常に存在する．粒子と反粒子を入れ替えると，一般にその荷電の符号が変わるので，このような変換を荷電共役と呼ぶ．(4.11)式にならってこのような状態に対するユニタリー変換を$\mathscr{C}$で表わすことにする．Dirac 場に対しては $\mathscr{C}$ は ψ と $\overline{\psi}$ とを入れ替えることになる．すなわち，一般的に

$$\psi_r(x) \to \mathscr{C}^{-1}\psi_r(x)\mathscr{C} = C_{rs}\overline{\psi}_s(x) \tag{9.1}$$

ただし C は 4 行 4 列の行列であり，状態ベクトルに対する変換ではない．またスピノール添字 s については和をとるものとする．以下においてこの行列 C の性質を調べてみることにする．

まず粒子と反粒子とを入れ替えるという場合に，四元運動量とスピン，あるいはヘリシティは変えないものとする．しからばこの定義と (8.21) より

$$\mathscr{C}^{-1}N\mathscr{C} = -N \tag{9.2}$$

従ってその密度についても同様な式が成立する：

$$\mathscr{C}^{-1}j_\mu(x)\mathscr{C} = -j_\mu(x) \tag{9.3}$$

量子化された理論では，$j_\mu(x)$ の定義を次のようにした方が便利である：

$$j_\mu(x) = i\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) \to \frac{i}{2}[\overline{\psi}(x),\ \gamma_\mu\psi(x)] = \frac{i}{2}(\gamma_\mu)_{rs}[\overline{\psi}_r(x), \psi_s(x)] \tag{9.4}$$

このように定義し直したのは，$j_\mu(x)$ の真空期待値を 0 とするためである．

さて Dirac 方程式 (8.2) を次の形に書く：

$$(\gamma\cdot\partial + m)\psi = 0, \qquad (\gamma^T\cdot\partial - m)\overline{\psi} = 0 \tag{9.5}$$

ただし $\gamma_\mu{}^T$ は γ_μ の転置行列を表わすものとする．もし Dirac 方程式が荷電共役に対してその形を変えないものとすると，

$$(\gamma\cdot\partial + m)\mathscr{C}^{-1}\psi\mathscr{C} = (\gamma\cdot\partial + m)C\overline{\psi} = 0$$

すなわち

$$(C^{-1}\gamma_\mu C\cdot\partial_\mu + m)\overline{\psi} = 0 \tag{9.6}$$

この方程式が，(9.5) の第二式と同値になるための条件は

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu{}^T \tag{9.7}$$

ところで $-\gamma_\mu{}^T$ は，γ_μ と同様に (6.8) の交換関係を満たしている．詳細は省略するが，γ_μ に具体的な表現が与えられた時に γ_μ を $-\gamma_\mu{}^T$ で置き換えて得ら

れるものもやはりDirac行列の一つの表現であり，元の表現と同値である．このような時には，行列 C をユニタリーに選ぶことができる．また (9.7) から

$$C\gamma_\mu{}^T C^{-1} = -\gamma_\mu \tag{9.8}$$

さて (9.7) を転置した方程式は

$$C^T\gamma_\mu{}^T(C^T)^{-1} = -\gamma_\mu,$$
$$(C^T)^{-1}\gamma_\mu C^T = -\gamma_\mu{}^T \tag{9.9}$$

この後者の右辺を (9.8) の左辺に代入すると

$$(C^T C^{-1})\gamma_\mu (C^T C^{-1})^{-1} = \gamma_\mu \tag{9.10}$$

さて4行4列の行列はすべて4個の γ 行列の多項式として表わされる．上の式は，$C^T C^{-1}$ がすべての γ 行列と可換であり，従ってすべての4行4列の行列と可換であることを示している．このような行列は単位行列に比例しなければならないから

$$C^T C^{-1} = a\mathbf{1}. \tag{9.11}$$

この係数 a は表現の選び方によらないことが，次のように証明される．

S をユニタリー行列として γ の表現を次のように変える：

$$\gamma_\mu{}' = S\gamma_\mu S^{-1} \tag{9.12}$$

この時に新しい表現における行列 C' は，(9.7) を新しい表現で解くと，

$$C' = SCS^T \tag{9.13}$$

によって与えられる．従って

$$(C')^T(C')^{-1} = SC^T S^T (S^T)^{-1} C^{-1} S^{-1} = a\mathbf{1} = C^T C^{-1}$$

そこで係数 a はすべての同値な表現によって共有されていることになるので，一つの表現，例えばPauli表現で決めてやれば良い．この表現では

$$\gamma_\mu{}^T = \gamma_\mu \quad (\mu = 2, 4)\,; \qquad \gamma_\mu{}^T = -\gamma_\mu \quad (\mu = 1, 3) \tag{9.14}$$

であるから，$C = \gamma_2\gamma_4$ と選べば (9.7) 式が満たされている．この時に

$$C^T = (\gamma_2\gamma_4)^T = \gamma_4{}^T\gamma_2{}^T = \gamma_4\gamma_2 = -\gamma_2\gamma_4 = -C,$$
$$C^T C^{-1} = -1 \tag{9.15}$$

すなわち $a = -1$ であり，行列 C は反対称であることが分かった．

ところで $\overline{\psi}$ の荷電共役は ψ の荷電共役から導き出される．途中の計算は省略するが，(9.1)，(9.7)，および C のユニタリー性と γ_μ のエルミート性を用いると

$$\mathscr{C}^{-1}\overline{\psi}_r(x)\mathscr{C} = (C^{-1})_{rs}\psi_s(x). \tag{9.16}$$

双一次形式の荷電共役

γ 行列は4次元行列なので，その多項式で一次独立なものは16個ある．そこでその4次元行列の一つを O として次のような双一次形式を考える:

$$[\overline{\psi}(x),\ O\psi(x)]=O_{rs}[\overline{\psi}_r(x),\ \psi_s(x)] \tag{9.17}$$

この双一次形式のローレンツ変換に対する変換性によって，行列 O は次の五種類に分類される:

1 (スカラー)，　γ_μ(ベクトル)，　$\sigma_{\mu\nu}$(反対称テンソル)，

$\gamma_\mu\gamma_5$(軸性ベクトル)，　γ_5(擬スカラー)

またその数は，$1+4+6+4+1=16$ であり，これで一次独立なものは尽くされている．そこで (9.17) の形の双一次形式の荷電共役に対する変換性を調べてみよう．再び (9.1)，(9.16) を組み合わせると

$$\mathscr{C}^{-1}[\overline{\psi}(x), O\psi(x)]\mathscr{C}=[\overline{\psi}(x), O'\psi(x)] \tag{9.18}$$

ただし

$$O'=(C^{-1}OC)^T=CO^TC^{-1}\equiv\varepsilon O \tag{9.19}$$

(9.8) を用いていろいろな場合について ε を計算すると次の表のようになる．

表2　荷電共役に対する符号の表

O	1	γ_μ	$\sigma_{\mu\nu}$	$\gamma_\mu\gamma_5$	γ_5
ε	1	-1	-1	1	1

§10　複素ベクトル場の量子化

今までスピン0のスカラー場とスピン1/2のスピノール場の量子化を調べたので，今度はベクトル場の量子化を調べよう．実のベクトル場も複素ベクトル場も本質的に差異はないので後者について考えることにする．

複素ベクトル場を φ_μ と書くことにし，その複素共役場を $\varphi_\mu^\dagger$ と書く．量子化された演算子としてはお互いにエルミート共役になっている．ただし我々の使っている Pauli metric では，量子論に起因する i は共役演算 $\dagger$ で符号を変えるが，相対論に起因するものは符号を変えないと約束する．従って φ_j と $\varphi_j^\dagger$ とは，$j=1,2,3$ に対して複素共役であるが，

$$\varphi_4=i\varphi_0, \qquad \varphi_4^\dagger=i\varphi_0^\dagger \tag{10.1}$$

と書いた時に，φ_0 と $\varphi_0^\dagger$ とは複素共役であり，φ_4 と $\varphi_4^\dagger$ とは複素共役でない．

以上の注意を念頭において，以下では自由なベクトル場 φ_μ の満たすべき条件を述べる．

$$1)\qquad K\varphi_\mu \equiv (\Box - m^2)\varphi_\mu = 0 \tag{10.2}$$

$$2)\qquad \partial_\mu \varphi_\mu = 0 \tag{10.3}$$

第一の条件は，既に述べた Klein-Gordon の方程式であり，第二の条件は，既約性の条件と呼ばれ，もしこれが成り立たないと $\partial_\mu\varphi_\mu$ はスピン 0 の場を表わすことになり，φ_μ は全体としてスピン 1 と 0 との共存を許す場となる．

そこで上の二条件を満たすようなラグランジアン密度を求めてみよう．まずスカラー場の時の真似をして

$$\mathcal{L} = -[\partial_\nu \varphi_\mu^\dagger \cdot \partial_\nu \varphi_\mu + m^2 \varphi_\mu^\dagger \cdot \varphi_\mu]$$

と置くと都合の悪いことが出る．まず (10.2) 式は成立するが，(10.3) が成り立たない．しかもこのラグランジアン密度から導き出されるハミルトニアン密度は次に見るように正定値ではない．

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi_\mu^\dagger \pi_\mu + \nabla\varphi_\mu^\dagger \cdot \nabla\varphi_\mu + m^2 \varphi_\mu^\dagger \varphi_\mu \\ &= \sum_{j=1}^{3} (\pi_j^\dagger \pi_j + \nabla\varphi_j^\dagger \nabla\varphi_j + m^2 \varphi_j^\dagger \varphi_j) - (\pi_0^\dagger \pi_0 + \nabla\varphi_0^\dagger \cdot \nabla\varphi_0 + m^2 \varphi_0^\dagger \varphi_0)\end{aligned}$$

そこで電磁場の時の真似をして次の形を考えることにする：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_\nu^\dagger - \partial_\nu \varphi_\mu^\dagger)(\partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu) - m^2 \varphi_\mu^\dagger \varphi_\mu \tag{10.4}$$

そして場の強さ $F_{\mu\nu}$ を次式で定義する：

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu \tag{10.5}$$

変分原理に基づく Euler-Lagrange の方程式は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\nu^\dagger} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\nu:\mu}^\dagger}\right) = -m^2 \varphi_\nu + \partial_\mu F_{\mu\nu} = 0$$

すなわち

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = m^2 \varphi_\nu, \qquad \partial_\mu F_{\mu\nu}^\dagger = m^2 \varphi_\nu^\dagger \tag{10.6}$$

ただし以下では $m \neq 0$ を仮定する．$F_{\mu\nu}$ は反対称テンソルであるから

$$m^2 \partial_\nu \varphi_\nu = \partial_\nu \partial_\mu F_{\mu\nu} = 0$$

従って $m \neq 0$ という仮定から (10.3) が導き出される．また (10.6) の中でこの (10.3) を用いると

$$\partial_\mu (\partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu) = \Box \varphi_\nu = m^2 \varphi_\nu$$

となり，(10.2) の方程式も満たされていることが分かる．次に π を定義する．

$$\pi_\nu^\dagger=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_\nu}=\frac{1}{i}(\partial_\nu\varphi_4^\dagger-\partial_4\varphi_\nu^\dagger)=\frac{1}{i}F_{\nu4}^\dagger,$$
$$\pi_\nu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_\nu^\dagger}=\frac{1}{i}(\partial_\nu\varphi_4-\partial_4\varphi_\nu)=\frac{1}{i}F_{\nu4} \tag{10.7}$$

ここで我々は一つの形式的な困難に出合う．すなわち

$$\pi_4=\pi_4^\dagger=0 \tag{10.8}$$

第四成分に対しては正準共役量が定義できないことになる．しかしながら第四成分は他の3成分と独立ではないことに気が付けば，これは本質的な困難ではないことが分かる．すなわち運動方程式(10.6)と正準共役量の定義(10.7)より

$$\varphi_4=\frac{i}{m^2}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\pi},\qquad \varphi_4^\dagger=\frac{i}{m^2}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\pi}^\dagger \tag{10.9}$$

となり，第四成分は他の成分で表わされてしまう．また φ_j の時間微分は

$$\dot{\varphi}_j=\pi_j+i\frac{\partial\varphi_4}{\partial x_j},\qquad \dot{\varphi}_j^\dagger=\pi_j^\dagger+i\frac{\partial\varphi_4^\dagger}{\partial x_j} \tag{10.10}$$

のように3成分の π で表わされてしまう．従って独立なのは3成分のみとして

$$\mathcal{H}=\sum_{j=1}^{3}(\pi_j^\dagger\varphi_j+\pi_j\dot{\varphi}_j^\dagger)-\mathcal{L} \tag{10.11}$$

によりハミルトニアン密度が与えられる．しかしハミルトニアンを作るには

$$H=\int d^3x\mathcal{H}(x)=\int d^3x\mathcal{H}'(x) \tag{10.12}$$

を用いる．ただし $\mathcal{H}'$ は $\mathcal{H}$ に三次元発散項を加えて定義される．

$$\mathcal{H}'=\mathcal{H}-i\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\pi}^\dagger\varphi_4+\boldsymbol{\pi}\varphi_4^\dagger) \tag{10.13}$$

このような $\mathcal{H}'$ を導入することの御利益は，ハミトルニアンが正定値であることが明白になることにある．すなわち

$$\mathcal{H}'=\boldsymbol{\pi}^\dagger\boldsymbol{\pi}+\frac{1}{m^2}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\pi}^\dagger)(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\pi})+m^2\boldsymbol{\varphi}^\dagger\boldsymbol{\varphi}+(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\varphi}^\dagger)(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\varphi}) \tag{10.14}$$

正準量子化と正準方程式

(10.4) のラグランジアン密度に基づいて同時刻交換関係を導入する．

$$[\pi_j^\dagger(x),\varphi_k(x')]=[\pi_j(x),\varphi_k^\dagger(x')]=-i\delta_{jk}\delta^3(x-x')\qquad \text{ただし}\ x_0=x_0' \tag{10.15}$$

ただし他の交換子はすべて0に等しいとおく．そして正準方程式を導く．

$$\dot{\varphi}_j(x)=i\int d^3x'[\mathcal{H}'(x'),\varphi_j(x)]$$

$$= \int d^3x' \left[\pi_j(x')\delta^3(x-x') + \frac{1}{m^2} \mathrm{div}\, \boldsymbol{\pi}(x') \frac{\partial}{\partial x'_j} \delta^3(x-x') \right]$$

すなわち

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(x) = \boldsymbol{\pi}(x) - \frac{1}{m^2} \mathrm{grad}(\mathrm{div}\, \boldsymbol{\pi}) \qquad (10.16)$$

同様に

$$\dot{\boldsymbol{\pi}}(x) = -m^2 \boldsymbol{\varphi}(x) - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{\varphi}(x) \qquad (10.17)$$

上の二式を組み合わせ，(10.9) 式を用いると，φ_μ に対する (10.2) 式が導き出される．また (10.9) 式の時間微分をとり，(10.7) 式と組み合わせると，(10.3) 式が導き出される．従って正準方程式 (10.16)，(10.17) は元の方程式と同値である．

また次の同時刻交換関係は重要である：

$$[\dot{\varphi}_j(x), \varphi_k^\dagger(x')] = \left[\pi_j(x) - \frac{1}{m^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{div}\, \boldsymbol{\pi}(x), \varphi_k^\dagger(x') \right]$$

$$= -i \left(\delta_{jk} - \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \right) \delta^3(x-x'). \qquad (10.18)$$

フーリエ展開

今までやったのと同様にベクトル場に対してもフーリエ展開を導入する．

$$\varphi_j(x) = \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{2p_0 V}} (e^{ip\cdot x} a_j(\boldsymbol{p}) + e^{-ip\cdot x} b_j^\dagger(\boldsymbol{p})),$$

$$\varphi_j^\dagger(x) = \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{2p_0 V}} (e^{ip\cdot x} b_j(\boldsymbol{p}) + e^{-ip\cdot x} a_j^\dagger(\boldsymbol{p})) \qquad (j=1,2,3) \qquad (10.19)$$

φ_4, $\varphi_4^\dagger$については，他の3成分を用いて表わせるので上の a_j と b_j とを用いてフーリエ展開を書き下すことができるが，ここでは省略する．以前に用いた方法により，係数の間の交換関係を求めることができる．結果のみを記すと

$$[a_j(\boldsymbol{p}), a_k^\dagger(\boldsymbol{q})] = [b_j(\boldsymbol{p}), b_k^\dagger(\boldsymbol{q})] = \delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} \left(\delta_{jk} + \frac{p_j p_k}{m^2} \right) \qquad (10.20)$$

そして他の交換子はすべて0となる．そこで第四成分を含めて書き直す．

$$\varphi_\mu(x) = \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{2p_0 V}} (e^{ip\cdot x} a_\mu(\boldsymbol{p}) + e^{-ip\cdot x} b_\mu^\dagger(\boldsymbol{p})),$$

$$\varphi_\mu^\dagger(x) = \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{2p_0 V}} (e^{ip\cdot x} b_\mu(\boldsymbol{p}) + e^{-ip\cdot x} a_\mu^\dagger(\boldsymbol{p})) \qquad (10.21)$$

既約性の条件 (10.3) を用いると

$$p_\mu a_\mu(\boldsymbol{p})=p_\mu a_\mu^\dagger(\boldsymbol{p})=p_\mu b_\mu(\boldsymbol{p})=p_\mu b_\mu^\dagger(\boldsymbol{p})=0 \tag{10.22}$$

これから a と b との第0成分は，他の3成分で表現されることになる．

$$a_0(\boldsymbol{p})=\frac{p_j}{p_0}a_j(\boldsymbol{p}),\qquad \text{および同様な式} \tag{10.23}$$

(10.20) 式と上式とを組み合わせて

$$[a_\mu(\boldsymbol{p}),a_\nu^\dagger(\boldsymbol{q})]=[b_\mu(\boldsymbol{p}),b_\nu^\dagger(\boldsymbol{q})]=\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}\left(\delta_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right) \tag{10.24}$$

そして他の交換子は再びすべて0となる．

そこでお互いに直交する3個の単位ベクトルを次のように選ぶ：

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{p}/p,\qquad \boldsymbol{e}_2,\qquad \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2 \tag{10.25}$$

そして $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{p})$ を次のように展開する：

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{e}_1a^{(1)}(\boldsymbol{p})+\boldsymbol{e}_2a^{(2)}(\boldsymbol{p})+\boldsymbol{e}_3a^{(3)}(\boldsymbol{p}) \tag{10.26}$$

すると，この新しい座標系では

$$\begin{aligned}&[a^{(1)}(\boldsymbol{p}),a^{(1)\dagger}(\boldsymbol{p})]=1+\frac{p^2}{m^2}=\frac{p_0{}^2}{m^2}\\&[a^{(2)}(\boldsymbol{p}),a^{(2)\dagger}(\boldsymbol{p})]=[a^{(3)}(\boldsymbol{p}),a^{(3)\dagger}(\boldsymbol{p})]=1\end{aligned} \tag{10.27}$$

$a^{(1)}$ は縦成分，$a^{(2)}$，$a^{(3)}$ は横成分に対応している．そこで (10.26) の代りに，次のように $a^{(j)}(\boldsymbol{p})$ の定義を変更することにする．

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{e}_1\left(\frac{p_0}{m}\right)a^{(1)}(\boldsymbol{p})+\boldsymbol{e}_2a^{(2)}(\boldsymbol{p})+\boldsymbol{e}_3a^{(3)}(\boldsymbol{p}) \tag{10.28}$$

しからば，この新しい演算子は次の簡単な交換関係をみたす．

$$[a^{(j)}(\boldsymbol{p}),a^{(k)}(\boldsymbol{p})]=\delta_{jk} \tag{10.29}$$

更にこの新しい演算子を用いると，場のエネルギーと運動量とは

$$H=\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_j p_0(n_+^{(j)}(\boldsymbol{p})+n_-^{(i)}(\boldsymbol{p})), \tag{10.30}$$

$$P_k=\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_j p_k(n_+^{(j)}(\boldsymbol{p})+n_-^{(j)}(\boldsymbol{p})), \tag{10.31}$$

$$n_+^{(j)}(\boldsymbol{p})=a^{(j)\dagger}(\boldsymbol{p})a^{(j)}(\boldsymbol{p}),\quad n_-^{(j)}(\boldsymbol{p})=b^{(j)\dagger}(\boldsymbol{p})b^{(j)}(\boldsymbol{p}) \tag{10.32}$$

ただし運動量 $\boldsymbol{P}$は，(2.3) 式で α をベクトル場の3成分と解釈することにより与えられるものとする．n_+ と n_- とは明らかに粒子数演算子であり，その固有値はボーズ統計に対応して，0, 1, 2, … なる負でない整数で与えられる．

また $\varphi_\mu(x)$ と $\varphi_\mu^\dagger(x)$ とは荷電共役演算により，(4.11) と同様な関係によって結ばれている．

この章においては，スピン 0，1/2，1 の場を量子力学的演算子と見なして正準交換関係を用いて量子化した．場は運動方程式としていわゆる波動方程式を満たし，古典的には波動と考えられるが，量子化の結果として，そのエネルギーと運動量の固有値は，与えられた質量の粒子の集団のものと一致し，従って粒子的測面をも持っていることが分かる．直観的に言うと，自由な運動状態で波動方程式により記述される波動的側面を強く出し，相互作用によってその運動状態を変えた時にその四元運動量の変化の様式が粒子性を呈する．

量子力学における粒子性と波動性との二重性は，場を量子化してはじめて理解できることになるのである．

第3章　不変関数と自由場の量子化

前章においては正準量子化の手続きに従って自由場を量子化した．この際に一つの時間軸を固定して量子化を行ったが，この結果は時間軸の方向の選び方に依存しないのであろうか？　この問題に答えるためには同時刻でない時の交換関係を調べる必要がある．そしてそのために数種類のローレンツ不変なグリーン関数を導入し，一般の自由場の量子化を時間方向を固定しないで行えることを示す．

§1　実スカラー場に対する非同時刻交換関係

既に求めた実スカラー場に対するフーリエ展開を用いると，同時刻でない二つの場の間の交換関係を導き出すことが出来る．(2.3.17)，(2.3.18)，(2.3.19) を用いて

$$[\varphi(x),\ \varphi(y)]=\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_{\boldsymbol{q}}\frac{1}{\sqrt{2p_0V}\sqrt{2q_0V}}(e^{ip\cdot x-iq\cdot y}[a(\boldsymbol{p}),a^{+}(\boldsymbol{q})] +e^{-ip\cdot x+iq\cdot y}[a^{+}(\boldsymbol{p}),a(\boldsymbol{q})])$$

$$=\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{2p_0V}(e^{ip\cdot(x-y)}-e^{-ip\cdot(x-y)}) \tag{1.1}$$

一定の体積 V の立方体の中でとりうる運動量は週期性の条件により量子化されていることは (2.3.4) 式から明らかであるが，V，あるいは L が大きい時には運動量に関する和は積分で置き換えられる．

$$\sum_{\boldsymbol{p}}\to\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3p \tag{1.2}$$

(1.1) においてこの置換えをするとその右辺は

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2p_0}(e^{ip\cdot(x-y)}-e^{-ip\cdot(x-y)})\equiv i\varDelta(x-y) \tag{1.3}$$

に等しくなる．この関数は Pauli と Jordan によって導入されたものであるが，元の定義とは符号が異なっている．すなわち

$$\Delta(x)=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2p_0}(e^{ip\cdot x}-e^{-ip\cdot x}) \tag{1.4}$$

以下においてこの関数の性質を列記してみよう．

(1)　$\Delta(x)$ はローレンツ不変な関数である．すなわち本義ローレンツ変換

$$x_\mu\to x'_\mu=\sum_\nu a_{\mu\nu}x_\nu$$

に対して次の等式が成り立つ．

$$\Delta(x')=\Delta(x) \tag{1.5}$$

(証明)　$\delta(p^2+m^2)$ は明らかにローレンツ不変であり，公式

$$\delta(ab)=|b|^{-1}\delta(a)+|a|^{-1}\delta(b)$$

を用いると

$$\delta(p^2+m^2)=\frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}}(\delta(p_0-\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2})+\delta(p_0+\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2})) \tag{1.6}$$

ところで第一項が生き残るのは $p_0\geqq m$ の領域であり，第二項が生き残るのは $p_0\leqq -m$ の領域である．この二領域は本義ローレンツ変換で混ざることはないので，それぞれの項は本義ローレンツ変換に対して不変である．

そこで次の不連続関数を導入する：

$$\theta(p_0)=\begin{cases}1 & p_0>0 \text{ に対して}\\ 0 & p_0<0 \text{ に対して}\end{cases} \tag{1.7}$$

$$\varepsilon(p_0)=\theta(p_0)-\theta(-p_0)=p_0/|p_0| \tag{1.8}$$

しからば上述の注意により，$\theta(p_0)\delta(p^2+m^2)$ も $\varepsilon(p_0)\delta(p^2+m^2)$ もローレンツ不変である．従って次の関数はローレンツ不変である：

$$\int d^4p\varepsilon(p_0)\delta(p^2+m^2)e^{ip\cdot x}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dp_0d^3p}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}}[\delta(p_0-\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2})-\delta(p_0+\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2})]e^{ipx-ip_0x_0}$$

この式を p_0 につき積分し，第二項で $\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$ という積分変数の変換を行うと

$$=\int\frac{d^3p}{2p_0}(e^{ip\cdot x}-e^{-ip\cdot x})$$

ただしこの式の中では p_0 は $\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$ を表わしており正定値である．この式は係数を除いて (1.4) 式と一致する．従って $\Delta(x)$ はローレンツ不変である．

(2)　$\Delta(x)$ は奇関数である．すなわち

$$\Delta(-x)=-\Delta(x) \tag{1.9}$$

(3)　x が空間的ベクトルであれば，すなわち $\boldsymbol{x}^2 > x_0{}^2$ であれば

$$\varDelta(x)=0. \tag{1.10}$$

(証明)　x が空間的ベクトルであれば，$x_0'=0$ なる座標系が存在する．ところが $x'=(\boldsymbol{x}',0)$ という四元ベクトルは空間回転により $(-\boldsymbol{x}',0)$ に移すことができる．この回転は勿論ローレンツ変換の一種である．従って (1), (2) において述べられた性質により

$$\varDelta(x)=\varDelta(x')=\varDelta(-x')=-\varDelta(x')=0.$$

この結果は，$\varphi(x)$ と $\varphi(y)$ は二点 x と y とが空間的に離れていれば可換であることを意味する． Einstein によればいかなる作用も光速度より速く伝わることはないから，空間的に離れた二点における観測はお互いに干渉することはない．量子力学によれば二つの物理量がお互いに干渉することなしに，あるいは邪魔し合うことなしに観測できるならば可換である．従ってこの結果は，上述の Einstein の因果律の量子力学的表現であり，局所的可換性，あるいは微視的因果律と呼ばれる．また $\varDelta(x)$ のローレンツ不変性は，一つの時間軸を固定した正準量子化の結果が，実は時間軸の選び方によらないことを意味する．実際

$$[\varphi(x),\varphi(y)]=i\varDelta(x-y) \tag{1.11}$$

という交換関係は時間軸の選び方を含んでいない．

(4)　$\varDelta(x)$ は Klein-Gordon の方程式を満たしている．

$$K_x\varDelta(x)=(\Box_x-m^2)\varDelta(x)=0. \tag{1.12}$$

(証明)

$$(\Box_x-m^2)[\varphi(x),\ \varphi(0)]=[(\Box_x-m^2)\varphi(x),\ \varphi(0)]=0$$

(5)　$x_0=0$ に対しては

$$\varDelta(x)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial x_0}\varDelta(x)=-\delta^3(x). \tag{1.13}$$

(証明)　第一式は，(3) の特殊な場合である．第二式は正準交換関係

$$[\dot{\varphi}(x),\varphi(0)]=-i\delta^3(x) \qquad ただし\ x_0=0$$

からも出せるし，また $\varDelta(x)$ のフーリエ表示から出すこともできる．

以上が Jordon-Pauli の不変 $\varDelta$ 関数の性質である．質量 m が 0 になる時には，$\varDelta(x)$ を $D(x)$ と書く．

§2　種々の不変関数

前節において交換関係から不変$\varDelta$関数を導入したが，これと密接な関連を持つ数種類のローレンツ不変な関数を導入しよう．

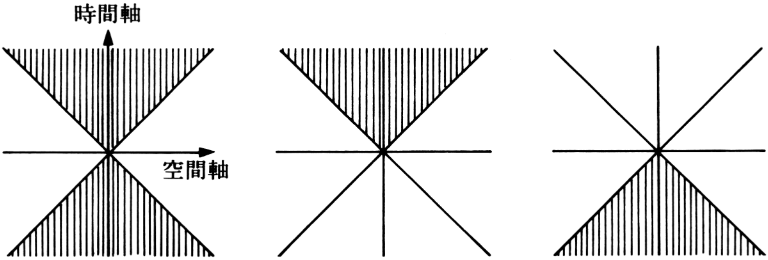
まず $\varDelta(x)$ は空間的な x に対して消えるから，生き残るのは未来および過去光円錐の内部のみである．そこで遅延 $\varDelta$ 関数 $\varDelta^R$，および先行 $\varDelta$ 関数 $\varDelta^A$ を次式で定義する：

$$\varDelta^R(x)=-\theta(x_0)\varDelta(x)=\begin{cases}-\varDelta(x) & (x_0>0\ \text{の時})\\ 0 & (x_0<0\ \text{の時})\end{cases} \tag{2.1}$$

$$\varDelta^A(x)=\theta(-x_0)\varDelta(x)=\begin{cases}0 & (x_0>0\ \text{の時})\\ \varDelta(x) & (x_0<0\ \text{の時})\end{cases} \tag{2.2}$$

これらの関数が0とならないのは第1図に示されている影の部分である．

第1図　$\varDelta$ 関数の生き残る領域



(a)　$\varDelta(x)$　　　(b)　$\varDelta^R(x)$　　　(c)　$\varDelta^A(x)$

しからば明らかに

$$\varDelta(x)=\varDelta^A(x)-\varDelta^R(x),\qquad \varDelta^A(x)=\varDelta^R(-x). \tag{2.3}$$

次に $\varDelta^A$ と $\varDelta^R$ との和をとると $\bar{\varDelta}$ という偶関数が定義される：

$$\bar{\varDelta}(x)=\frac{1}{2}(\varDelta^A(x)+\varDelta^R(x))=-\frac{1}{2}\varepsilon(x_0)\varDelta(x) \tag{2.4}$$

以上の関数は $\varDelta(x)$ を時空の適当な領域に分解して得られたものであるが，これを運動量空間で分解することもできる．

$$\varDelta(x)=\varDelta^{(+)}(x)+\varDelta^{(-)}(x), \tag{2.5}$$

$$i\varDelta^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2p_0}e^{ip\cdot x}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4p\theta(p_0)\delta(p^2+m^2)e^{ip\cdot x}, \tag{2.6}$$

$$-i\varDelta^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2p_0}e^{-ip\cdot x}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4p\theta(-p_0)\delta(p^2+m^2)e^{ip\cdot x} \tag{2.7}$$

しからば

$$\Delta^{(+)}(-x)=-\Delta^{(-)}(x), \qquad \Delta^{(-)}(-x)=-\Delta^{(+)}(x). \tag{2.8}$$

次に $\Delta^{(1)}$ という偶関数を導入する：

$$\Delta^{(1)}(x)=i(\Delta^{(+)}(x)-\Delta^{(-)}(x))=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\delta(p^2+m^2)e^{ip\cdot x} \tag{2.9}$$

これから次の式が得られる：

$$\Delta^{(+)}(x)=\frac{1}{2}(\Delta(x)-i\Delta^{(1)}(x)), \qquad \Delta^{(-)}(x)=\frac{1}{2}(\Delta(x)+i\Delta^{(1)}(x)) \tag{2.10}$$

しからば $\Delta(x)$, $\Delta^{(1)}(x)$, 従って $\Delta^{(+)}$, $\Delta^{(-)}$ も Klein-Gordon の方程式を満たす．ところで次式が成立する：

$$K_x\Delta^R(x)=K_x\Delta^A(x)=K_x\bar{\Delta}(x)=-\delta^4(x) \tag{2.11}$$

これらの式を証明するには

$$\Delta^R(x)=\bar{\Delta}(x)-\frac{1}{2}\Delta(x), \qquad \Delta^A(x)=\bar{\Delta}(x)+\frac{1}{2}\Delta(x) \tag{2.12}$$

により，(2.11) の最後の式を証明すれば良い．そのために $\bar{\Delta}(x)$ のフーリエ表示を求める．まず P を Cauchy の主値とすると，

$$\varepsilon(x_0)=\frac{x_0}{|x_0|}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{d\tau}{\tau}\sin(\tau x_0)=\frac{1}{i\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^\infty\frac{d\tau}{\tau}e^{i\tau x_0} \tag{2.13}$$

従って

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}(x)&=\frac{i}{2\pi}\mathrm{P}\int\frac{d\tau}{\tau}e^{i\tau x_0}\cdot\frac{(-i)}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\varepsilon(k_0)\delta(k^2+m^2)e^{ik\cdot x}\\&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,e^{ip\cdot x}\mathrm{P}\int\frac{d\tau}{\tau}\delta[\boldsymbol{p}^2-(p_0+\tau)^2+m^2]\frac{p_0+\tau}{|p_0+\tau|}\\&=\frac{1}{(2\pi)^4}\mathrm{P}\int\frac{d^4p}{p^2+m^2}e^{ip\cdot x}\end{aligned} \tag{2.14}$$

ただし $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{k}$, $p_0=k_0-\tau$ と置いている．従って

$$K_x\bar{\Delta}(x)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,e^{ip\cdot x}=-\delta^4(x) \tag{2.15}$$

これで (2.11) が証明されたことになる．

最後に Feynman の Δ_F 関数，あるいは Stueckelberg の因果関数を導入する．この関数は次式で定義される：

$$\begin{aligned}\Delta_F(x)&=\frac{1}{2}\Delta^{(1)}(x)-i\bar{\Delta}(x)\\&=i\theta(x_0)\Delta^{(+)}(x)+i\theta(-x_0)\Delta^{(+)}(-x)\end{aligned}$$

$$=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4p e^{ip\cdot x}\left(\frac{P}{p^2+m^2}+i\pi\delta(p^2+m^2)\right)$$

$$=\frac{-i}{(2\pi)^4}\lim_{\varepsilon\to+0}\int d^4p e^{ip\cdot x}\frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon} \tag{2.16}$$

以下では lim は省略して書かないことにする.

明らかにこの関数は次の方程式を満たす:

$$K_x\varDelta_F(x)=i\delta^4(x). \tag{2.17}$$

§3 自由場に対する非同時刻交換関係

今まで正準量子化と関連して同時刻交換関係について調べてきたが，不変関数を用いると直接非同時刻交換関係を求めることができる.

実スカラー場に対しては§1で述べたように

$$[\varphi(x),\varphi(y)]=i\varDelta(x-y) \tag{3.1}$$

となるが，同様に複素スカラー場に対しても

$$[\varphi(x),\varphi^\dagger(y)]=[\varphi^\dagger(x),\varphi(y)]=i\varDelta(x-y), \tag{3.2}$$

$$[\varphi(x),\varphi(y)]=[\varphi^\dagger(x),\varphi^\dagger(y)]=0 \tag{3.3}$$

次にスピノール場に対して非同時刻反交換関係を求める．そのためにこの問題を微分方程式の初期値問題として解いてみる．すなわち

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+m\right)\{\psi(x),\ \overline{\psi}(y)\}=0 \tag{3.4}$$

という微分方程式から出発する．初期条件として同時刻反交換関係を用いる.

$$\{\psi_r(x),\overline{\psi}_s(y)\}=(\gamma_4)_{rs}\delta^3(x-y) \qquad \text{ただし } x_0=y_0 \tag{3.5}$$

しからばこの方程式の解は一意的に次式で与えられる:

$$\{\psi_r(x),\ \overline{\psi}_s(y)\}=-i\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}-m\right)_{rs}\varDelta(x-y)=iS_{rs}(x-y) \tag{3.6}$$

実際この式で $x_0=y_0$ と置くと，右辺で生き残るのは

$$-i\gamma_4\frac{\partial}{\partial x_4}\varDelta(x-y)=\gamma_4\delta^3(x-y)$$

となり，(3.5) が再現される．従ってこの場合の反交換関係は

$$\begin{aligned}&\{\psi_r(x),\overline{\psi}_s(y)\}=iS_{rs}(x-y),\\&\{\psi_r(x),\psi_s(y)\}=\{\overline{\psi}_r(x),\overline{\psi}_s(y)\}=0.\end{aligned} \tag{3.7}$$

次に複素ベクトル場に移ろう．この時には交換子は次の二式を満たす:

$$K_x[\varphi_\mu(x),\varphi_\nu^\dagger(y)]=0, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}[\varphi_\mu(x), \varphi_\nu^\dagger(y)]=0 \tag{3.9}$$

まず空間成分についてのみ考え，時間成分については第二式を利用して調べることにする．初期条件は，同時刻交換関係によって与えられる．

$$[\varphi_j(x), \varphi_k^\dagger(y)]=0,\ \ [\dot{\varphi}_j(x), \varphi_k^\dagger(y)]=-i\left(\delta_{jk}-\frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\right)\delta^3(x-y) \tag{3.10}$$

ただし $x_0=y_0$ としてある．(3.8), (3.9), (3.10) を満たす解は

$$\begin{aligned}&[\varphi_\mu(x),\ \varphi_\nu^\dagger(y)]=i\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right)\Delta(x-y),\\&[\varphi_\mu(x),\ \varphi_\nu(y)]=[\varphi_\mu^\dagger(x),\ \varphi_\nu^\dagger(y)]=0.\end{aligned} \tag{3.11}$$

これらの結果は，正準量子化が一つの時間軸を固定して上記の微分方程式に初期条件を与えるが，最終的に与えられる交換子は特定な慣性系の選び方に依存しないことを示している．すなわち，正準量子化法は少なくとも自由場に関してはローレンツ不変な量子化を与えるものである．

第1章§3において，正準方程式と Euler-Lagrange の方程式とは正準交換関係が成り立つ限り一致することを示した．そこで逆に正準方程式と Euler-Lagrange の方程式が一致すべしという要請を置いたならば交換関係を規制することになるであろうか？　更に正準量子化のように時間軸を特定することなしに交換関係を導き出せないであろうか？　このような考えに基づいて自由場の量子化を実行してみよう．

§4　自由場の量子化の一般論

前節で述べたように，正準方程式と Euler-Lagrange の方程式とが一致すべしという要請から出発して自由場の交換関係を求めてみよう．この際重要な仮定は，場の方程式の結果としてすべての自由場は Klein-Gordon の方程式を満たさなければならないということである．

まずラグランジアン密度を次の形に置く：

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}[\varphi_\alpha, \varphi_\alpha^\dagger, \varphi_{\alpha:\mu}, \varphi_{\alpha:\mu}^\dagger] \tag{4.1}$$

ただし φ_α は複素場であるとする．実場の時の必要な変更についてはその度に注意することにしよう．自由場に対しては，$\mathcal{L}$ は $\varphi, \varphi^\dagger$ およびその微分について双一次形式である．Euler-Lagrange の方程式は従って次の形に書ける：

$$[\mathcal{L}]_{\varphi_\alpha^\dagger}=D_{\alpha\beta}(\partial)\varphi_\beta=0 \tag{4.2}$$

ただし D は微分演算子を含む行列である．例えば，複素スカラー場に対しては

$$[\mathscr{L}]_{\varphi^\dagger}=K\varphi=(\Box-m^2)\varphi=0 \tag{4.3}$$

であるから，この時には1次元行列 D は次式で与えられる：

$$D(\partial)=K=\Box-m^2. \tag{4.4}$$

上述の自由場に対するラグランジアン密度に対して c 数の外場を摂動として付け加え，かつ正準方程式と Euler-Lagrange の方程式の同等性を仮定する．

$$\mathscr{L}(x)\rightarrow\mathscr{L}(x)-Q(x)\varphi_\alpha^\dagger(x)\varphi_\alpha(x) \tag{4.5}$$

ただし $Q(x)$ は c 数であり，α については和をとるものとする．変分原理より

$$D_{\alpha\beta}(\partial)\varphi_\beta-Q\varphi_\alpha=0 \tag{4.6}$$

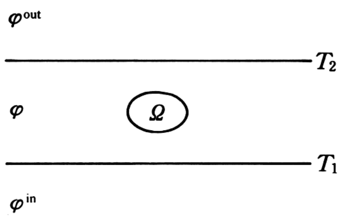
もしも φ が実場ならば，上式の Q は $2Q$ で置き換えることになる．我々は後にこの注意を思い出すことになるであろう．

次に，Q はある有限の時空領域 Ω においてのみ0でないと仮定する．そして

$$Q=0 \qquad (t>T_2 \text{ あるいは } t<T_1 \text{ の時}) \tag{4.7}$$

とする．また T_1 以前の φ_α を $\varphi_\alpha^{\mathrm{in}}$, T_2 以後の φ_α を $\varphi_\alpha^{\mathrm{out}}$ と書くことにする．これらの前後関係は第2図に示される．

第2図 T_1, T_2, Ω の関係



しからば T_1 以前と T_2 以後には外場が無いから

$$D_{\alpha\beta}(\partial)\varphi_\beta^{\mathrm{in}}=0 \qquad (t<T_1 \text{ に対して}) \tag{4.8}$$

$$D_{\alpha\beta}(\partial)\varphi_\beta^{\mathrm{out}}=0 \qquad (t>T_2 \text{ に対して}) \tag{4.9}$$

これらの方程式を時空全領域で成り立つものとすれば，$\varphi_\alpha^{\mathrm{in}}$ と $\varphi_\alpha^{\mathrm{out}}$ とを全時空に接続して定義することが出来る．もしも Q が全時空で0であるとすれば，当然

$$\varphi_\alpha=\varphi_\alpha^{\mathrm{in}}=\varphi_\alpha^{\mathrm{out}}.$$

そこで Q が0でない時に次のように置いてみよう．

$$\varphi_\alpha=\varphi_\alpha^{\text{in}}+\varphi'_\alpha \tag{4.10}$$

しからば，$t<T_1$ に対しては明らかに $\varphi'_\alpha=0$ となる．D を上式に乗ずると

$$D_{\alpha\beta}(\partial)\varphi_\beta=D_{\alpha\beta}(\partial)\varphi_\beta^{\text{in}}+D_{\alpha\beta}(\partial)\varphi'_\beta=Q\varphi_\alpha$$

従って (4.8) 式により

$$D_{\alpha\beta}(\partial)\varphi'_\beta=Q\varphi_\alpha \tag{4.11}$$

φ' は $t<T_1$ では0となるという境界条件があるから，上式は遅延 Δ 関数を用いて積分することができる．すなわち Δ^R を

$$D_{\alpha\beta}(\partial)\,\Delta^R_{\beta\gamma}(x)=-\delta_{\alpha\gamma}\delta^4(x)\,;\qquad \Delta^R_{\alpha\beta}(x)=0\quad (x_0<0\ \text{の時}) \tag{4.12}$$

で定義すると，φ'_α は次の形に書ける：

$$\varphi'_\alpha(x)=-\int_\Omega d^4x'\,\Delta^R_{\alpha\beta}(x-x')Q(x')\varphi_\beta(x') \tag{4.13}$$

しからば Δ^R と Ω の性質から，φ'_α は $x_0<T_1$ に対して消えることが分かる．

再び φ に対して上式を書き直すと次の積分方程式が得られる：

$$\varphi_\alpha(x)=\varphi_\alpha^{\text{in}}(x)-\int_\Omega d^4x'\,\Delta^R_{\alpha\beta}(x-x')Q(x')\varphi_\beta(x') \tag{4.14}$$

また $\varphi_\alpha^{\text{out}}$ を用い，(4.12) の境界条件を変えて定義した Δ^A を用いると

$$\varphi_\alpha(x)=\varphi_\alpha^{\text{out}}(x)-\int_\Omega d^4x'\,\Delta^A_{\alpha\beta}(x-x')Q(x')\varphi_\beta(x'). \tag{4.15}$$

以上は Euler-Lagrange の方程式に基づいた結果である．

次に正準方程式に関する議論に移る．まずハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H}=\sum_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi_\alpha}\dot\varphi_\alpha+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi_\alpha^\dagger}\dot\varphi_\alpha^\dagger\right)-\mathcal{L} \tag{4.16}$$

Q を導入するとその変化は，(4.5) 式に対応して

$$\mathcal{H}(x)\to\mathcal{H}(x)+Q(x)\varphi_\alpha^\dagger(x)\varphi_\alpha(x)\equiv\mathcal{H}(x)+\mathcal{H}'(x) \tag{4.17}$$

これに対応してこの系のハミルトニアンは

$$H=\int_{x_0=t}d^3x[\mathcal{H}(x)+\mathcal{H}'(x)]\equiv H_0+H' \tag{4.18}$$

Q が存在すれば，H は t に依存することになる．この時に物理量 F は，正準変数および外場を通して t に依存するので

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial(t)}+i[H(t),\,F] \tag{4.19}$$

ただし右辺第一項は外場を通しての陽な t 依存性に関する微分である．

特に場に対しては

$$\frac{\partial\varphi_\alpha(x)}{\partial x_0}=i[H(x_0),\varphi_\alpha(x)]. \tag{4.20}$$

さて $x_0<T_1$ に対しては $Q=0$ であるから，これを全時空に接続して

$$\frac{\partial\varphi_\alpha^{\text{in}}(x)}{\partial x_0}=i[H_0[\varphi_\alpha^{\text{in}}(x),\cdots],\varphi_\alpha^{\text{in}}(x)] \tag{4.21}$$

ただし $H_0[\cdots]$ は $\varphi_\alpha^{\text{in}}(x)$ の汎関数を表わしている．Q が存在する時の φ_α を次の形に置く．これは後に述べる超多時間理論形式の真似である．

$$\varphi_\alpha(x)=U(x_0)^{-1}\varphi_\alpha^{\text{in}}(x)U(x_0) \tag{4.22}$$

このような形に置くことの理由は，φ_α も $\varphi_\alpha^{\text{in}}$ も同じ形の同時刻交換関係を満たすということにある．$x_0<T_1$ では，φ_α は $\varphi_\alpha^{\text{in}}$ に等しくなるから，

$$U=1 \qquad (x_0<T_1 \text{ に対して}) \tag{4.23}$$

そこで (4.22) を (4.20) に代入すると，右辺は

$$\begin{aligned}&iU(x_0)^{-1}[H_0[\varphi_\alpha^{\text{in}}(x),\cdots],\varphi_\alpha^{\text{in}}(x)]U(x_0)\\&\quad+iU(x_0)^{-1}[H'[\varphi_\alpha^{\text{in}}(x),\cdots],\varphi_\alpha^{\text{in}}(x)]U(x_0)\\&=U(x_0)^{-1}\frac{\partial\varphi_\alpha^{\text{in}}(x)}{\partial x_0}U(x_0)+iU(x_0)^{-1}[H'[\varphi_\alpha^{\text{in}}(x),\cdots],\varphi_\alpha^{\text{in}}(x)]U(x_0)\end{aligned} \tag{4.24}$$

それに対して左辺は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_0}[U(x_0)^{-1}\varphi_\alpha^{\text{in}}(x)U(x_0)]&=U(x_0)^{-1}\frac{\partial\varphi_\alpha^{\text{in}}(x)}{\partial x_0}U(x_0)+U(x_0)^{-1}\varphi_\alpha^{\text{in}}(x)\frac{\partial U(x_0)}{\partial x_0}\\&\quad-U(x_0)^{-1}\frac{\partial U(x_0)}{\partial x_0}U(x_0)^{-1}\varphi_\alpha^{\text{in}}(x)U(x_0)\end{aligned} \tag{4.25}$$

ただしこの式を導出する際に次の公式を用いている：

$$\frac{\partial}{\partial x_0}U(x_0)^{-1}=-U(x_0)^{-1}\frac{\partial U(x_0)}{\partial x_0}U(x_0)^{-1}$$

(4.24) と (4.25) とを等しいと置くと次の関係式を得る：

$$\left[iH'[\varphi_\alpha^{\text{in}}(x),\cdots]+\frac{\partial U(x_0)}{\partial x_0}U(x_0)^{-1},\varphi_\alpha^{\text{in}}(x)\right]=0 \tag{4.26}$$

この式は，交換子の第一因子を 0 に等しいと置けば満たされる．あるいは

$$i\frac{\partial U(x_0)}{\partial x_0}=H'[\varphi_\alpha^{\text{in}}(x),\cdots]U(x_0), \tag{4.27}$$

$$H'[\varphi_\alpha^{\text{in}}(x),\cdots]=\int d^3x\,Q(x)\varphi_\alpha^{+\text{in}}(x)\varphi_\alpha^{\text{in}}(x) \tag{4.28}$$

結局 $U(x_0)$ が (4.27) を満たすならば，$\varphi_\alpha(x)$ を (4.22) の形に書けることが分かった．そして $U(x_0)$ の満たすべき境界条件は (4.23) である．そこで (4.23)

を考慮に入れて (4.27) を積分すると

$$U(x_0)=1-i\int_{-\infty}^{x_0}d^4x'Q(x')\varphi_\beta^{\dagger\mathrm{in}}(x')\varphi_\beta^{\mathrm{in}}(x')U(x_0') \tag{4.29}$$

という積分方程式が得られる.

次に二つの積分方程式 (4.14) と (4.29) を比べよう．そこでまず Q が小さいとして，Q についての巾展開を考えて Q について一次の項まで残すことにする．しからばこの二つの積分方程式の解は

$$\varphi_\alpha(x)=\varphi_\alpha^{\mathrm{in}}(x)-\int_\Omega d^4x'\,\Delta_{\alpha\beta}^R(x-x')Q(x')\varphi_\beta^{\mathrm{in}}(x')+(Q\ \text{につき二次以上の項}), \tag{4.30}$$

$$U(x_0)=1-i\int_{-\infty}^{x_0}d^4x'Q(x')\varphi_\beta^{\dagger\mathrm{in}}(x')\varphi_\beta^{\mathrm{in}}(x')+(Q\ \text{につき二次以上の項}) \tag{4.31}$$

同じ近似で

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(x)&=U(x_0)^{-1}\varphi_\alpha^{\mathrm{in}}(x)U(x_0)\\&=\varphi_\alpha^{\mathrm{in}}(x)-i\int_{-\infty}^{\infty}d^4x'\theta(x_0-x_0')[\varphi_\alpha^{\mathrm{in}}(x),\varphi_\beta^{\dagger\mathrm{in}}(x')\varphi_\beta^{\mathrm{in}}(x')]Q(x')+\cdots\end{aligned} \tag{4.32}$$

(4.30) と (4.32) が一致することを要請すると

$$\theta(x_0-x_0')[\varphi_\alpha^{\mathrm{in}}(x),\varphi_\beta^{\dagger\mathrm{in}}(x')\varphi_\beta^{\mathrm{in}}(x')]=-i\Delta_{\alpha\beta}^R(x-x')\varphi_\beta^{\mathrm{in}}(x') \tag{4.33}$$

そこで $Q\to 0$ とすれば，$\varphi_\alpha^{\mathrm{in}}$ は φ_α になるから，自由場に対して

$$\theta(x_0-x_0')[\varphi_\alpha(x),\varphi_\beta^\dagger(x')\varphi_\beta(x')]=-i\Delta_{\alpha\beta}^R(x-x')\varphi_\beta(x') \tag{4.34}$$

同様にして次式を得る：

$$\theta(x_0'-x_0)[\varphi_\alpha(x),\varphi_\beta^\dagger(x')\varphi_\beta(x')]=i\Delta_{\alpha\beta}^A(x-x')\varphi_\beta(x') \tag{4.35}$$

そこで次の Δ 関数を導入する.

$$\Delta_{\alpha\beta}(x)=\Delta_{\alpha\beta}^A(x)-\Delta_{\alpha\beta}^R(x) \tag{4.36}$$

しからば (4.34) と (4.35) とを加えることにより次の交換関係を得る：

$$[\varphi_\alpha(x),\varphi_\beta^\dagger(x')\varphi_\beta(x')]=i\Delta_{\alpha\beta}(x-x')\varphi_\beta(x') \tag{4.37}$$

これがこの節で得られた最終的な結果である．以上複素場について考えたが，実の場に対しては既に与えた注意により 2 という因子が現れる.

$$[\varphi_\alpha(x),\varphi_\beta(x')\varphi_\beta(x')]=2i\Delta_{\alpha\beta}(x-x')\varphi_\beta(x') \tag{4.38}$$

上の二式から二つの場の間の交換子を求めなければならない．その結果は

複素場の場合

1)　ボーズ統計に従う解

$$\begin{aligned}&[\varphi_\alpha(x),\varphi_\beta(x')]=[\varphi_\alpha^\dagger(x),\varphi_\beta^\dagger(x')]=0,\\&[\varphi_\alpha(x),\varphi_\beta^\dagger(x')]=i\varDelta_{\alpha\beta}(x-x').\end{aligned}\tag{4.39}$$

2)　フェルミ統計に従う解

$$\begin{aligned}&\{\varphi_\alpha(x),\varphi_\beta(x')\}=\{\varphi_\alpha^\dagger(x),\varphi_\beta^\dagger(x)\}=0,\\&\{\varphi_\alpha(x),\varphi_\beta^\dagger(x')\}=i\varDelta_{\alpha\beta}(x-x').\end{aligned}\tag{4.40}$$

実の場ではボーズ統計を仮定すると(フェルミ統計では(4.5)は適当でない.)

$$[\varphi_\alpha(x),\varphi_\beta(x')]=i\varDelta_{\alpha\beta}(x-x').\tag{4.41}$$

ボーズ統計とフェルミ統計とのいずれを適用すべきかについては，Pauli によるスピンと統計の関係に関する定理がある．すなわち，理論のローレンツ不変性，微視的因果律および正定値計量を仮定するならば，整数スピンの粒子はボーズ統計に従い，半整数スピンの粒子はフェルミ統計に従う．正定値計量とは何かについては次章で論ずる．

本節の初めに，場の方程式の結果として，すなわち (4.2) から出発して，場は Klein-Gordon の方程式を満たすことが出せると仮定したが，このことは数学的には，次の関係を満たす微分演算子の行列 C が存在することを意味する:

$$D_{\alpha\beta}(\partial)C_{\beta\gamma}(\partial)=C_{\alpha\beta}(\partial)D_{\beta\gamma}(\partial)=\delta_{\alpha\gamma}(\Box-m^2)\tag{4.42}$$

しからば (4.12) および対応する $\varDelta^A$ の方程式の解は次式で与えられる:

$$\varDelta_{\alpha\beta}^R(x)=C_{\alpha\beta}(\partial)\varDelta^R(x),\qquad \varDelta_{\alpha\beta}^A(x)=C_{\alpha\beta}(\partial)\varDelta^A(x)\tag{4.43}$$

従って

$$\varDelta_{\alpha\beta}(x)=C_{\alpha\beta}(\partial)\varDelta(x)\tag{4.44}$$

この公式を用いると自由場の量子化は直ちに実行できる.

例 1　一成分の実スカラー場

この場合には明らかに

$$C(\partial)=1,\qquad [\varphi(x),\varphi(x')]=i\varDelta(x-x').\tag{4.45}$$

例 2　Faddeev-Popov のゴースト場

フェルミ統計に従う二つの実スカラー場 c, $\bar{c}$ が存在して

$$\mathscr{L}=i\partial_\mu\bar{c}\cdot\partial_\mu c\tag{4.46}$$

というラグランジアン密度で記述される．この時には

$$D(\partial)=-i\Box,\qquad C(\partial)=i\tag{4.47}$$

従って交換関係は

$$\begin{aligned} &\{c(x), c(x')\} = \{\bar{c}(x), \bar{c}(x')\} = 0, \\ &\{c(x), \bar{c}(x')\} = -D(x-x'). \end{aligned} \tag{4.48}$$

この場合，スピンと統計との関係に関する Pauli の定理に反しているので，少なくとも仮定の一つが破れていなければならない．この場合には，実は正定値計量に関する仮定が破れていて不定計量を導入する必要がある．そこでこの場をゴースト (ghost) 場と呼ぶのである．この場は後に述べるように，非可換ゲージ場の理論において重要な役割を演ずる．不定計量は一般にゲージ場の理論において現れ，次章で詳しく論ずることになる．

例 3　複素ベクトル場

(2.10.4) のラグランジアン密度より

$$[\mathcal{L}]_{\varphi_\alpha^\dagger} = \partial_\beta(\partial_\beta\varphi_\alpha - \partial_\alpha\varphi_\beta) - m^2\varphi_\alpha = D_{\alpha\beta}(\partial)\varphi_\beta \tag{4.49}$$

従って

$$D_{\alpha\beta}(\partial) = \delta_{\alpha\beta}(\Box - m^2) - \partial_\alpha\partial_\beta \tag{4.50}$$

これから C を求めると

$$C_{\alpha\beta}(\partial) = \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{m^2}\partial_\alpha\partial_\beta \tag{4.51}$$

という既に知られた形が得られ，(3.11) 式が再現される．

正準量子化の方法と比べて，非同時刻交換関係を求めるのにはこの方法の方がずっと簡単なことは，ベクトル場の例を見れば明らかであろう．

第4章　不定計量と電磁場

場の量子論の歴史は電磁場の量子化から始まったと言うことができる．それにもかかわらず電磁場を簡単な場として取扱えなかったのは，ゲージ場と呼ばれる一群のベクトル場の特徴として不定計量というものが現れるからである．

ここではまず不定計量について述べることにするが，詳しくは例えば，中西襄著「場の量子論」(培風館，1975年)を参照されたい．

§1　不定計量

まず量子力学の記述に欠くべからざるヒルベルト空間は一種のベクトル空間である．ここでは数学的厳密性は抜きにして直観的な議論に限定するが，有限次元のベクトル空間の復習から始めよう．ベクトル空間を$\mathcal{V}$と書くと，

1. ベクトルは加法に関して群を作る．
2. 数とベクトルの積が定義され，分配則が成り立つ．
3. 一次独立なベクトルの数がベクトル空間の次元を定義する．

そして物理では，ベクトルをブラ$\langle x|$とケット$|x\rangle$のように表わし，その内積を定義する．これによって計量が導入されることになる．

内積の満たすべき性質をまとめると次のようになる．ただしa, bは複素数．

$$\langle y|x\rangle=\langle x|y\rangle^*, \tag{1.1}$$

$$\langle y|ax+bx'\rangle=a\langle y|x\rangle+b\langle y|x'\rangle, \tag{1.2}$$

$$\langle ay+by'|x\rangle=a^*\langle y|x\rangle+b^*\langle y'|x\rangle \tag{1.3}$$

ただし第三の式は，第一と第二の式を組み合わせれば出る．数学では，しばしば (1.2) と (1.3) とが逆になって，(1.2) の方にa^*, b^*が現れ，(1.3) にはa, bが現れる．ところでユークリッド空間でのみ成り立ち，不定計量空間では成り立たない性質として，

$$\langle x|x\rangle\geqq 0 \tag{1.4}$$

という正定値性がある．この場合に，$\langle x|x\rangle=0$ と $|x\rangle=0$ とは同値である．

不定計量空間は，(1.4) を除くことにより導入される．その際に，(1.1) によれば $\langle x|x\rangle$ は実数であるが正とは限らないことになる．

線形演算子

$|x\rangle\in\mathcal{V}$ なる任意の $|x\rangle$ に対して $T|x\rangle$ が定義され，かつ $T|x\rangle\in\mathcal{V}$ なる時に，T を $\mathcal{V}$ 上の演算子と呼び，特に T が線形条件を満たす時に T を線形演算子と呼ぶ．線形条件は次式で与えられる：

$$T|ax+by\rangle=aT|x\rangle+bT|y\rangle \tag{1.5}$$

次に $\mathcal{V}$ の中で完全系をなす一次独立なベクトルの組，すなわち基底の組 $\{e_j\}$ を用いて T の表現を作る．任意の $|x\rangle\in\mathcal{V}$ は次のように一意的に表わされる：

$$|x\rangle=\sum_j x_j|e_j\rangle \tag{1.6}$$

そこで $T|e_j\rangle$ を次のように表わす：

$$T|e_j\rangle=\sum_k |e_k\rangle t_{kj} \tag{1.7}$$

この行列 t を T の表現と呼ぶ．もし S の表現を s とすれば

$$\begin{aligned}ST|e_j\rangle&=\sum_k S|e_k\rangle t_{kj}\\&=\sum_k\sum_l |e_l\rangle s_{lk}t_{kj}\\&=\sum_l |e_l\rangle\left(\sum_k s_{lk}t_{kj}\right)\end{aligned} \tag{1.8}$$

となるので行列 st は演算子 ST の表現となる．

次に $\det u\neq0$ なる行列 u を用いて基底の変換を考える．

$$|e_j'\rangle=\sum_k |e_k\rangle u_{kj} \tag{1.9}$$

新しい基底の組に対する T の表現を $\tilde{t}$ とする．すなわち，

$$T|e_j'\rangle=\sum_k |e_k'\rangle\tilde{t}_{kj} \tag{1.10}$$

しからば表現 t の変換則は次の相似変換によって与えられる：

$$\tilde{t}=u^{-1}tu. \tag{1.11}$$

計量行列

一つの基底の組 $\{e_j\}$ が与えられた時に計量行列 η を次式で定義する：

$$\eta_{mn}=\langle e_m|e_n\rangle \tag{1.12}$$

しからば内積の性質 (1.1) より $\eta_{nm}=\eta_{mn}^*$，すなわち $\eta^\dagger=\eta$ となる．すなわち η はエルミート行列である．この行列は，基底の変換 (1.9) に対して

$$\tilde{\eta}=u^\dagger\eta u \tag{1.13}$$

のように変換される．(1.11)との相異に注意されたい．

縮退

$\mathscr{V}$ に属する任意のベクトル $|l\rangle$ に対して $\langle l|k\rangle=0$ となるようなベクトル $|k\rangle$ が存在する時に，このベクトル空間は縮退しているという．

エルミート共役

線形演算子 T が与えられた時に，任意のベクトル $|k\rangle$，$|l\rangle$ に対して

$$\langle k|T^{\dagger}|l\rangle=\langle l|T|k\rangle^{*} \tag{1.14}$$

が成り立つような演算子 $T^{\dagger}$ を T のエルミート共役と呼ぶ．T と $T^{\dagger}$ との表現行列をそれぞれ t, s とすると次式が成り立つ：

$$\eta s=t^{\dagger}\eta \tag{1.15}$$

特に $\mathscr{V}$ が非縮退で $\det \eta\neq 0$ ならば

$$s=\eta^{-1}t^{\dagger}\eta \tag{1.16}$$

すなわち，一般にエルミート演算子 $T^{\dagger}=T$ の表現行列自身はエルミート行列でない．不定計量空間において次のような性質を持つ演算子に名称を与える：

$U^{\dagger}=U^{-1}$	ユニタリー演算子
$P^2=P$	射影演算子
$K^n=0\quad(K^{n-1}\neq 0)$	巾零演算子

非縮退ベクトル空間においては，基底の組の適当な変換によって η の固有値を ± 1 に規格化することができる．

§2　一般化された固有状態

不定計量を許す場合には，正定値計量の場合には考えられなかったようなことがいろいろと生ずる．電磁場を典型的な場合として含むゲージ場の理論のローレンツ不変な定式化においては不定計量は避けられないのでその特徴を論ずる．

$$T|k\rangle=\lambda|k\rangle \tag{2.1}$$

のような関係が成り立つ時に，正定値計量の時と同様に $|k\rangle$ を T の固有状態，λ をそれに対応する固有値と呼ぶ．また $\mathscr{V}$ の部分空間 $\mathscr{W}$ に対して

$$|k\rangle\in\mathscr{W}\quad \text{ならば}\quad T|k\rangle\in\mathscr{W} \tag{2.2}$$

となる時に，$\mathscr{W}$ を T の不変部分空間と呼ぶ．また T の表現行列 t に対して

$$f(x)=\det(x\mathbf{1}-t) \tag{2.3}$$

は実は基底の選び方によらない x の多項式で，T の固有多項式，あるいは特性多項式と呼ばれる．ただし $\mathbf{1}$ は $\mathcal{V}$ における単位行列である．

Cayley-Hamilton の定理

$$f(T)=0. \tag{2.4}$$

（証明）　行列 s の随伴行列 $\tilde{s}$ を次式で定義する：

$$\tilde{s}_{mn}=\frac{\partial}{\partial s_{nm}}\det s \tag{2.5}$$

しからば明らかに

$$\sum_m s_{nm}\,\tilde{s}_{ml}=\delta_{nl}\det s \tag{2.6}$$

そこで x の一次式 $s_{nm}(x)$ を次式で定義する：

$$s_{nm}(x)=x\delta_{nm}-t_{nm} \tag{2.7}$$

しからば明らかに

$$\sum_m s_{nm}(T)\tilde{s}_{ml}(T)=\delta_{nl}f(T), \tag{2.8}$$

$$T|m\rangle=\sum_n |n\rangle t_{nm} \tag{2.9}$$

さて (2.9) を書き換えると

$$\sum_n (\delta_{nm}T-t_{nm})|n\rangle=\sum_n s_{nm}(T)|n\rangle=0$$

従って

$$\begin{aligned}\sum_{n,m}\tilde{s}_{ml}(T)s_{nm}(T)|n\rangle&=\sum_{n,m}s_{nm}(T)\tilde{s}_{ml}(T)|n\rangle\\&=\sum_n\delta_{ln}f(T)|n\rangle\\&=f(T)|l\rangle\\&=0\end{aligned} \tag{2.10}$$

ここで $|l\rangle$ は任意の基底ベクトルで良く，一次独立な基底の完全系に対してこの式が成立すれば (2.4) が正しいことになる．

次に $f(x)$ を因数分解する．$i\neq j$ に対して $\lambda_i\neq\lambda_j$ として

$$f(x)=\prod_{j=1}^{r}(x-\lambda_j)^{N_j},\qquad \sum_{j=1}^{r}N_j=N\quad(\text{次元}) \tag{2.11}$$

さて，$f(T)=0$ であるが，多項式で $g(T)=0$ となる最低次数のものを考える．

$$g(x)=\prod_{j=1}^{r}(x-\lambda_j)^{n_j},\qquad 0<n_j\leqq N_j \tag{2.12}$$

分解定理

$$\mathcal{V}=\sum_{j=1}^{r}\oplus\mathcal{V}(\lambda_j) \tag{2.13}$$

ただし $|k\rangle\in\mathcal{V}(\lambda_j)$ とは $(T-\lambda_j)^{n_j}|k\rangle=0$ を意味する．

(証明) まず $g_1(x),\ g_2(x), \cdots, g_r(x)$ を次式で定義する:

$$g_j(x)=\frac{g(x)}{(x-\lambda_j)^{n_j}}=\prod_{i\neq j}(x-\lambda_i)^{n_i} \tag{2.14}$$

ここに $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_r(x)$ はお互いに素であるから

$$\sum_{j=1}^{r} h_j(x)g_j(x)=1 \tag{2.15}$$

となるような多項式 $h_j(x)$ が存在する．そこで次のように置く．

$$P_j(T)=h_j(T)g_j(T), \qquad \sum_{j=1}^{r} P_j(T)=1 \tag{2.16}$$

更に $i\neq j$ ならば $g_i(x)g_j(x)$ は $g(x)$ で除せるから

$$g_i(T)g_j(T)=0$$

すなわち $i\neq j$ ならば $P_i(T)P_j(T)=0$ であり，(2.16) に $P_j(T)$ を乗ずると

$$P_j^2(T)=P_j(T). \tag{2.17}$$

従って $P_j(T)$ は射影演算子であり，$\mathcal{V}(\lambda_j)$ は $P_j(T)\mathcal{V}=\mathcal{V}(\lambda_j)$ によって定義され，上記の分解定理が成り立つ．

不定計量の場合の固有ベクトルの直交性の条件は複雑である．H がエルミート演算子であってもその固有値が実数になるとは限らない．H の表現行列を h とすると，(1.15) より

$$\eta h=h^{\dagger}\eta=(\eta h)^{\dagger} \tag{2.18}$$

従ってエルミート行列になるのは ηh という積である．そこで $\mathcal{V}$ が縮退していない場合には基底の組を適当に選び (1.13) により η を $\eta^2=1$ になるように選ぶことができるので，その結果として

$$\det(x\mathbf{1}-h)=\det\eta\cdot\det(x\eta-\eta h) \tag{2.19}$$

と書くことができる．この式から分かるように H の特性多項式は実の多項式となる．ここで特性多項式は実は基底の選び方によらないことに注意されたい．従って H の固有値は一般に実数か，あるいは複素共役な複素数の対となる．以下では H をエルミート演算子とする．そして前出の部分空間 $\mathcal{V}(\lambda)$ を考える．

まず $\mathcal{V}(\lambda_j)$ と $\mathcal{V}(\lambda_k)$ に属する二つのベクトル，あるいはケット・ベクトル $|e_j\rangle$ と $|e_k\rangle$ を考えると，

$$(H-\lambda_j)^{n_j}|e_j\rangle=0, \qquad \langle e_k|(H-\lambda_k^*)^{n_k}=0 \tag{2.20}$$

そこで $\lambda_j \neq \lambda_k^*$ ならば $(x-\lambda_j)^{n_j}$ と $(x-\lambda_k^*)^{n_k}$ とはお互いに素であり，

$$f(x)(x-\lambda_j)^{n_j}+g(x)(x-\lambda_k^*)^{n_k}=1 \tag{2.21}$$

を満たす多項式 $f(x), g(x)$ が存在する．故に

$$\langle e_k|e_j\rangle=\langle e_k|f(H)(H-\lambda_j)^{n_j}|e_j\rangle+\langle e_k|(H-\lambda_k^*)^{n_k}g(H)|e_j\rangle=0 \tag{2.22}$$

という直交条件を得る．従って複素数の固有値 $\lambda_j \neq \lambda_j^*$ に対しては

$$\langle e_j|e_j\rangle=0 \tag{2.23}$$

となり，このベクトルはノルムが 0 であることになる．

λ_j が実数ならば，$\mathscr{V}(\lambda_j)$ の中に

$$\langle x_j|(H-\lambda_j)^{n_j-1}|x_j\rangle \neq 0 \tag{2.24}$$

となるようなベクトル $|x_j\rangle$ が必ず存在する．そうでなければ $\mathscr{V}(\lambda_j)$ 上では常に $(H-\lambda_j)^{n_j-1}=0$ となり，n_j がこのような最小の数という条件に反する．故に

$$|x_j\rangle,\ (H-\lambda_j)|x_j\rangle,\ \cdots,\ (H-\lambda_j)^{n_j-1}|x_j\rangle \tag{2.25}$$

はお互いに一次独立なケット・ベクトルである．

多重極状態

上述の議論を繰り返すことになるが，実数の固有値 λ に対して

$$(H-\lambda)^m|x\rangle=0, \qquad \langle x|(H-\lambda)^{m-1}|x\rangle \neq 0 \quad (m \geqq 2) \tag{2.26}$$

を満たし，$|x\rangle=(H-\lambda)|x'\rangle$ のような $|x'\rangle$ が存在しない時に，x を m 次の多重極状態と呼ぶ．状態とは物理の用語であるが，量子力学的状態を意味する．

いま $|x\rangle$ を規格化して

$$\langle x|(H-\lambda)^{m-1}|x\rangle=\varepsilon, \qquad \varepsilon=\pm 1 \tag{2.27}$$

とし，(2.25) に対応する一次独立なベクトルの一次結合を導入する．

$$|z\rangle=|x\rangle+\sum_{k=1}^{m-1}c_k(H-\lambda)^k|x\rangle \tag{2.28}$$

そして c_k を適当に選ぶことにより次式を満たすようにする：

$$\langle z|(H-\lambda)^k|z\rangle=0, \qquad k=0,1,\cdots,m-2 \tag{2.29}$$

(2.27) と (2.29) とを一緒にして次のように書ける．

$$\langle z|(H-\lambda)^k|z\rangle=\varepsilon\delta_{k,m-1} \tag{2.30}$$

そこで $\mathscr{V}(\lambda)$ の中で m 個の一次独立なベクトルを (2.25) にならって作る．ここで $|x\rangle$ の代りに $|z\rangle$ から出発した組を選ぶ．すなわち

$$|z\rangle,\ (H-\lambda)|z\rangle,\ \cdots,\ (H-\lambda)^{m-1}|z\rangle \tag{2.31}$$

この基底の組に対して η，および H の表現行列 h は次のように与えられる：

$$\eta=\begin{pmatrix} O & & \varepsilon \\ & \varepsilon & \\ \varepsilon & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & O \end{pmatrix}, \qquad \eta^2=1 \tag{2.32}$$

$$h=\begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & O & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \lambda & \\ & O & & & \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad h^{\dagger}=\eta h \eta \tag{2.33}$$

またこのような部分空間 $\mathcal{V}(\lambda)$ に対する射影演算子 $P(\mathcal{V})$ は次式で与えられる：

$$P(\mathcal{V})=\varepsilon\sum_{k=0}^{m-1}(H-\lambda)^k|z\rangle\langle z|(H-\lambda)^{m-k-1} \tag{2.34}$$

以上は λ が実数の時の話である．

λ が複素数の時には $\mathcal{V}(\lambda)\oplus\mathcal{V}(\lambda^*)$ を考える．この時の η と h とは，(2.32) と (2.33) の η と h とを用いて

$$\begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h^* \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

の形となる．

物理的状態を表わす部分空間

種々の物理的理論，特にゲージ場を含む理論においては，数学的表現の手段として不定計量を導入することが必要となる．ところが我々の観測にかかるような世界は正定値計量によって記述され，確率に対応する状態ベクトルのノルムは常に正となる．そこで状態ベクトルの空間 $\mathcal{V}$ の中の部分空間 $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ をとり出し，後者のみが観測にかかるものと解釈する．

$$\mathcal{V}\supset\mathcal{V}_{\text{phys}} \tag{2.36}$$

この部分空間に属する任意のベクトル $|x\rangle$ は次の性質を持つものとする：

$$\langle x|x\rangle\geqq 0 \tag{2.37}$$

ただし (1.4) 式との差異は $\langle x|x\rangle=0$ が必ずしも $|x\rangle=0$ を要求しないことである．すなわちノルム 0 の状態ベクトルの存在を許す訳である．どのようにしてこのような部分空間を定義するかは別として，まず言えることは，たとえ親の空間 $\mathcal{V}$ が非縮退であってもこの部分空間は縮退しているということである．

まず $|y\rangle$ がこの部分空間に属するノルム 0 のベクトルであるとし，$|x\rangle$ がこの部分空間の任意のベクトルであるとする．しからば

$$|x\rangle,\ |y\rangle\in\mathcal{V}_{\mathrm{phys}},\qquad \langle y|y\rangle=0 \tag{2.38}$$

$|x\rangle+a|y\rangle$ もこの部分空間に属するから，そのノルムは (2.37) を満たす．

$$\langle x|x\rangle+2\mathrm{Re}(a\langle x|y\rangle)+|a|^2\langle y|y\rangle=\langle x|x\rangle+2\mathrm{Re}(a\langle x|y\rangle)\geqq 0$$

この不等式が任意の複素数 a に対して成り立つためには

$$\langle x|y\rangle=0 \tag{2.39}$$

すなわちベクトル $|y\rangle$ を含むこの部分空間は縮退していることになり，ノルム0のベクトルはこの部分空間内のすべてのベクトルと直交する．そこで

$$\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}=\mathcal{V}_{+}\oplus\mathcal{V}_{0} \tag{2.40}$$

のような直和分解を考えてみよう．$\mathcal{V}_{+}$ に属するベクトルはすべて正のノルムを持ち，$\mathcal{V}_{0}$ に属するベクトルはすべてノルム0である．しかしながらこの分解は一意的でない．$\mathcal{V}_{0}$ は一意的に定まるが，$\mathcal{V}_{+}$ は一意的には定まらない．それは(2.38)の条件下で $|x\rangle$ が正のノルムを持てば $|x\rangle+a|y\rangle$ も同じ正のノルムを持つことになるので，$\mathcal{V}_{0}$ のベクトル分だけ不定となるからである．そこで $|x_i\rangle$ を正ノルム，$|y_i\rangle$ を0ノルムのベクトルとし，いずれも $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ に属するものとし，$|x_i'\rangle=|x_i\rangle+|y_i\rangle$ とする．しからば $\langle x_1'|x_2'\rangle=\langle x_1|x_2\rangle$ となるので計量行列が与えられても $\mathcal{V}_{+}$ を一意的に決められない．これは $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ が縮退しているからである．そこで $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ を不変部分空間とする演算子 T を考える．

$$T\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}\subset\mathcal{V}_{\mathrm{phys}} \tag{2.41}$$

すると容易に示されるように

$$\langle x_1'|T|x_2'\rangle=\langle x_1|T|x_2\rangle \tag{2.42}$$

すなわち，このような演算子のみを考える限りは $|x_i'\rangle$ と $|x_i\rangle$ とは同値であり，形式的に次のように書ける．

$$|x_i'\rangle\equiv|x_i\rangle\qquad(\mathrm{mod}\ \mathcal{V}_0) \tag{2.43}$$

(2.41) を満たす演算子をオブザーバブルと呼ぶことにする．そして次のような商空間を考える：

$$\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}=\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}/\mathcal{V}_{0} \tag{2.44}$$

同値類に属するベクトルは一つのケット・ベクトル $|x\rangle\!\rangle$ で表わすとすれば，

$$\langle\!\langle x|x\rangle\!\rangle\geqq 0 \tag{2.45}$$

そして等号が成り立つのは

$$|x\rangle\!\rangle\equiv 0\qquad(\mathrm{mod}\ \mathcal{V}_0)$$

の時に限る．この意味で商空間 $\mathscr{H}_{\text{phys}}$ は正定値計量を持つことになり，物理的解釈を許すことになる．またオブザーバブル T に対しては行列要素は

$$\langle\!\langle x_1|T|x_2\rangle\!\rangle=\langle x_1+y_1|T|x_2+y_2\rangle, \qquad |y_1\rangle, |y_2\rangle\in\mathscr{V}_0 \tag{2.46}$$

によって定義され，T は $\mathscr{H}_{\text{phys}}$ での演算子となる．実際に問題となる $\mathscr{V}_{\text{phys}}$ は適当な演算子 Q を用いて次の形で定義される．

$$\mathscr{V}_{\text{phys}}=\{|x\rangle \mid Q|x\rangle=0, |x\rangle\in\mathscr{V}\} \tag{2.47}$$

§3 自由な電磁場——Fermi のゲージ

電磁場の量子化を行うためにラグランジアン密度としてベクトル場の時に用いた (2.10.4) を実の場に書き換えて質量 m を0としたものを考える．

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad \text{ただし } F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \tag{3.1}$$

この時に電場と磁場とは次式で導入される：

$$F_{4k}=-F_{k4}=iE_k, \qquad F_{ij}=-F_{ji}=\varepsilon_{ijk}H_k \tag{3.2}$$

ただし ε_{ijk} は，$(i\ j\ k)$ が (1 2 3) の偶置換なら +1，奇置換なら −1，それ以外ならば0を表わすものとする．しからば(3.1)は次の形に書くこともできる：

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{H}^2) \tag{3.3}$$

このラグランジアン密度から変分原理に従って Euler-Lagrange の方程式を書いてやると，自由な Maxwell の方程式となる．

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}=\Box A_\nu-\partial_\mu\partial_\nu A_\mu=0 \tag{3.4}$$

ところでこの方程式の解は，一つの解 A_μ が得られた時に他の解を次のゲージ変換によって与えることができる：

$$A_\mu \to A'_\mu=A_\mu+\partial_\mu\Lambda \tag{3.5}$$

ここに Λ は x_μ の任意の実関数である．このように解がゲージ変換を許すということは，前出の $D_{\mu\nu}(\partial)$ が逆を持たないことに由来する．質量のあるベクトル場の時には，第四成分を他の成分で表現して量子化したが，質量が0だとそれができない．すなわち，$m\neq0$ ならば

$$\partial_\mu A_\mu=0 \tag{3.6}$$

が場の方程式として得られたが，$m=0$ だとそれが出ないのである．

またポテンシャル A_j の正準共役量 π_j は

$$\pi_j=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_j}=iF_{4j}=-E_j \tag{3.7}$$

で与えられるが，明らかに A_4 の正準共役量は定義できない．ここに今までになかった新しい事情が生ずる．そこで考え得る一つの方法は第四成分をゲージ変換により消去し，残りの3成分のみを量子化するものである．しかしながらこのような量子化法は，ローレンツ不変性が明らかではないので他の不変性の明らかな方法を見つけることが望ましい．それに応えるものが Fermi の方法である．

Fermiの方法

Fermiは次のラグランジアン密度を導入した．

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2 \tag{3.8}$$

この付加項の存在のために第四成分に対しても正準共役量を定義することができる．実際 (3.7) に代って

$$\pi_j=iF_{4j},\qquad \pi_4=i(\partial_\mu A_\mu). \tag{3.9}$$

またEuler 微分をとることにより場の方程式は

$$[\mathcal{L}]_{A_\mu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\mu:\nu}}\right)=D_{\mu\nu}(\partial)A_\nu=0 \tag{3.10}$$

ただし

$$D_{\mu\nu}(\partial)=\delta_{\mu\nu}\Box \tag{3.11}$$

従って (3.10) は質量0の時のKlein-Gordon 方程式となる．すなわち

$$\Box A_\mu=0. \tag{3.12}$$

次に前に述べた D の逆演算子に相当する C を次式で定義する：

$$D_{\alpha\beta}C_{\beta\gamma}=\delta_{\alpha\gamma}\Box \tag{3.13}$$

しからば明らかに

$$C_{\beta\gamma}=\delta_{\beta\gamma} \tag{3.14}$$

従って四次元的交換関係は

$$[A_\alpha(x),A_\beta(y)]=i\,C_{\alpha\beta}D(x-y)=i\,\delta_{\alpha\beta}D(x-y) \tag{3.15}$$

ただし $m=0$ の時の Δ 関数を D と書いている．この時に

$$D(x)=-\frac{1}{2\pi}\varepsilon(x_0)\delta(x^2),\qquad D^{(1)}(x)=\frac{1}{2\pi^2}P\frac{1}{x^2} \tag{3.16}$$

この交換関係から次の同時刻正準交換関係が出る．

$$[A_\mu(x), \pi_\nu(y)] = i\,\delta_{\mu\nu}\delta^3(x-y) \qquad \text{ただし}\ x_0 = y_0 \tag{3.17}$$

この式を出すには (3.9) 式による π_ν の定義，および D 関数に関する次の性質，(3.1.13) を用いている．

$$\frac{\partial}{\partial x_0}D(x) = -\delta^3(x) \qquad \text{ただし}\ x_0 = 0 \tag{3.18}$$

また容易に出せるように

$$[\partial_\mu A_\mu(x),\ \partial_\nu A_\nu(y)] = -i\Box_x D(x-y) = 0. \tag{3.19}$$

ところで場の方程式は (3.12) で与えられる Klein-Gordon 方程式であり，Maxwell 方程式を得るためには (3.6) が必要である．しかしながら $m=0$ の時には (3.6) は場の方程式からは導けない．そこで Fermi の導入した方法は，物理的に観測可能な状態を付加条件により制限するというものである．彼の条件は，観測可能な状態 $|\Psi\rangle$ では

$$\langle\Psi|\partial_\mu A_\mu(x)|\Psi\rangle = 0 \tag{3.20}$$

を満たし，このような状態の集りはベクトル空間を形成しているというものである．この条件は $|\Psi\rangle$ について双一次形式なので後にその一次化を導入する．

このような制限された状態においては Maxwell の方程式が期待値の意味で成立する．

$$\langle\Psi|\partial_\mu F_{\mu\nu}(x)|\Psi\rangle = \langle\Psi|\Box A_\nu(x)|\Psi\rangle - \partial_\nu\langle\Psi|\partial_\mu A_\mu(x)|\Psi\rangle = 0 \tag{3.21}$$

上述の結果は，(3.8) とダイバージェンスのみ異なっている次のラグランジアン密度を用いても実現しうる：

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)\cdot(\partial_\nu A_\mu) \tag{3.22}$$

しからばこの系のエネルギーと運動量とは次式で与えられる．

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x[\dot{A}_\mu^2 + (\nabla A_\mu)^2], \tag{3.23}$$

$$\boldsymbol{P} = -\int d^3x\,\dot{A}_\mu \nabla A_\mu \tag{3.24}$$

これはいずれのラグランジアンにも共通である．

フーリエ展開

まず A_μ をフーリエ展開する：(以後フーリエ係数の変数を三次元ベクトル $\boldsymbol{k}$ から四次元ベクトル k に変える．)

$$A_\mu(x)=\sum_k \frac{1}{\sqrt{2k_0V}}[e^{ik\cdot x}A_\mu(k)+e^{-ik\cdot x}A_\mu^\dagger(k)] \tag{3.25}$$

そして展開係数を更に偏極ベクトルに展開する.

$$A_\mu(k)=\sum_\lambda e_\mu^{(\lambda)}a(k,\lambda), \qquad A_\mu^\dagger(k)=\sum_\lambda e_\mu^{(\lambda)}a^\dagger(k,\lambda) \tag{3.26}$$

ここで 4 つの偏極ベクトルを次のように定義しよう:

$$\begin{aligned} &e_4^{(1)}=e_4^{(2)}=e_4^{(3)}=0, \qquad e_4^{(4)}=1, \\ &\boldsymbol{e}^{(3)}=\boldsymbol{e}^{(1)}\times\boldsymbol{e}^{(2)}=\frac{\boldsymbol{k}}{k_0}, \qquad \boldsymbol{e}^{(1)}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{e}^{(2)}\cdot\boldsymbol{k}=0 \end{aligned} \tag{3.27}$$

すなわち, $e^{(1)}$ と $e^{(2)}$ とが横波に対応し, $e^{(3)}$ が縦波, $e^{(4)}$ がスカラー波に対応することになる. この 4 つのベクトルは完全直交系をなす.

$$e_\mu^{(\lambda)}e_\mu^{(\lambda')}=\delta_{\lambda\lambda'}, \qquad e_\mu^{(\lambda)}e_\nu^{(\lambda)}=\delta_{\mu\nu} \tag{3.28}$$

そこでフーリエ展開を次の形に書くことが出来る:

$$A_\mu(x)=\sum_k\sum_\lambda \frac{1}{\sqrt{2k_0V}}[e_\mu^{(\lambda)}a(k,\lambda)e^{ik\cdot x}+e_\mu^{(\lambda)}a^\dagger(k,\lambda)e^{-ik\cdot x}] \tag{3.29}$$

Pauli metric においては, $a(k,\lambda)$ の随伴演算子 $a^\dagger(k,\lambda)$ は, $\lambda=1,2,3$ に対してはエルミート共役であり, $\lambda=4$ に対しては $ia(k,4)$ と $ia^\dagger(k,4)$ とがエルミート共役である. また交換関係は

$$[a(k,\lambda),a^\dagger(k',\lambda')]=\delta_{\lambda\lambda'}\cdot\delta_{k,k'} \tag{3.30}$$

となり, a 同士と $a^\dagger$ 同士は可換である.

さて全系のエネルギーと運動量とは, c 数を無視して

$$H=\sum_k k_0\sum_\lambda a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda) \tag{3.31}$$

$$P_j=\sum_k k_j\sum_\lambda a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda) \tag{3.32}$$

で与えられる. $\lambda=1,2,3$ に対しては

$$n(k,\lambda)=a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda) \tag{3.33}$$

は粒子数演算子である. ところで $a^\dagger(k,4)$ は $a(k,4)$ のいわゆる随伴演算子であってエルミート共役ではない.

$$a(k,4)=ia(k,0), \qquad a^\dagger(k,4)=ia^\dagger(k,0) \tag{3.34}$$

と置けば, $a^\dagger(k,0)$ は $a(k,0)$ のエルミート共役演算子となり, その交換関係

$$[a(k,0),a^\dagger(k,0)]=-1 \tag{3.35}$$

から明らかなように, スカラー波は不定計量を持つことになる. そこで $a(k,0)$

を消滅演算子，$a^{\dagger}(k,0)$ を生成演算子と解釈すると，真空 $|0\rangle$ に対して

$$a(k,0)|0\rangle=0. \tag{3.36}$$

そこでスカラー波の n 粒子状態を次式で導入する：

$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^{\dagger}(k,0))^{n}|0\rangle \tag{3.37}$$

しからばそのノルムは

$$\langle n|n\rangle=(-1)^{n}\langle 0|0\rangle=(-1)^{n}$$

で与えられることになり，不定計量の導入が明らかになる．スカラー波に対する粒子数演算子は従って

$$n(k,0)=a^{\dagger}(k,0)a(k,0) \tag{3.38}$$

によって与えられることになる．また k を固定した時に，4つの偏極状態が存在するが，その4つの状態に対する計量行列 $\eta(k)$ は次式で与えられる：

$$\eta(k)=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1\end{pmatrix} \tag{3.39}$$

明らかにスカラー波に対する一粒子状態の不定計量は Minkowski 計量にその源がある．

§4　Lorentz 条件と物理的状態空間

前節において物理的に観測し得る状態を選び出すために(3.20)という付加条件を課したが，これは状態について双一次形式に書かれていたので，これを一次形に書き換える方法を考えよう．

自由場は消滅演算子に対応する正振動数部分と生成演算子に対応する負振動数部分とに分解することができるので，次のように書く：

$$A_{\mu}(x)=A_{\mu}^{(+)}(x)+A_{\mu}^{(-)}(x) \tag{4.1}$$

そして真空 $|0\rangle$ は次式を満たす：

$$A_{\mu}^{(+)}(x)|0\rangle=0 \tag{4.2}$$

また自由な電磁場という系に限れば，状態ベクトル空間 $\mathcal{V}$ は，真空 $|0\rangle$ に $A^{(-)}$ を乗ずることにより生成されることになる．この空間 $\mathcal{V}$ は不定計量に従うので物理的解釈のためには，§2で議論した部分空間 $\mathcal{V}_{\rm phys}$ を導入する必要が

ある．

計量行列の中で負の計量を与えるスカラー波を初めから落としたクーロン・ゲージを採用するのも一つの方法であるが，ここでは理論の共変性が明らかな形のままで不定計量を消去する方法を考えたい．この要望に応えるものが，いわゆる Lorentz 条件の導入である．(2.47) においては $\mathcal{V}_{\rm phys}$ を選ぶのに一つの適当な演算子 Q を導入したが，この演算子の数は一つに限る必要はない，そこで，

$$\mathcal{V}_{\rm phys}=\{|\Phi\rangle \mid \partial_\mu A_\mu^{(+)}(x)|\Phi\rangle=0,\ \ |\Phi\rangle\in\mathcal{V}\} \tag{4.3}$$

で部分空間 $\mathcal{V}_{\rm phys}$ を定義する．ここに x は 4 次元時空すべての点について考えるものとする．ここに出てきた付加条件

$$\partial_\mu A_\mu^{(+)}(x)|\Phi\rangle=0 \tag{4.4}$$

を Lorentz 条件と呼ぶ．この条件を満たすような状態においては (3.20)

$$\langle\Phi|\partial_\mu A_\mu(x)|\Phi\rangle=0$$

が成り立つことは明らかであろう．

我々がまず証明しなければならないことは，$\mathcal{V}_{\rm phys}$ に属する任意の状態ベクトル $|\Phi\rangle$ が負でないノルムを持つことである．すなわち，

$$\langle\Phi|\Phi\rangle\geqq 0 \tag{4.5}$$

まずフーリエ展開 (3.29) より

$$\partial_\mu A_\mu^{(+)}(x)=i\sum_k\frac{1}{\sqrt{2k_0V}}\ e^{ik\cdot x}\sum_\lambda k_\mu e_\mu^{(\lambda)}a(k,\lambda) \tag{4.6}$$

そこで λ に関する和の部分をとり出すと

$$\sum_\lambda k_\mu e_\mu^{(\lambda)}a(k,\lambda)=|k|[a(k,3)-a(k,0)] \tag{4.7}$$

ここに $a(k,3)$ は縦波光子を消す演算子である．そこで

$$a(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}[a(k,3)-a(k,\ 0)],\qquad b(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}[a(k,3)+a(k,0)] \tag{4.8}$$

という演算子を導入する．しからば Lorentz 条件は

$$a(k)|\Phi\rangle=0 \tag{4.9}$$

という形に帰着する．ところで一つの k に対しては次の交換関係を得る：

$$[a,a^\dagger]=[b,b^\dagger]=0,\qquad [a,b^\dagger]=[b,a^\dagger]=1 \tag{4.10}$$

そしてこれらの演算子は，$a(k,1)$，$a(k,2)$，$a^\dagger(k,1)$，$a^\dagger(k,2)$ と可換である．さ

て $\mathcal{V}$ は真空状態 $|0\rangle$ に $a^{\dagger}(k,1)$, $a^{\dagger}(k,2)$, $a^{\dagger}(k)$, $b^{\dagger}(k)$ の多項式を乗じて生成されるが, $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ は (4.10) から明らかなように $|0\rangle$ に $a^{\dagger}(k,1)$, $a^{\dagger}(k,2)$, $a^{\dagger}(k)$ を乗じることにより生成される. そこで $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ に属する状態 $|\Phi\rangle$ を $a^{\dagger}$ の数により展開する.

$$|\Phi\rangle=|\Phi_0\rangle+|\Phi_1\rangle+|\Phi_2\rangle+\cdots \tag{4.11}$$

ただし $|\Phi_j\rangle$ は横波光子プラス a 光子 j 個の状態である. しからば, 二つのこのような状態の内積は

$$\langle\Phi'|\Phi\rangle=\langle\Phi_0'|\Phi_0\rangle \tag{4.12}$$

で与えられる. なんとなれば a 光子が 0 でない状態はノルムが 0 だからである.

例えば, a 光子が一個ずつの状態 $a^{\dagger}(k)|\Phi_T\rangle$ と $a^{\dagger}(k')|\Phi_T'\rangle$ の内積は (4.10) により次のように書ける. ただし $|\Phi_T\rangle$ と $|\Phi_T'\rangle$ とは横波光子のみの状態である.

$$\langle\Phi_T'|a(k')a^{\dagger}(k)|\Phi_T\rangle=\langle\Phi_T'|a^{\dagger}(k)a(k')|\Phi_T\rangle=0$$

勿論 $|\Phi_T\rangle$ という状態に $a(k')$ という消滅演算子を乗ずると消えてしまうからである. これが (4.12) の成立する理由である. そして横波光子のみの状態は正定値計量に属するので, Φ が $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ に属すれば

$$\langle\Phi|\Phi\rangle=\langle\Phi_0|\Phi_0\rangle\geqq 0 \tag{4.13}$$

これが 0 になれば, それは $|\Phi\rangle=0$ を意味せず, $|\Phi_0\rangle=0$ を意味する. そして (2.40) の分解において $\mathcal{V}_+$ は横波光子のみの状態ベクトル, $\mathcal{V}_0$ は a 光子を含む状態から成ることになる. しかしながら (2.40) の分解は, 一つの時間軸を選んで行う分解なので, $\mathcal{V}_+$ という状態ベクトル空間はローレンツ不変ではない.

ただし (2.44) で定義される $\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$ という商空間はローレンツ不変である. なお (4.12) の式は次のように書くこともできる:

$$\langle\Phi'|\Phi\rangle=\langle\Phi'|P(\mathcal{V}_+)|\Phi\rangle \qquad \text{ただし } |\Phi\rangle,\ |\Phi'\rangle\in\mathcal{V}_{\mathrm{phys}} \tag{4.14}$$

ここに $P(\mathcal{V}_+)$ は部分空間 $\mathcal{V}_+$ への射影演算子である. $\mathcal{V}_+$ はローレンツ不変でないが, (4.14) は $\mathcal{V}_+$ の選び方に依存しないから, この内積自身はローレンツ不変である. また $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ 自身もローレンツ不変である.

次に §2 で定義したオブザーバブルの例を挙げてみよう. 例えば,

$$F_{\mu\nu}(x), \qquad \partial_\mu A_\mu(x) \tag{4.15}$$

はオブザーバブルである. なんとなれば容易に示せるように

$$[F_{\mu\nu}(x), \partial_\rho A_\rho^{(+)}(y)]=0, \qquad [\partial_\mu A_\mu(x), \partial_\rho A_\rho^{(+)}(y)]=0 \tag{4.16}$$

従って $|\Phi\rangle$ が $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ に属すれば，$F_{\mu\nu}(x)|\Phi\rangle\rangle$ も $\partial_\mu A_\mu(x)|\Phi\rangle$ も $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ に属することになる．従って $|\Phi\rangle$, $|\Phi'\rangle$ が $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ に属すれば

$$\langle\Phi'|F_{\mu\nu}(x)F_{\rho\sigma}(y)|\Phi\rangle=\langle\Phi'|F_{\mu\nu}(x)P(\mathcal{V}_+)F_{\rho\sigma}(y)|\Phi\rangle \tag{4.17}$$

相互作用のある場合にはS行列が定義されるが，このS行列もオブザーバブルであって次式を満たす.

$$[S, \partial_\rho A_\rho^{(+)}(x)]=[S, \partial_\rho A_\rho(x)]=0 \tag{4.18}$$

§5 自由な電磁場——ゲージの選び方の一般化

前節までに Fermi ゲージにおける電磁場の量子化を議論した．このゲージの中で話が閉じていれば簡単であるが，後にくりこみなどを考えると初めからゲージの選び方を一般化しておいた方が便利である．そこで (3.8) を一般化して次のラグランジアン密度を導入する:

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu}-\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2 \tag{5.1}$$

このパラメター α をゲージ・パラメターと呼ぶ．$\alpha=1$ が Fermi ゲージである．そこで Euler 微分を考える.

$$[\mathcal{L}]_{A_\mu}=D_{\mu\nu}(\partial)A_\nu, \tag{5.2}$$

$$D_{\mu\nu}(\partial)=\delta_{\mu\nu}\Box+\frac{1-\alpha}{\alpha}\partial_\mu\partial_\nu \tag{5.3}$$

そこで場を量子化するために微分演算子 C を導入する.

$$C_{\mu\sigma}D_{\sigma\nu}=D_{\mu\sigma}C_{\sigma\nu}=\delta_{\mu\nu}\Box \tag{5.4}$$

これから C を求めると

$$C_{\mu\nu}(\partial)=\delta_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box} \tag{5.5}$$

分母に□が入るのが一般のゲージの特徴であり，この項が§2で議論した二重極状態，あるいは二重極ゴーストを生み出す．ゴーストと呼ぶのは前章§4の例2で述べたように不定計量と関係しているからである．この C を用いて交換関係を求めると

$$\begin{aligned}[A_\mu(x), A_\nu(y)]&=iC_{\mu\nu}(\partial_x)D(x-y)\\&=i\,\delta_{\mu\nu}D(x-y)+i(1-\alpha)\partial_\mu\partial_\nu E(x-y)\end{aligned} \tag{5.6}$$

ただし，E という関数は次式で定義される：

$$\Box E(x)=-D(x), \qquad E(x)=-\frac{1}{8\pi}\varepsilon(x_0)\theta(-x^2) \tag{5.7}$$

またこの関数は次の形に書くこともできる：

$$E(x)=-\left[\frac{\partial}{\partial m^2}\Delta(x:m^2)\right]_{m^2=0} \tag{5.8}$$

ただし $\Delta(x:m^2)$ は第3章で定義した関数 $\Delta(x)$ に対して質量 m^2 を陽に書いたものである．後にこの定義も利用する．

場の方程式は Maxwell とも Klein-Gordon とも違うが，Lorentz 条件を課することによっていずれも導けることは Fermi ゲージの場合と同じである．

さて場の方程式，$D_{\mu\nu}(\partial)A_\nu=0$ より次の関係式を得る：

$$\partial_\mu D_{\mu\nu}(\partial)A_\nu=\frac{1}{\alpha}\Box\partial_\nu A_\nu=0,$$
$$\Box(\partial_\nu A_\nu)=0 \tag{5.9}$$

同様にして場の方程式と (5.9) とを組み合わせて

$$\Box D_{\mu\nu}(\partial)A_\nu=\Box^2 A_\mu+\frac{1-\alpha}{\alpha}\partial_\mu\Box(\partial_\nu A_\nu)=\Box^2 A_\mu=0 \tag{5.10}$$

ここで注意すべきことは，$\Box A_\mu\neq 0$ となることである．それは次の交換関係から明らかである：

$$[\Box A_\mu(x), A_\nu(y)]=i\Box C_{\mu\nu}(\partial)D(x-y)$$
$$=-i(1-\alpha)\partial_\mu\partial_\nu D(x-y)\neq 0 \tag{5.11}$$

ただし α は1と異なると仮定している．従って

$$\Box A_\mu\neq 0, \qquad \Box^2 A_\mu=0 \tag{5.12}$$

この二式は二重極ゴーストの存在を示している．その証明は次のような議論によって与えられる：

二重極ゴースト

不定計量の一般論に出てきたエルミート演算子 H として質量演算子を選ぶ．

$$H=-P_\mu{}^2 \tag{5.13}$$

しからば $A_\alpha(x)|0\rangle$ という状態は二重極ゴーストを含むことが証明される．それには (2.2.2) と $P_\mu|0\rangle=0$ を用いると

$$P_\mu A_\alpha(x)|0\rangle=[P_\mu, A_\alpha(x)]|0\rangle+A_\alpha(x)P_\mu|0\rangle$$
$$=i\partial_\mu A_\alpha(x)|0\rangle$$

従って上の変形を繰り返すことにより

$$HA_\alpha(x)|0\rangle=(-P_\mu{}^2)A_\alpha(x)|0\rangle=\Box A_\alpha(x)|0\rangle \tag{5.14}$$

この状態は(5.11)の真空期待値が0でないことから明らかなように消えない．しかしながらこの状態のノルムは次に示すように0である．(5.12) により

$$\begin{aligned}\langle 0|\Box A_\alpha(x)\Box A_\beta(y)|0\rangle&=\langle 0|A_\alpha(x)(-P_\mu{}^2)(-P_\nu{}^2)A_\beta(y)|0\rangle\\&=\langle 0|A_\alpha(x)\Box^2 A_\beta(y)|0\rangle\\&=0\end{aligned} \tag{5.15}$$

従って

$$HA_\alpha(x)|0\rangle\neq 0,\qquad H^2A_\alpha(x)|0\rangle=0 \tag{5.16}$$

これは固有値 $\lambda=0$ に対して二重極ゴーストの存在を意味することは (2.26) の定義から明らかである．

Lorentz 条件

二重極ゴーストが存在する時にはフーリエ展開ができない．実際 (5.12) の解はフーリエ展開ができない．その結果二重極ゴーストの直観的理解が困難になる．そこで直観的にその構造を調べるために次に述べるような方法を採る．

$$D_{\mu\nu}^{-1}=\frac{C_{\mu\nu}}{\Box}=\frac{\delta_{\mu\nu}}{\Box}-(1-\alpha)\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box^2} \tag{5.17}$$

問題は第二項の処理であるが，まず上式を次の形に書く：

$$D_{\mu\nu}^{-1}=\frac{\delta_{\mu\nu}}{\Box}-(1-\alpha)\partial_\mu\partial_\nu\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\Box(\Box-\varepsilon^2)} \tag{5.18}$$

そして以下では ε は小さいが0ではないとして取扱うことにする．すなわち

$$D_{\mu\nu}^{-1}=\frac{\delta_{\mu\nu}}{\Box}-(1-\alpha)\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{\Box-\varepsilon^2}-\frac{1}{\Box}\right)\partial_\mu\partial_\nu \tag{5.19}$$

この逆を $D(\partial,\varepsilon)$ と書くと

$$D_{\mu\nu}(\partial,\varepsilon)=\delta_{\mu\nu}\Box+\frac{\Box}{\alpha\Box-\varepsilon^2}(1-\alpha)\partial_\mu\partial_\nu \tag{5.20}$$

さて (5.17) に対応する交換関係は

$$\begin{aligned}[A_\mu(x),A_\nu(y)]&=i\left(\delta_{\mu\nu}+\frac{1-\alpha}{\varepsilon^2}\partial_\mu\partial_\nu\right)D(x-y)\\&\quad-i\frac{1-\alpha}{\varepsilon^2}\partial_\mu\partial_\nu\Delta(x-y:\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{5.21}$$

そこでこの交換関係を再現するように A_μ を次のように書く：

$$A_\mu(x)=a_\mu(x)+\frac{1-\alpha}{2\varepsilon^2}\partial_\mu\partial_\nu a_\nu(x)+\frac{\sqrt{1-\alpha}}{\varepsilon}\partial_\mu b(x) \tag{5.22}$$

ただし

$$[a_\mu(x), a_\nu(y)]=i\delta_{\mu\nu}D(x-y), \qquad [b(x), b(y)]=i\Delta(x-y:\varepsilon^2) \tag{5.23}$$

すなわち a_μ は Fermi ゲージでの電磁場であり，b は ε を質量とする実スカラー場である．勿論この二つの場は独立であり

$$[a_\mu(x), b(y)]=0. \tag{5.24}$$

更に場の方程式は

$$\Box a_\mu=0, \qquad (\Box-\varepsilon^2)b=0. \tag{5.25}$$

これから次の運動方程式が成り立つことを示せる：

$$D_{\mu\nu}(\partial, \varepsilon)A_\nu=0 \tag{5.26}$$

上の議論では，$1-\alpha>0$ を仮定したが，$1-\alpha<0$ ならば (5.22) での $\partial_\mu b$ の係数は $\sqrt{\alpha-1}/\varepsilon$ となり，b は不定計量に従うことになる．以下では $1-\alpha>0$ として議論する．しからば

$$\partial_\mu A_\mu=\partial_\mu a_\mu+\varepsilon\sqrt{1-\alpha}\,b \tag{5.27}$$

故に Lorentz 条件

$$\partial_\mu A_\mu^{(+)}(x)|\Phi\rangle=0 \tag{5.28}$$

は，$\varepsilon\neq0$ である限りフーリエ展開において a_μ と b とは異なる質量に属するから，次の二条件に分解される．

$$\partial_\mu a_\mu^{(+)}(x)|\Phi\rangle=0, \qquad b^{(+)}(x)|\Phi\rangle=0 \tag{5.29}$$

このように Fermi ゲージ以外では b という新しい自由度が現れるが，上の第二の条件はこの自由度を殺してしまい，第一の条件で表現される Fermi ゲージでの Lorentz 条件に帰せられる．上でフーリエ展開を用いることができたのは $\varepsilon\neq0$ という仮定による．

$\alpha=1$ の Fermi ゲージの特殊性は，上の議論から明らかであるが，$\alpha=0$ の Landau ゲージも C が横波部分のみから成るという点で特殊である．

量子力学に不定計量を初めて導入したのは Dirac であり，また電磁場の量子化に不定計量を導入したのは Gupta と Bleuler である．

第5章　相互作用のある場合の量子化

今まで相互作用の無い自由場の量子化について考えてきた．この場合には場の方程式が線形であるので陽に解くことができ，それによって正準量子化の方法が座標系の選び方によらない相対論的に不変な量子化法であることが示された．ところが相互作用の有る場合の量子化については同時刻交換関係から出発することになるが，その相対論的不変性については明らかでない．この場合には Schrödinger 表示に基づくか，Heisenberg 表示にに基づくかの選択がある．しかしいずれにしても正準量子化の方法の相対論的不変性の問題に対して明確な結論を与えることが難しい．この問題に対して明確な解決を与えたのは，朝永および Schwinger によって導入された相互作用表示の方法である．

この表示においては，交換関係の不変性も，Schrödinger 方程式の不変性も明らかになる．そしてこの相対論的不変性の明らかな表示に基づいて Heisenberg 表示での場の量子論に進むことができるようになる．以下ではまず相互作用表示における超多時間理論について解説する．

§1　朝永-Schwinger 方程式

まず相互作用のある場に対する Schrödinger 方程式から出発する．

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t)=H\Psi(t) \tag{1.1}$$

ここに H は全系のハミルトニアンであり，自由部分と相互作用部分からなる．

$$H=\int d^3x\mathscr{H}(\boldsymbol{x})=\int d^3x\mathscr{H}_{\rm f}(\boldsymbol{x})+\int d^3x\mathscr{H}_{\rm int}(\boldsymbol{x})=H_{\rm f}+H_{\rm int} \tag{1.2}$$

ここに f は自由部分 (free part), int は相互作用部分 (interaction part) を表わしている．後にくりこみに関連して議論されるが，この分け方は実はあまり自明ではない．しかしここではあまり深い議論はしないでおく．

次にユニタリー変換 $U(t)$ を導入する．

$$U(t)=\exp(itH_{\rm f}) \tag{1.3}$$

そして次のような場の演算子を定義する：

$$\varphi_\alpha(x)=\varphi_\alpha(\boldsymbol{x},t)=U(t)\varphi_\alpha(\boldsymbol{x})U(t)^{-1} \tag{1.4}$$

しからば $\varphi_\alpha(x)$ は自由場の方程式と自由場の交換関係を満たすことになる．

$$D_{\alpha\beta}(\partial)\varphi_\beta(x)=0, \tag{1.5}$$

$$[\varphi_\alpha(x),\varphi_\beta^\dagger(y)]_\pm=iC_{\alpha\beta}(\partial)\Delta(x-y) \tag{1.6}$$

従って自由場は完全に相対論的不変な量子化に従っていることになる．そこで

$$\Phi(t)=U(t)\Psi(t) \tag{1.7}$$

により新しい状態ベクトル $\Phi(t)$ を導入すると，その従う方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t)=\left(U(t)\int d^3x\,\mathscr{H}_{\rm int}(\boldsymbol{x})U(t)^{-1}\right)\Phi(t). \tag{1.8}$$

ところで $\mathscr{H}_{\rm int}(x)$ を $\varphi_\alpha(x)$ などの場の演算子の多項式とすると

$$U(t)\mathscr{H}_{\rm int}[\varphi_\alpha(\boldsymbol{x}),\cdots]U(t)^{-1}=\mathscr{H}_{\rm int}[U(t)\varphi_\alpha(\boldsymbol{x})U(t)^{-1},\cdots]=\mathscr{H}_{\rm int}[\varphi_\alpha(x),\cdots] \tag{1.9}$$

従って方程式 (1.8) は次の形に書くことができる：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t)=\int d^3x\mathscr{H}_{\rm int}[\varphi_\alpha(x),\cdots]\Phi(t) \tag{1.10}$$

この表示では場の演算子は自由場の方程式に従うが，状態ベクトルは全ハミルトニアンの相互作用部分をハミルトニアンとする Schrödinger 方程式に従う．そこでこの表示を相互作用表示と呼ぶ．明らかに自由場に対しては，(1.10) より Φ は時間に依存しないことになり，相互作用表示は Heisenberg 表示と一致する．

方程式 (1.10) はこのままの形では相対論的不変性が明らかでない．すなわち一つの時間軸を固定しているからである．これをいかにして相対論的に不変な形に書き直すかは，Dirac の多時間理論との類推に基づいて朝永により考えられた．ここでは Dirac の多時間理論に言及することなしに直接導いてみよう．

まず $\Phi(t)$ という状態ベクトルで表わされる内容は，すべての観測は一つの時間軸に対して同時刻に行われなければならないことを意味している．これはあまりにもきつい制限ではないだろうか？　空間のいろいろな点での観測が必ずしも同時刻でなくても良いのではないだろうか？　例えば点 (x_1, y_1, z_1) においては時刻 t_1 にて，点 (x_2, y_2, z_2) においては時刻 t_2 にて観測を行うというようなことがあっても良いのではないか？　この際二点間の距離が空間的であ

れば，Einstein の因果律によりお互いに干渉しないことになる．すなわち

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-(t_1-t_2)^2>0. \tag{1.11}$$

そこで空間の各点で必ずしも同じでない時刻を考える．すなわち

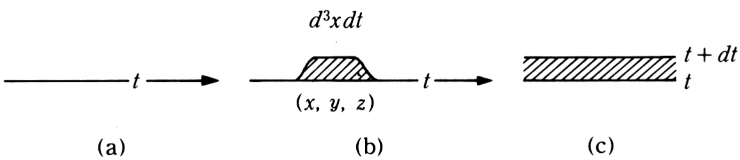
$$t=f(x,y,z) \tag{1.12}$$

これは四次元時空内の一つの超曲面を表わす．かつこの超曲面上の二点はお互いに空間的に距っているものとする．これを空間的超曲面と呼び σ と書くことにする．それではそれに対応して $\Phi[\sigma]$ という状態ベクトルを導入したら，これはどのような方程式に従うであろうか？　これは $t=\text{const}$ に対応する $\Phi(t)$ の一般化である．そこでこの鍵を探る意味で，方程式 (1.10) を次の形に書く：

$$\Phi(t+dt)=\Phi(t)-idt\int d^3x\mathscr{H}_{\text{int}}[\varphi_\alpha(x),\cdots]\Phi(t) \tag{1.13}$$

そして超平面 t を $t+dt$ に変形するには空間の各点 (x,y,z) で d^3x という無限小の体積の所だけ dt だけずらすと考える．ただし空間的という条件を破らないようにスムースに変形するとしよう．これをすべての点で行うとする．

第3図　超平面の変形



そこで無限小体積 $d\omega=d^3xdt$ の変形に対して状態ベクトルには

$$1-id\omega\mathscr{H}_{\text{int}}(x) \tag{1.14}$$

という因子が乗ぜられると仮定してみよう．しからばこのような因子を空間のすべての点を覆うように乗じてゆけば，$d\omega^2$ 以上の無限小の項を無視することによって方程式 (1.13) が再現される．こうなれば，超曲面への一般化は明らかである．超曲面 σ が，時空点 x の近傍で無限小体積 $d\omega$ だけの変形によって σ' に変形されたとする．かつ σ も σ' も空間的超曲面であるとする．しからば

$$\Phi[\sigma']=(1-id\omega\mathscr{H}_{\text{int}}(x))\Phi[\sigma] \tag{1.15}$$

ただし σ' は σ の未来にある超曲面であるとし，次の略記を用いている：

$$\mathscr{H}_{\text{int}}(x)=\mathscr{H}_{\text{int}}[\varphi_\alpha(x),\cdots] \tag{1.16}$$

ここで気が付くことは，空間的超曲面という概念は，座標系の選び方には依ら

ないものであり，四次元的無限小体積 $d\omega$ もローレンツ不変量であり，かつまたハミルトニアン密度 $\mathscr{H}_{\rm int}(x)$ も簡単な場合にはスカラーである．従って，方程式 (1.15) は座標系の選び方に依存しない意味を持つ．この方程式を微分形に書くために次の汎関数微分を定義する：

$$\lim_{d\omega\to 0}\frac{\Phi[\sigma']-\Phi[\sigma]}{d\omega}=\frac{\delta\Phi[\sigma]}{\delta\sigma(x)} \tag{1.17}$$

この記号を用いれば，(1.15) は次の形に書ける：

$$i\frac{\delta\Phi[\sigma]}{\delta\sigma(x)}=\mathscr{H}_{\rm int}(x)\Phi[\sigma] \tag{1.18}$$

これを朝永-Schwinger の方程式と呼ぶ．また空間の各点で異なる時刻を考えるという意味で，この理論を超多時間理論と呼ぶ．

この理論は朝永により初めて定式化され，QED，特にくりこみ理論に応用され威力を発揮した．アメリカでも Schwinger によりその有用性が認識されて戦後の中心的課題となった．

さて簡単な場合にはハミルトニアン密度は点 x のみに依存し，σ には依存しない．この場合の積分可能条件について考えよう．すなわち，

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\cdot\frac{\delta}{\delta\sigma(y)}\Phi[\sigma]=\frac{\delta}{\delta\sigma(y)}\cdot\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\Phi[\sigma] \tag{1.19}$$

という条件を (1.18) を用いて書き替えると

$$\mathscr{H}_{\rm int}(y)\mathscr{H}_{\rm int}(x)-\mathscr{H}_{\rm int}(x)\mathscr{H}_{\rm int}(y)=0 \tag{1.20}$$

ただし点 x と y とは空間的超曲面 σ の上にあるとする．この条件は，空間的に距った二点におけるハミルトニアン密度は可換であるということを意味し，積分可能条件と呼ばれる．この条件は微視的因果律と密接な関係にある．

次に初期値問題について考えてみよう．σ_0 という空間的超曲面上において状態ベクトルが与えられたとして，その時間的発展を追ってみよう．

$$\Phi[\sigma_0]=\Phi \tag{1.21}$$

この初期条件の下に一般の空間的超曲面 σ における状態ベクトルが

$$\Phi[\sigma]=U[\sigma,\sigma_0]\Phi \tag{1.22}$$

という形に置けると仮定し，実際にこの形で初期条件と朝永-Schwinger 方程式，あるいは簡単に TS 方程式を満たさせるように U を選んでやる．まず (1.22) が TS 方程式を満たすということから

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}U[\sigma,\sigma_0]=\mathscr{H}_{\rm int}(x)U[\sigma,\sigma_0]. \tag{1.23}$$

また初期条件 (1.21) に対応して

$$U[\sigma_0,\sigma_0]=1 \tag{1.24}$$

このような U を一般変換関数と呼ぶ．これはハミルトニアン密度がエルミートならばユニタリーになる．このことを示すには，まず方程式 (1.23) のエルミート共役な方程式を書いてやると

$$-i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}U^{\dagger}[\sigma,\sigma_0]=U^{\dagger}[\sigma,\sigma_0]\mathscr{H}_{\rm int}(x) \tag{1.25}$$

(1.23) と (1.25) とを組み合わせると

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}U^{\dagger}[\sigma,\sigma_0]U[\sigma,\sigma_0]=0$$

すなわち $U^{\dagger}U$ という積は σ に依存しないから σ として σ_0 を代入すると

$$U^{\dagger}[\sigma,\sigma_0]U[\sigma,\sigma_0]=1 \tag{1.26}$$

また (1.22) の定義から明らかなように次のような合成則が成り立つ:

$$U[\sigma_2,\sigma_0]=U[\sigma_2,\sigma_1]U[\sigma_1,\sigma_0] \tag{1.27}$$

この式は系の時間的発展が過去の履歴に依らないことを意味しているので，この性質はある意味で因果性の条件を表わしている．また (1.27) で $\sigma_2=\sigma_0$ と置いてやると，(1.26) を考慮して

$$U[\sigma_0,\sigma_1]=(U[\sigma_1,\sigma_0])^{-1}=U^{\dagger}[\sigma_1,\sigma_0] \tag{1.28}$$

結局この式は U のユニタリー性を表わしていることになる．

特に σ として空間的超平面を選べば，もともとの時間座標を導入して U を

$$U(t_2,t_1)$$

のように書くことができる．この時に与えられた演算子の相互作用表示における期待値を書くと，(ここではブラ・ケット記号を用いていないが)

$$(\boldsymbol{\Phi}(t),\varphi_\alpha(x)\boldsymbol{\Phi}(t))=(\boldsymbol{\Phi},U(t,t_0)^{-1}\varphi_\alpha(x)U(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}) \tag{1.29}$$

この式は状態ベクトル $\boldsymbol{\Phi}$ が時間に依存しないことから

$$U(t,t_0)^{-1}\varphi_\alpha(x)U(t,t_0)=\varphi_\alpha^{(H)}(x) \tag{1.30}$$

が Heisenberg 表示での演算子であることを示している．そこで Heisenberg 演算子 $\varphi_\alpha^{(H)}(x)$ が与えられた時に t_0 の選び方によって種々の相互作用表示を定義しうることになる．$t_0\to-\infty$，あるいは $t_0\to\infty$ に対応する相互作用表示での

演算子をそれぞれ $\varphi_\alpha^{\rm in}$, $\varphi_\alpha^{\rm out}$ のように書くことにすると，

$$\varphi_\alpha^{(H)}(x)=U(t,-\infty)^{-1}\varphi_\alpha^{\rm in}(x)U(t,-\infty)$$
$$=U(t,\infty)^{-1}\varphi_\alpha^{\rm out}(x)U(t,\infty) \tag{1.31}$$

あまり厳密な方法ではないが，上の式で $t\to\infty$ としてやると，$U(\infty,\infty)=1$ としてやって次式を得る：

$$\varphi_\alpha^{\rm out}(x)=S^{-1}\varphi_\alpha^{\rm in}(x)S, \tag{1.32}$$

$$S=U(\infty,-\infty) \tag{1.33}$$

この S をS行列と呼ぶ.

§2 Heisenberg 演算子の遅延積展開

前節で述べたように場の演算子の量子化は相互作用表示では自由場の時と全く同様に行われる．それでは Heisenberg 表示での量子化はどうやったら良いであろうか？ これをするには通常 Heisenberg 演算子を相互作用表示で量子化された演算子で表現するという方法を用いる．この表現問題は一般的には解けないので摂動論に基づくことが多い．それにも二つの方法があって，第一は遅延積展開であり，第二は Yang-Feldman の方法である．この節では第一の方法について議論する.

この節では Heisenberg (表示での) 演算子を φ_α と書き，相互作用表示での演算子として $\varphi_\alpha^{\rm in}$ を選ぶ．その間の関係は (1.31) で与えられるから

$$\varphi_\alpha(x)=U(t,-\infty)^{-1}\varphi_\alpha^{\rm in}(x)U(t,-\infty), \qquad t=x_0. \tag{2.1}$$

この表現を摂動展開する，あるいは結合定数に関する巾級数に展開する．そこで相互作用表示における相互作用ハミルトニアンを導入する.

$$H(t)=\int_{x_0=t}d^3x\,\mathscr{H}_{\rm int}(x). \tag{2.2}$$

そして次のような量を導入する：

$$\mathcal{O}(t_0)=U(t,t_0)^{-1}\mathcal{O}U(t,t_0). \tag{2.3}$$

しからば一時間理論での TS 方程式から次の式が得られる：

$$i\frac{\partial}{\partial t_0}\mathcal{O}(t_0)=[H(t_0),\mathcal{O}(t_0)] \tag{2.4}$$

そこで $t_0=t$ の時に (1.24) の特別な場合の式 $U(t,t)=1$，あるいは $\mathcal{O}(t)=\mathcal{O}$ を用いて t_0 につき t_0 から t まで積分すると

$$\mathcal{O}(t_0)=\mathcal{O}-i\int_{t_0}^{t}dt_0'[\mathcal{O}(t_0'),H(t_0')] \tag{2.5}$$

という積分方程式が得られる．そこで積分の中にある $\mathcal{O}(t_0')$ に再び (2.5) を代入するということを繰り返すイテレーション (iteration) の方法を用いると

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(t_0)&=\mathcal{O}-i\int_{t_0}^{t}dt_0'[\mathcal{O},H(t_0')]+(-i)^2\int_{t_0}^{t}dt_0'\int_{t_0'}^{t}dt_0''[[\mathcal{O},H(t_0'')],H(t_0')]+\cdots\\&=\mathcal{O}-i\int_{t_0}^{t}dt'[\mathcal{O},H(t')]+(-i)^2\int_{t_0}^{t}dt'\int_{t_0}^{t'}dt''[[\mathcal{O},H(t')],H(t'')]+\cdots\end{aligned} \tag{2.6}$$

そこで次のような置き換えをする：

$$\mathcal{O}(t_0)\to\varphi_\alpha(x),\qquad \mathcal{O}\to\varphi_\alpha^{\text{in}}(x),\qquad t_0\to-\infty$$

しからば次の展開式が得られる：

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(x)&=U(t,-\infty)^{-1}\varphi_\alpha^{\text{in}}(\boldsymbol{x},t)U(t,-\infty)\\&=\varphi_\alpha^{\text{in}}(x,t)-i\int_{-\infty}^{t}dt'[\varphi_\alpha^{\text{in}}(\boldsymbol{x},t),H(t')]\\&\qquad+(-i)^2\int_{-\infty}^{t}dt'\int_{-\infty}^{t'}dt''[[\varphi_\alpha^{\text{in}}(x,t),H(t')],H(t'')]+\cdots\end{aligned} \tag{2.7}$$

次に演算子の遅延積を定義する．

$$R[\mathcal{O}(t):A(t_1)\cdots A(t_n)]=(-i)^n[\cdots[\mathcal{O}(t),A(t_1')]\cdots A(t_n')]$$

ただし $t>t_1'>\cdots>t_n'$ であり，$(t_1',\cdots,t_n')$ は $(t_1,\cdots,t_n)$ の置換である．もしも t が t_j のいずれかより小さい時には $R=0$ と定義する．こうすれば R は $t_1,\cdots,t_n$ の対称関数となるので，(2.7) を R を用いて表現するとその一般項は

$$\begin{aligned}&(-i)^n\int_{-\infty}^{t}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2\cdots\int_{-\infty}^{t_{n-1}}dt_n[\cdots[\varphi_\alpha^{\text{in}}(\boldsymbol{x},t),H(t_1)]\cdots H(t_n)]\\&=\int_{-\infty}^{t}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2\cdots\int_{-\infty}^{t_{n-1}}dt_nR[\varphi_\alpha^{\text{in}}(\boldsymbol{x},t):H(t_1)\cdots H(t_n)]\\&=\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{t}dt_1\int_{-\infty}^{t}dt_2\cdots\int_{-\infty}^{t}dt_nR[\varphi_\alpha^{\text{in}}(\boldsymbol{x},t):H(t_1)\cdots H(t_n)]\\&=\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{\infty}dt_2\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dt_nR[\varphi_\alpha^{\text{in}}(\boldsymbol{x},t):H(t_1)\cdots H(t_n)]\end{aligned}$$

この式と (2.2) とを組み合わせて (2.7) の展開を書き直すと

$$\varphi_\alpha(x)=\varphi_\alpha^{\text{in}}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_nR[\varphi_\alpha^{\text{in}}(x):\mathcal{H}_{\text{int}}(x_1)\cdots\mathcal{H}_{\text{int}}(x_n)] \tag{2.8}$$

この式は実は第3章§4での議論の一般化である.

§3　Heisenberg 演算子の Yang-Feldman 展開

次に Heisenberg 演算子を場の方程式を利用して展開する方法を考える. この方法はもともと Yang と Feldman によって導入されたものである. そしてまた第3章§4で用いられた方法も実はこの方法に基づいている.

まずラグランジアン密度を自由な部分と相互作用の部分とに分ける. 前節でも述べたように実はこの分け方は自明ではない.

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\rm f}+\mathcal{L}_{\rm int} \tag{3.1}$$

そこで次に Euler-Lagrange の方程式を書くが, その際に上の分け方を残しておく. すなわち,

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}]_{\varphi_\alpha^+}&=[\mathcal{L}_{\rm f}]_{\varphi_\alpha^+}+[\mathcal{L}_{\rm int}]_{\varphi_\alpha^+}\\&=D_{\alpha\beta}(\partial)\varphi_\beta+[\mathcal{L}_{\rm int}]_{\varphi_\alpha^+}=0\end{aligned} \tag{3.2}$$

この方程式を解くために第3章§4にある第2図を思い出そう. 相互作用はある有限な時空領域 Ω でのみ存在すると仮定する. すなわち結合定数 g が x の関数であり, Ω の中の点でのみ $g\neq 0$ であり, Ω の外では $g=0$ とする. 従って第2図で $t>T_2$, あるいは $t<T_1$ では $g=0$ と仮定する. しからば方程式 (3.2) の解はこの二つの領域では

$$\varphi_\alpha=\begin{cases}\varphi_\alpha^{\rm in}, & t<T_1 \text{ に対して}\\ \varphi_\alpha^{\rm out}, & t>T_2 \text{ に対して}\end{cases} \tag{3.3}$$

そしてすべての問題を解いた後に $T_1\to-\infty$, $T_2\to\infty$ とする. また

$$D_{\alpha\beta}(\partial)\varphi_\beta^{\rm in}(x)=D_{\alpha\beta}(\partial)\varphi_\beta^{\rm out}(x)=0 \tag{3.4}$$

により二つの自由場は全時空に接続されて定義される.

そこで一般の場合に次のように置く:

$$\varphi_\alpha(x)=\varphi_\alpha^{\rm in}(x)+\varphi'_\alpha(x) \tag{3.5}$$

この式を (3.2) に代入し, (3.4) を用いると

$$D_{\alpha\beta}(\partial)\varphi'_\beta(x)=-[\mathcal{L}_{\rm int}]_{\varphi_\alpha^+}(x) \tag{3.6}$$

この方程式を積分するために遅延 Δ 関数 Δ^R を (3.4.12) により導入すると

$$\varphi'_\alpha(x)=\int_\Omega d^4x'\Delta^R_{\alpha\beta}(x-x')[\mathcal{L}_{\rm int}]_{\varphi_\beta^+}(x') \tag{3.7}$$

そして Ω を全時空に拡げて, $g(x)\to g$ としてやると

$$\varphi_\alpha(x)=\varphi_\alpha^{\rm in}(x)+\int d^4x'\Delta^R_{\alpha\beta}(x-x')[\mathcal{L}_{\rm int}]_{\varphi_\beta^\dagger}(x') \tag{3.8}$$

これは $\varphi_\alpha(x)$ に対する非線形積分方程式である．また同様に先行 Δ 関数を使って

$$\varphi_\alpha(x)=\varphi_\alpha^{\rm out}(x)+\int d^4x'\Delta^A_{\alpha\beta}(x-x')[\mathcal{L}_{\rm int}]_{\varphi_\beta^\dagger}(x') \tag{3.9}$$

この積分方程式を解くことにより量子化された場の演算子が求められる．(3.8)と(3.9)との差をとると，

$$\varphi_\alpha^{\rm out}(x)=\varphi_\alpha^{\rm in}(x)-\int d^4x'\Delta_{\alpha\beta}(x-x')[\mathcal{L}_{\rm int}]_{\varphi_\beta^\dagger}(x') \tag{3.10}$$

あるいは(1.32)より

$$S^{-1}\varphi_\alpha^{\rm in}(x)S=\varphi_\alpha^{\rm in}(x)-\int d^4x'\Delta_{\alpha\beta}(x-x')[\mathcal{L}_{\rm int}]_{\varphi_\beta^\dagger}(x') \tag{3.11}$$

がS行列を決定する方程式となる．

上に与えた方程式を Yang-Feldman の方程式と呼ぶ．また交換関係は

$$[\varphi_\alpha^{\rm in}(x),\varphi_\beta^{\dagger{\rm in}}(y)]_\pm=[\varphi_\alpha^{\rm out}(x),\varphi_\beta^{\dagger{\rm out}}(y)]_\pm=iC_{\alpha\beta}(\partial)\Delta(x-y) \tag{3.12}$$

ただし±の符号は考えている場の統計により選ぶ．

§4　相互作用の例

今まで相互作用の形を具体的に指定することなしに一般論を展開してきたが，良く知られた例を挙げてみよう．

まず，電磁場と電子場とが共存する場合を取扱う QED を考えてみよう．電磁的相互作用の導入は一般的に Dirac によって与えられているが，荷電 e を持つ粒子に対応する場 ψ が存在する時に，その自由場のラグランジアン密度の中で次のような置換えをすれば良い：

$$\begin{aligned}\partial_\mu\psi &\to (\partial_\mu-ieA_\mu)\psi,\\ \partial_\mu\overline{\psi} &\to (\partial_\mu+ieA_\mu)\overline{\psi}\end{aligned} \tag{4.1}$$

ここに e は場 ψ の量子の荷電であり，$-e$ はその反粒子の荷電である．このような置換えにより生ずる相互作用を極小電磁的相互作用と呼ぶ．Dirac 粒子に対するラグランジアン密度に上の置換えを行うと相互作用の部分は

$$\mathcal{L}_{\rm int}=j_\mu A_\mu \tag{4.2}$$

で与えられる．ここに j_μ は四元電流密度であり

$$j_\mu = ie\,\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad あるいは \quad \frac{1}{2}ie[\bar{\psi}, \gamma_\mu\psi] \tag{4.3}$$

で与えられる．後者の意味については第2章§9を参照のこと．そこで全系のラグランジアン密度を書いてやると

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}[\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + m]\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2 \tag{4.4}$$

さて QED を特徴付けるのはいわゆる**ゲージ不変性**である．すなわち，

$$\begin{aligned} &第一種ゲージ変換： \quad A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \\ &第二種ゲージ変換： \quad \psi \to e^{ie\Lambda}\psi, \quad \bar{\psi} \to e^{-ie\Lambda}\bar{\psi} \end{aligned} \tag{4.5}$$

を考えると (4.4) の最後の項を除いて不変である．ただし Λ は時空座標の任意の関数である．これを**ゲージ不変性**と呼ぶ．しかしながらゲージ不変なラグランジアン密度に対しては，自由部分，すなわち $e=0$ として残った部分から得られる $D_{\mu\nu}(\partial)$ は逆を持たず，従って量子化ができない．そのために (4.4) で最後の項，いわゆるゲージ固定項を付加するのである．これによって量子化は可能になるが，一般的なゲージ不変性は失われ，制限されたゲージ不変性のみ残ることになる．すなわち，(4.4) のラグランジアン密度は Λ が

$$\Box\Lambda = 0 \tag{4.6}$$

という条件を満たす場合にのみ不変となる．

第2章において自由な Dirac 粒子について議論したが，ここで電磁場との相互作用の性質について特徴的なことを一つ述べておく．それは電子の磁気能率に関するものである．電子と電磁場との共存する系のラグランジアン密度から場の方程式を導くと

$$[\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + m]\psi = 0, \qquad \bar{\psi}[\gamma_\mu(\overleftarrow{\partial}_\mu + ieA_\mu) - m] = 0 \tag{4.7}$$

$$\Box A_\mu + \frac{1-\alpha}{\alpha}\partial_\mu\partial_\nu A_\nu = -j_\mu \tag{4.8}$$

ただし (4.7) の第二式での $\overleftarrow{\partial}_\mu$ は左側にある $\bar{\psi}$ を微分する演算子である．これから容易に電流密度の保存則が得られる：

$$\partial_\mu j_\mu = 0 \tag{4.9}$$

また (4.8) の発散をとることにより

$$\Box\partial_\mu A_\mu = 0 \tag{4.10}$$

この式と Yang-Feldman 形式とを組み合わせると

$$\partial_\mu A_\mu = \partial_\mu A_\mu^{\mathrm{in}} = \partial_\mu A_\mu^{\mathrm{out}}. \tag{4.11}$$

ところで

$$S^{-1}\partial_\mu A_\mu^{\rm in} S=\partial_\mu A_\mu^{\rm out} \tag{4.12}$$

であるから，(4.11) はS行列と $\partial_\mu A_\mu$ とが可換であることを意味する．

$$[S, \partial_\mu A_\mu]=0 \tag{4.13}$$

これが (4.4.18) 式である．従ってS行列はオブザーバブルである．

さて次に (4.7) の第一式に左側から

$$\gamma_\lambda(\partial_\lambda-ieA_\lambda)-m$$

という演算子を乗じてみよう．すると

$$[\gamma_\lambda\gamma_\mu(\partial_\lambda-ieA_\lambda)(\partial_\mu-ieA_\mu)-m^2]\psi=0 \tag{4.14}$$

そこで γ 行列の積を次のように書き換える：

$$\gamma_\lambda\gamma_\mu=\delta_{\lambda\mu}+i\sigma_{\lambda\mu}$$

すると (4.14) は次の形に書ける：

$$\left[(\partial_\lambda-ieA_\lambda)^2-m^2+\frac{e}{2}\sigma_{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\right]\psi=0 \tag{4.15}$$

この式に対して非相対論的な近似をして Schrödinger の方程式を導く．まず電磁場は量子化されていない静的な外場であるとして微分演算子を $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{p}$ とに置き換えてやると

$$(E-e\varphi)^2\psi=\left[(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2+m^2-\frac{e}{2}\sigma_{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\right]\psi \tag{4.16}$$

この系のエネルギー固有値 E を $E=m+W$ と書き

$$\left|\frac{W-e\varphi}{2m}\right|\ll 1 \tag{4.17}$$

という非相対論的近似を導入すると，(4.16) は次の形に近似される．

$$W\psi=\left[\frac{(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2}{2m}+e\varphi-\frac{e}{4m}\sigma_{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\right]\psi \tag{4.18}$$

W は非相対論的 Schrödinger 方程式におけるエネルギーを表わし，この近似で ψ の4成分中大きい2成分のみを残すとすれば，(4.18) の最後の項は

$$-\frac{e}{2m}\sigma\boldsymbol{H} \tag{4.19}$$

と書けることになる．これは電子の磁気能率が $e/2m$ であることを意味する．このことは非相対論的量子力学では経験的事実であったが，Dirac の理論では第一原理から出発して証明され，Dirac 理論を支持する実験的根拠の一つとなったのである．

次の例として核子とπ中間子との系について考えよう．この相互作用は湯川によって初めて導入されたものであり，現在のクォーク模型に基づいた考え方によれば基本的というよりは現象論的な相互作用である．湯川理論によれば，核子間の力，すなわち核力，は核子同士がπ中間子を交換することによって生ずる．核力には，同じ角運動量状態では核子の荷電によらないという経験的に知られた性質があり，これを核力の**荷電独立性**と呼ぶ．この性質は核子とπ中間子の相互作用に対して一つの制限を与えるものである．例として二核子が^{1}S状態にあるとする．ここに左肩の1は二核子のスピンを合成したものが0でスピン一重項に属することを意味し，Sは相対軌道角運動量が0であることを意味する．この状態で陽子同士，中性子同士，中性子と陽子の間のポテンシャルは

$$V_{pp}(^1\mathrm{S})=V_{nn}(^1\mathrm{S})=V_{np}(^1\mathrm{S}) \tag{4.20}$$

という近似的等式を満たす．これに反して^{3}Sという状態は，Pauliの原理により中性子と陽子の系にしか存在せず上のような比較の対象とはならない．この荷電独立性は一種の対称性を意味し，それに対応してある種の保存量が存在する．この保存量はその数学的性質がスピンに似ていてアイソ・スピンと呼ばれる．以下においてまずアイソ・スピンを導入しよう．

まず二電子系のスピンについて考える．スピンが上向きと下向きの状態を表わすのにα, βと書くことにすると，スピンの三重項と一重項の波動関数は

$$\text{三重項：}\begin{cases}\alpha(1)\alpha(2)\\[1ex] \dfrac{\alpha(1)\beta(2)+\beta(1)\alpha(2)}{\sqrt{2}}\\[1ex] \beta(1)\beta(2)\end{cases}\qquad \text{一重項：}\quad \frac{\alpha(1)\beta(2)-\beta(1)\alpha(2)}{\sqrt{2}} \tag{4.21}$$

で与えられる．同じ多重項の中の状態はお互いにスピンの回転によって移り変わることが出来る．

そこで陽子状態pと中性子状態nとを同じ核子の二つの異なる状態と見なすと二核子系の荷電状態はスピンの時と同様に三重項と一重項とになる．具体的には，(4.21)においてαをpに，βをnに書き換えてやれば良い．

さて核力の荷電独立性は，同じ多重項のメンバーに対しては核力ポテンシャルが同じであることを意味する，例えば^{1}S状態はアイソ・スピン三重項に，そ

して ^{3}S 状態はアイソ・スピン一重項に対応し，陽子・中性子状態しかない．

$$\text{三重項：}\begin{cases} p(1)p(2) \\ \dfrac{p(1)n(2)+n(1)p(2)}{\sqrt{2}} \\ n(1)n(2) \end{cases} \qquad \text{一重項：}\quad \frac{p(1)n(2)-n(1)p(2)}{\sqrt{2}} \tag{4.22}$$

さてスピンの時には Pauli 行列 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ が次式で定義されている：

$$\begin{aligned} &\sigma_x\alpha=\beta, && \sigma_y\alpha=i\beta, && \sigma_z\alpha=\alpha, \\ &\sigma_x\beta=\alpha, && \sigma_y\beta=-i\alpha, && \sigma_z\beta=-\beta \end{aligned} \tag{4.23}$$

そこでアイソ・スピンの時にも同様に τ_1, τ_2, τ_3 という三つの行列を導入し，次式で定義する．

$$\begin{aligned} &\tau_1 p=n, && \tau_2 p=in, && \tau_3 p=p, \\ &\tau_1 n=p, && \tau_2 n=-ip, && \tau_3 n=-n \end{aligned} \tag{4.24}$$

さて核子が A 個ある時の全系のアイソ・スピンを普通のスピンにならって

$$I_a=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{A}\tau_a^{(k)} \qquad (k\text{ は核子の番号}) \tag{4.25}$$

により定義する．しからばその3成分の間の交換関係は角運動量と同様に

$$[I_a, I_b]=i\varepsilon_{abc}I_c \tag{4.26}$$

で与えられる．さて二核子間ポテンシャル V に対する荷電独立性の要求は

$$[I_a, V]=0 \tag{4.27}$$

によって表現されることになる．これは実は近似的にしか成り立たない．

そこで3成分 I_1, I_2, I_3 をまとめて抽象的な荷電空間のベクトルと見なし，それを $\hat{I}$ と書くことにする．この系は荷電空間での回転に対して不変であるが，陽子・中性子間の僅かな質量差とクーロン相互作用のためにこの不変性は近似的となる．核子のアイソ・スピンは 1/2 であり，π^+, π^0, π^- という三つの荷電状態を持つ π 中間子のアイソ・スピンは1である．すなわち $\hat{I}^2$ の固有値を $I'(I'+1)$ と書くと，この多重項は角運動量の時と全く同じく $(2I'+1)$ 重に縮退している．ただし π 中間子を含む場合のアイソ・スピンは (4.25) を一般化しなければならない．

さて π 中間子の方は後述のようにスピンが0であるのでそのラグランジアン密度は，(2.4.3) に従って3成分の実スカラー場による記述を適用すれば

$$\mathscr{L}_\pi=-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{2}[(\partial_\lambda\varphi_\alpha)^2+\mu^2\varphi_\alpha{}^2] \tag{4.28}$$

と書くことができる．ここに $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ は荷電空間でのベクトル $\hat{\varphi}$ の3成分を表わし，(2.4.2) により φ_1, φ_2 は $\varphi, \varphi^\dagger$ の実部と虚部に対応する．φ は π^+ を消滅させ，π^- を生成する演算子であり，$\varphi^\dagger$ はその逆の演算子となる．φ_3 は π^0 を生成消滅させる演算子である．次に核子の方は荷電空間の回転に対して2次元の既約表現に属し，通常の空間回転におけるスピノールと数学的に同等となるのでアイソ・スピノールと呼ばれる．π 中間子はアイソ・ベクトルである．そこで核子のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_N = -\sum_{\alpha=1}^{2} \overline{\psi}_\alpha (\gamma_\mu \partial_\mu + M) \psi_\alpha \tag{4.29}$$

ただし ψ_1 は陽子成分 ψ_p を表わし，ψ_2 は中性子成分 ψ_n を表わす．しからば (4.24) に対応して τ 行列は Pauli 行列と全く同じ表現を持つことになる．

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

さて ψ はアイソ・スピノールであるから，$\overline{\psi}\tau_\alpha\psi$ は荷電空間ではアイソ・ベクトルとなり，アイソ・ベクトルの中間子場 $\hat{\varphi}$ とのスカラー積を作れば荷電空間での回転に対して不変なアイソ・スカラーになる．核力の荷電独立性を保証するためには，核子・中間子系の相互作用はアイソ・スカラーでなければならない．このような考え方は Kemmer によって初めて導入された．そこで相互作用として

$$\overline{\psi}\mathcal{O}\hat{\tau}\psi \cdot \hat{\varphi} \tag{4.31}$$

に比例するものを採用する．ここに $\hat{\tau}\cdot\hat{\varphi}$ は二つのアイソ・ベクトルのスカラー積を意味する．$\mathcal{O}$ は Dirac 行列で，π 中間子は実際には擬スカラーであるので，$\mathcal{O} = i\gamma_5$ と選ぶ．明らかに (4.31) は $\hat{\omega}$ を無限小回転ベクトルとした時に，次のような荷電空間における無限小変換に対して不変である．

$$\psi \to \psi + \frac{i}{2}(\hat{\omega}\cdot\hat{\tau})\psi, \qquad \hat{\varphi} \to \hat{\varphi} - \hat{\omega} \times \hat{\varphi} \tag{4.32}$$

ただし×は荷電空間におけるベクトル積を意味する．

荷電独立性の考え方は実験的に多くの反応で検証されているが，ここで一つの例を挙げておく．重陽子 d がアイソ・スピン 0 を持つことから

$$\frac{d\sigma(\mathrm{p}+\mathrm{p} \to \mathrm{d}+\pi^+)}{d\Omega} = 2\frac{d\sigma(\mathrm{n}+\mathrm{p} \to \mathrm{d}+\pi^0)}{d\Omega} \tag{4.33}$$

という二つの微分断面積の間の関係式を導くことができ，この関係式は実験と

一致している．これは荷電独立性に対する一つの支持を与える．

さて π 中間子，あるいはパイオン (pion)，のスピンとパリティとは次のようにして定められた．後述の詳細釣合の原理(principle of detailed balance)によれば，核子・中間子系を支配している力学的法則が時間的に可逆として逆反応

$$\pi^{+}+\mathrm{d} \rightleftarrows \mathrm{p}+\mathrm{p} \tag{4.34}$$

を比較すると，次の関係式が成立するはずである：

$$\frac{d\sigma(\rightarrow)}{d\Omega} \Big/ \frac{d\sigma(\leftarrow)}{d\Omega}=\frac{4}{3(2S+1)}\left(\frac{p^2}{q^2}\right) \tag{4.35}$$

ただし p と q とは重心系における陽子とパイオンとの運動量の絶対値である．またSはパイオンのスピンを表わす．そしていずれの反応でも入射粒子は偏極していないものとする．この式において既に陽子のスピンは 1/2，重陽子のスピンは1であることが考慮されている．さて (4.35) と実験とを比較すると

$$S=0 \tag{4.36}$$

すなわち，パオインのスピンは0である．なお，(4.35) を全断面積の形に直すと，Pauli 原理のために2という因子がずれる．

$$\sigma(\rightarrow)/\sigma(\leftarrow)=\frac{2}{3(2S+1)}\left(\frac{p^2}{q^2}\right) \tag{4.37}$$

π^- は π^+ の反粒子であるからそのスピンはやはり 0 である．π^0 については荷電不変性からそのスピンが0でなければならないことは容易に理解できる．後に述べるように，π^0 は主に二光子に崩壊する．

$$\pi^0 \rightarrow 2\gamma \tag{4.38}$$

このことから π^0 のスピンが1ではあり得ないことを後に証明する．

さて遅い π^- は物質中で電磁的相互作用によりエネルギーを失い，原子核の $l=0$ の Bohr 軌道にその寿命よりずっと短い時間内に落ち込み，ついで原子核に吸収されてしまう．特に重陽子に対しては

$$\pi^{-}+\mathrm{d} \rightarrow \mathrm{n}+\mathrm{n} \tag{4.39}$$

という吸収過程が存在することが知られている．そこで両辺の角運動量を比較してみよう．パイオンのスピンは0であり，パイオンと重陽子との間の軌道角運動量が0であるから，左辺の全角運動量は重陽子の角運動量状態で定まってしまう．重陽子は陽子と中性子との束縛状態であり，その角運動量状態は

$$ {}^3\mathrm{S}_1 + {}^3\mathrm{D}_1 \tag{4.40} $$

である．既に述べたように左肩の3は二つのスピンが平行な三重項になっていることを意味し，SとDとは軌道角運動量が0と2であることを意味する．また右下の1は全角運動量が1であることを意味する．さて（4.39）の右辺にはフェルミ統計に属する中性子が二つあるので，その全波動関数は二つの中性子について反対称でなければならない．従ってスピン波動関数が対称な三重項では軌道角運動量は奇，反対称な一重項では偶でなければならない．そこで可能な状態は，スピンと軌道角運動量の合成を右下に書いた時に次のようになる：

$$ {}^1\mathrm{S}_0,\quad {}^3\mathrm{P}_{0,1,2},\quad {}^1\mathrm{D}_2,\quad {}^3\mathrm{F}_{2,3,4},\quad \cdots \tag{4.41} $$

この中で全角運動量が1のものを選ぶと，（4.39）に対応する角運動量状態は

$$ {}^3\mathrm{S}_1 + {}^3\mathrm{D}_1 \to {}^3\mathrm{P}_1 \tag{4.42} $$

のみになる．さて軌道部分のパリティは偶から奇に変わっているのでこの変化の原因はパイオンの内部パリティに起因することになる．すなわち，パイオンの(内部)パリティは奇である．ただし陽子と中性子の内部パリティは偶であると便宜的に決めておく．従ってパイオンはスピン0，パリティ奇となり，これを 0^- と表現するのが通常の記法である．このことはパイオン場が擬スカラーであると表現しても良い．そこで核子・中間子系の相互作用で，パリティを保存し，かつアイソ・スピンを保存するものを書くと

$$ \mathcal{L}_{\mathrm{int}} = -iG\overline{\psi}\gamma_5\hat{\tau}\psi\cdot\hat{\varphi} - \frac{\lambda}{4}(\hat{\varphi}^2)^2 \tag{4.43} $$

ここに第一項がいわゆる湯川相互作用であり，第二項は中間子同士の相互作用を表わし，後に述べるくりこみのために必要となる項である．さて中間子に対して実(擬)スカラーの表示を用いたが，複素表示をすると

$$ \overline{\psi}\gamma_5\hat{\tau}\psi\cdot\hat{\varphi} = \sqrt{2}\,(\overline{\psi}_n\gamma_5\psi_p\varphi^\dagger + \overline{\psi}_p\gamma_5\psi_n\varphi) + (\overline{\psi}_p\gamma_5\psi_p - \overline{\psi}_n\gamma_5\psi_n)\varphi_3 $$

と書くことができる．そこで全体のラグランジアン密度をまとめて書くと，

$$ \begin{aligned} \mathcal{L} = &-\overline{\psi}[\gamma_\mu\partial_\mu + M]\psi - \frac{1}{2}[(\partial_\lambda\hat{\varphi})^2 + \mu^2\hat{\varphi}^2] \\ &-iG\overline{\psi}\gamma_5\hat{\tau}\psi\cdot\hat{\varphi} - \frac{\lambda}{4}(\hat{\varphi}^2)^2. \end{aligned} \tag{4.44} $$

最後に湯川理論の契機となった核力の問題について付言しよう．この問題を一般的に論ずるのは難しいので中性スカラー中間子を考える．また核子は中間子と比較して非常に重いとして止まっているものとし外場で置き換える．これ

は水素原子の問題で陽子が静止しているものとしてその影響をクーロン・ポテンシャルで置き換えるのと同じである．これを静的近似と呼ぶ．この近似では核子・中間子の相互作用

$$H_{\mathrm{int}}=\int d^3xg\bar{\psi}(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}) \tag{4.45}$$

において $\bar{\psi}(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})$ を核子の存在確率密度と見なし，それを次のように置き換える：

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})\to\sum_{j=1}^{N}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j) \tag{4.46}$$

ただし $\boldsymbol{x}_j$ は j 番目の核子の位置座標である．このように核子は量子化されていない．いま二体問題を考え，$N=2$ と選び（4.45）に（4.46）を代入すると

$$H=H_{\mathrm{f}}+g[\varphi(\boldsymbol{x}_1)+\varphi(\boldsymbol{x}_2)]\equiv H_{\mathrm{f}}+H' \tag{4.47}$$

ただし H_{f} は自由中間子のハミルトニアンであり，ここでは Schrödinger 表示を採用している．次にやることはこのハミルトニアンの固有値を求めることである．特に基底状態のエネルギー固有値を求めたい．その方程式は

$$H\Psi=E\Psi. \tag{4.48}$$

この問題を解くのにフーリエ表示を使ってみよう．

$$H_{\mathrm{f}}=\sum_{\boldsymbol{q}}q_0c^{\dagger}(\boldsymbol{q})c(\boldsymbol{q}), \tag{4.49}$$

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\sum_{\boldsymbol{q}}\frac{1}{\sqrt{2q_0V}}[c(\boldsymbol{q})e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}+c^{\dagger}(\boldsymbol{q})e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}] \tag{4.50}$$

H_{f} は粒子数に関して既に対角形になっているが，相互作用部分はなっていない．そこで適当なユニタリー変換によって H を対角化してみよう．そのために

$$\Psi=U\Phi,\qquad U=\exp(iS) \tag{4.51}$$

と置く．ただし U はユニタリー，S はエルミートであるとする．しからば，

$$U^{-1}HU\Phi=E\Phi, \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}U^{-1}HU&=U^{-1}(H_{\mathrm{f}}+H')U\\&=H_{\mathrm{f}}+i[H_{\mathrm{f}},S]+\frac{i^2}{2}[[H_{\mathrm{f}},S],S]+\cdots\\&\quad\underset{g^0}{\vdots}+\underset{g^1}{H'}\quad+\underset{g^2}{i[H',S]}\qquad+\cdots\end{aligned} \tag{4.53}$$

ただし S は g^1 のオーダーであるとして，g について同じ巾の項を縦に揃えた．そこで S を次の式で定める：

$$H'+i[H_{\mathrm{f}},S]=0 \tag{4.54}$$

しからば (4.53) は次の形にまとまる:

$$U^{-1}HU=H_{\mathrm{f}}+\sum_{n=1}^{\infty}i^n\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)\overbrace{[\cdots[H',S]\cdots S]}^{n\text{ 個の交換子}} \tag{4.55}$$

明らかに第二項は g^2 のオーダーから始まるから, g^1 のオーダーまで対角化されたことになる. 中性中間子の場合には $n=1$ の項は c 数となるので, 二回以上の交換子は0となってしまう. 方程式 (4.54) を解くのに

$$[H_{\mathrm{f}},c(\boldsymbol{q})]=-q_0c(\boldsymbol{q}),\qquad [H_{\mathrm{f}},c^{\dagger}(\boldsymbol{q})]=q_0c^{\dagger}(\boldsymbol{q}) \tag{4.56}$$

を参考にすると, S は次式で与えられる:

$$S=-ig\sum_{\boldsymbol{q}}\frac{1}{\sqrt{2q_0V}}\frac{1}{q_0}[c(\boldsymbol{q})(e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}_1}+e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}_2})-c^{\dagger}(\boldsymbol{q})(e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}_1}+e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}_2})] \tag{4.57}$$

従って

$$U^{-1}HU=H_{\mathrm{f}}+\frac{i}{2}[H',S]$$

$$=H_{\mathrm{f}}-g^2\sum_{\boldsymbol{q}}\frac{1}{2q_0{}^2V}(e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}_1}+e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}_2})(e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}_1}+e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}_2})$$

ここで $V\to\infty$ という極限をとり, (3.1.2) の置き換えをすると

$$=H_{\mathrm{f}}-\frac{g^2}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{q_0{}^2}(1+\cos\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)) \tag{4.58}$$

そこで積分を発散する自己エネルギー δM とポテンシャル $\mathcal{V}(r)$ に分ける.

$$\delta M=-\frac{g^2}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{2q_0{}^2}, \tag{4.59}$$

$$\mathcal{V}(r)=-\frac{g^2}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{q_0{}^2}\cos\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)=-\left(\frac{g^2}{4\pi}\right)\frac{e^{-mr}}{r},\ \ r=|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2| \tag{4.60}$$

しからば H の最低固有値 E は次式で与えられる:

$$E=2\delta M+\mathcal{V}(r) \tag{4.61}$$

この $\mathcal{V}(r)$ がいわゆる湯川ポテンシャルである.

第6章　対称性と保存則

この章では与えられた系に対するある種の連続的変換に対する不変性，あるいは対称性が保存則の存在と密接にからみ合っていることを示そう．まず質点系に対してこの考え方を定式化し，次いで場に対して拡張する．このような考え方の基礎となるのはNoetherの定理である．

§1　質点系に対するNoetherの定理

与えられた系のラグランジアン $L(q_j, \dot{q}_j)$ を用いて作用積分 I を定義する．

$$I=\int_{t_1}^{t_2} dtL(q_j(t),\ \dot{q}_j(t)) \tag{1.1}$$

そこで次のような無限小変分を考える：

$$t \to t'=t+\delta t, \qquad q_j(t) \to q_j'(t')=q_j(t)+\delta q_j(t) \tag{1.2}$$

そして力学変数 q_j に関しては二種類の変換を考える．第一は時間変数を変えないものであり，第二は変えるものである．

$$\delta^* q_j(t)=q_j'(t)-q_j(t), \qquad \delta q_j(t)=q_j'(t')-q_j(t) \tag{1.3}$$

しからば δ^* という変分は時間微分と可換であり，この二種類の変分の間には

$$\delta^* q_j(t)=\delta q_j(t)-\delta t\dot{q}_j(t) \tag{1.4}$$

という関係が成立する．そこで(1.2)の変分に対する作用積分の変分を考える．

$$I'=\int_{t_1'}^{t_2'} dt' L(q_j'(t'), \dot{q}_j'(t')) \tag{1.5}$$

ところで t の微分の変分は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'}&=\frac{dt}{dt'}\cdot\frac{d}{dt}=\left(1-\frac{d}{dt}\delta t\right)\frac{d}{dt}, \\ dt'&=\frac{dt'}{dt}dt=\left(1+\frac{d}{dt}\delta t\right)dt \end{aligned} \tag{1.6}$$

で与えられるから，I' の積分変数 t' を t に戻してやり，I との差を調べる．

$$I'-I=\int_{t_1}^{t_2} dt\left(1+\frac{d}{dt}\delta t\right)L'-\int_{t_1}^{t_2} dtL$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(L'-L+\frac{d}{dt}\delta t\cdot L\right) \tag{1.7}$$

この積分の中味を変形すると

$$L'-L+\frac{d}{dt}\delta t\cdot L=\sum_j\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j\right)$$
$$+\frac{d}{dt}(\delta tL)-\delta t\frac{d}{dt}L$$

ここで (1.4) を用い δ^* と時間微分との可換性を考慮すると，左辺は

$$=\sum_j\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right]\delta^* q_j+\frac{d}{dt}\left[\sum_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta^* q_j+\delta tL\right] \tag{1.8}$$

この第一項は Euler-Lagrange の方程式を用いると消えるべきものであるが，一応残すと

$$I'-I=\left[\sum_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta^* q_j+\delta tL\right]_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}dt\sum_j\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right]\delta^* q_j \tag{1.9}$$

そこでもし Euler-Lagrange の方程式を用いると

$$I'-I=Q(t_2)-Q(t_1), \tag{1.10}$$

$$Q=\sum_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta^* q_j+\delta tL=\sum_j p_j\delta q_j-H\delta t \tag{1.11}$$

従ってもしも I が無限小変換(1.2)に対して不変であれば，運動方程式の結果，

$$\frac{d}{dt}Q(t)=0 \tag{1.12}$$

という保存則を得ることになる．このような無限小変換に対する作用積分の不変性と保存則との間に対応関係があるという結果を Noether の定理と呼ぶ．質点系の範囲内でのこの定理については，高橋康著「量子力学を学ぶための解析力学入門」（講談社サイエンティフィク）を参照されたい．

例 1　時間的平行移動

$$\delta t=\varepsilon,\qquad \delta q_j(t)=0 \tag{1.13}$$

を考えた時に，L が陽に時間変数に依存しなければ作用積分は不変である．ただし ε は t に依存しない無限小パラメターであるとする．この時に

$$Q=-\varepsilon H \tag{1.14}$$

すなわち H が保存され，エネルギーの保存則が得られる．

例 2　空間的平行移動

$$\delta t=0,\qquad \delta \boldsymbol{x}_j(t)=\varepsilon \tag{1.15}$$

を考えた時に二体中心力で相互作用をしている質点系のラグランジアン

$$L=\sum_j \frac{1}{2}m_j\dot{\boldsymbol{x}}_j^2-\sum_{i>j}V(|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|) \tag{1.16}$$

により定義される作用積分は不変であり，対応する保存量は

$$Q=\varepsilon\sum_j \boldsymbol{p}_j=\varepsilon\boldsymbol{P} \qquad (\boldsymbol{p}_j=m_j\dot{\boldsymbol{x}}_j) \tag{1.17}$$

となる．すなわち運動量 $\boldsymbol{P}$ の保存則が得られる．

§2 場の理論における Noether の定理

質点系に対する Noether の定理を場の理論に拡張するのは容易である．まず次の作用積分から出発する．（複素共役場も α で区別するものとする．）

$$I=\int_\Omega d^4x\ \mathcal{L}[\varphi_\alpha(x),\varphi_{\alpha:\mu}(x)] \tag{2.1}$$

そして次のような無限小変分を導入する：

$$x_\mu \to x'_\mu=x_\mu+\delta x_\mu, \qquad \varphi_\alpha(x)\to\varphi'_\alpha(x')=\varphi_\alpha(x)+\delta\varphi_\alpha(x) \tag{2.2}$$

ここに $\varphi\to\varphi'$ は φ の x 依存性，あるいは関数形の変化を表わしている．前節同様に二種類の変分を導入する．

$$\delta^*\varphi_\alpha(x)=\varphi'_\alpha(x)-\varphi_\alpha(x), \qquad \delta\varphi_\alpha(x)=\varphi'_\alpha(x')-\varphi_\alpha(x) \tag{2.3}$$

δ^* は Euler-Lagrange の方程式を導くのに利用された変分であり，第2章では単に δ と書かれている．そして δ^* は微分と可換である．従って第2章で考えた変分は $\delta x_\mu=0$ という制限下での δ と考えれば良い．二種類の変分の関係は

$$\delta^*\varphi_\alpha(x)=\delta\varphi_\alpha(x)-\varphi_{\alpha:\mu}(x)\delta x_\mu \tag{2.4}$$

δ^* が微分と可換であることから

$$\delta\varphi_{\alpha:\mu}(x)=\partial_\mu\delta\varphi_\alpha(x)-\varphi_{\alpha:\nu}(x)\partial_\mu\delta x_\nu \tag{2.5}$$

そこで δI を計算してみよう．

$$\delta I=\int_{\Omega'}d^4x'\mathcal{L}[\varphi'_\alpha(x'),\ \varphi'_{\alpha:\mu}(x')]-\int_\Omega d^4x\mathcal{L}[\varphi_\alpha(x),\varphi_{\alpha:\mu}(x)] \tag{2.6}$$

積分領域を一致させるために第一の積分で変数変換をして x' を x に戻す．まず

$$d^4x'=\frac{\partial(x'_0,x'_1,x'_2,x'_3)}{\partial(x_0,x_1,x_2,x_3)}d^4x \tag{2.7}$$

を用いて第一の積分を書き換えると，

$$\delta I=\int_\Omega d^4x\Big(\mathcal{L}[\varphi_\alpha(x)+\delta\varphi_\alpha(x),\ \varphi_{\alpha:\mu}(x)+\delta\varphi_{\alpha:\mu}(x)]\,\frac{\partial(x'_0,x'_1,x'_2,x'_3)}{\partial(x_0,x_1,x_2,x_3)}$$
$$-\mathcal{L}[\varphi_\alpha(x),\varphi_{\alpha:\mu}(x)]\Big)$$

ところで無限小の δx_μ に対しては,

$$\frac{\partial(x_0', x_1', x_2', x_3')}{\partial(x_0, x_1, x_2, x_3)} = 1 + \partial_\nu(\delta x_\nu) \tag{2.8}$$

これを用いると，添字 α についての和をとる記号を省略して，

$$\delta I = \int_\Omega d^4x \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\alpha} \delta\varphi_\alpha + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{\alpha:\mu}} \delta\varphi_{\alpha:\mu} + \mathscr{L}\partial_\nu(\delta x_\nu) \right) \tag{2.9}$$

従ってもし Ω の選び方に依らず作用積分 I が不変であれば,

$$\delta\mathscr{L} + \mathscr{L}\partial_\nu(\delta x_\nu) = 0 \tag{2.10}$$

ただし

$$\delta\mathscr{L} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\alpha} \delta\varphi_\alpha + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{\alpha:\mu}} \delta\varphi_{\alpha:\mu} \tag{2.11}$$

この δ を δ^* を用いて書き換えると,

$$[\mathscr{L}]_{\varphi_\alpha} \delta^*\varphi_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{\alpha:\mu}} \delta^*\varphi_\alpha + \mathscr{L}\delta x_\mu \right] = 0 \tag{2.12}$$

次に正準エネルギー・運動量テンソルを導入する.

$$\mathscr{T}_{\mu\nu} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{\alpha:\mu}} \varphi_{\alpha:\nu} + \delta_{\mu\nu}\mathscr{L} \tag{2.13}$$

そこで (2.12) の第二項を再び δ を用いて表わすと,

$$[\mathscr{L}]_{\varphi_\alpha} \delta^*\varphi_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{\alpha:\mu}} \delta\varphi_\alpha + \mathscr{T}_{\mu\nu}\delta x_\nu \right] = 0 \tag{2.14}$$

これが作用積分の不変性を表わす条件になる．そこで場の方程式を用いて第一項を落とすと次の保存則が得られる:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{\alpha:\mu}} \delta\varphi_\alpha + \mathscr{T}_{\mu\nu}\delta x_\nu \right] = 0 \tag{2.15}$$

上の導出法は本質的に質点系の場合と全く同じである．不変性と上の保存則の関連を示すものが場の理論における Noether の定理である．また上の括弧内の保存される四次元的な流れを Noether の流れ (Noether current) と呼ぶ.

§3　Noether の定理の例

外場が無く，従ってラグランジアン密度が陽に座標に依らず，すなわち場を通してのみ座標に依るならば，作用積分は次の変換に対して不変である:

$$\delta x_\mu = \varepsilon_\mu, \qquad \delta\varphi_\alpha = 0 \tag{3.1}$$

この場合の保存則は，(3.1) を (2.15) に代入して

$$\partial_\mu(\mathcal{T}_{\mu\nu}\varepsilon_\nu)=0, \quad \text{あるいは} \quad \partial_\mu\mathcal{T}_{\mu\nu}=0 \tag{3.2}$$

これは ε_ν が任意の無限小パラメターだからである．これから保存量としてのエネルギー・運動量ベクトルが得られる．

$$P_\nu=\int d^3x\mathcal{T}_{0\nu}(x) \tag{3.3}$$

この定義は第2章§2で与えたものと一致していることは容易に検証される．もしもラグランジアン密度が外場を含めば

$$\partial_\mu\mathcal{T}_{\mu\nu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(x_\nu)} \tag{3.4}$$

となる．ただし (x_ν) に関する微分は外場を通しての座標依存性に関する微分であり，場を通しての微分を含まない．これと関連して公式 (2.2.2) を一般化しておこう．$\mathcal{O}(x)$ が場を含み，陽に座標に依存しなければ

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\mathcal{O}[\varphi_\alpha(x)]=i[\mathcal{O}[\varphi_\alpha(x)],P_\mu] \tag{3.5}$$

であるが，例えば $\mathcal{O}(x)$ が場 $\varphi_\alpha(x)$ のみならず座標に陽に依存する場合，すなわち $\mathcal{O}$ が $\mathcal{O}[\varphi_\alpha(x),(x_\mu)]$ のように書ければ，(3.5) は次のように変更される：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\mathcal{O}(x)=i[\mathcal{O}(x),P_\mu]+\frac{\partial}{\partial(x_\mu)}\mathcal{O}(x) \tag{3.6}$$

この関係式は後に利用される．

次に位相変換を考えよう．φ_α を複素場とすると，ラグランジアン密度は φ_α の複素共役 φ_α^* をも含む．そこで複素共役場をはっきりと書いて

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}[\varphi_\alpha(x),\varphi_\alpha^*(x),\varphi_{\alpha:\nu}(x),\varphi_{\alpha:\mu}^*(x)] \tag{3.7}$$

というラグランジアン密度を考える．そしてこの $\mathcal{L}$ が次のような無限小位相変換に対して不変であるとする：

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha &\to e^{iq_\alpha\lambda}\varphi_\alpha=\varphi_\alpha+iq_\alpha\lambda\varphi_\alpha,\\ \varphi_\alpha^* &\to e^{-iq_\alpha\lambda}\varphi_\alpha^*=\varphi_\alpha^*-iq_\alpha\lambda\varphi_\alpha^*\end{aligned} \tag{3.8}$$

すなわち，

$$\delta\varphi_\alpha=iq_\alpha\lambda\varphi_\alpha, \qquad \delta\varphi_\alpha^*=-iq_\alpha\lambda\varphi_\alpha^* \tag{3.9}$$

従って Noether の流れは

$$\lambda\sum_\alpha iq_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{\alpha:\mu}}\varphi_\alpha-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{\alpha:\mu}^*}\varphi_\alpha^*\right) \tag{3.10}$$

実際に保存される電流は，q_α が場 φ_α の量子の電荷である場合に

$$j_\mu=\sum_\alpha(-iq_\alpha)\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{\alpha:\mu}}\varphi_\alpha-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*_{\alpha:\mu}}\varphi^*_\alpha\right) \tag{3.11}$$

これから電流の保存則が出ることになる.

次に荷電空間における無限小回転を考える. 無限小回転ベクトル $\hat{\omega}$ を導入して, (5.4.32) で与えられる場の量の無限小回転に対して作用積分が不変ならば Noether の流れは核子場と中間子場により次の形で与えられる:

$$-\hat{\omega}\cdot\left[\frac{i}{2}\overline{\psi}\gamma_\mu\hat{\tau}\psi-\hat{\varphi}\times\hat{\varphi}_{:\mu}\right] \tag{3.12}$$

従って保存されるアイソ・スピン流は

$$\hat{j}_\mu=\frac{i}{2}\overline{\psi}\gamma_\mu\hat{\tau}\psi-\hat{\varphi}\times\partial_\mu\hat{\varphi} \tag{3.13}$$

そしてアイソ・スピン $\hat{I}$ は次式で与えられる:

$$\hat{I}=\int d^3x\left[\frac{1}{2}\psi^\dagger\hat{\tau}\psi+\hat{\varphi}\times\hat{\pi}\right],\quad \hat{\pi}=\dot{\hat{\varphi}} \tag{3.14}$$

このように Noether の流れから種々の保存量が導き出される.

§4 ポアンカレ不変性

既に述べた時空における平行移動とローレンツ変換とを組み合わせることによりポアンカレ変換が導入される. ここではまずローレンツ変換を考えよう. 無限小ローレンツ変換は無限小パラメター $\varepsilon_{\mu\nu}=-\varepsilon_{\nu\mu}$ を用いて

$$\delta x_\mu=\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu,\qquad \delta\varphi_\alpha(x)=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}(T_{\mu\nu})_{\alpha\beta}\varphi_\beta(x) \tag{4.1}$$

のように表わされる. これは (2.6.19) の一般化である. $T_{\mu\nu}$ はローレンツ変換の生成演算子の一つの表現になっていて, 既に次のような例を知っている:

$$\text{スピン } 0: \quad T_{\mu\nu}=0 \tag{4.2 a}$$

$$\text{スピン } \frac{1}{2}: \quad T_{\mu\nu}=\frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu) \tag{4.2 b}$$

$$\text{スピン } 1: \quad T_{\mu\nu}=a_{\mu\nu} \tag{4.2 c}$$

ただしスピン 1 の場合の $a_{\mu\nu}$ は座標変換と同じに選べば良いから

$$\delta x_\mu=\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu=\frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma}(a_{\rho\sigma})_{\mu\nu}x_\nu$$

から定まり, その具体的な形は

$$(a_{\rho\sigma})_{\mu\nu}=\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}-\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} \tag{4.3}$$

で与えられる．(4.2) で与えられる $T_{\mu\nu}$ は次の交換関係を満足する：

$$[T_{\rho\sigma}, T_{\lambda\tau}]=\delta_{\sigma\lambda}T_{\rho\tau}-\delta_{\sigma\tau}T_{\rho\lambda}+\delta_{\rho\lambda}T_{\sigma\tau}-\delta_{\rho\tau}T_{\sigma\lambda} \tag{4.4}$$

上の変換に対応する Noether の流れは

$$\mathcal{M}_{\mu\rho\sigma}=x_\rho\mathcal{T}_{\mu\sigma}-x_\sigma\mathcal{T}_{\mu\rho}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{\alpha:\mu}}(T_{\rho\sigma})_{\alpha\beta}\varphi_\beta \tag{4.5}$$

で与えられ，保存則は

$$\partial_\mu\mathcal{M}_{\mu\rho\sigma}=0 \tag{4.6}$$

そこでローレンツ変換の生成演算子 $M_{\rho\sigma}$ が定義される．

$$M_{\rho\sigma}=\int d^3x\mathcal{M}_{0\rho\sigma} \tag{4.7}$$

この M の間には $-iT$ と同じ交換関係が成立する．

$$[M_{\rho\sigma}, M_{\lambda\tau}]=-i(\delta_{\sigma\lambda}M_{\rho\tau}-\delta_{\sigma\tau}M_{\rho\lambda}+\delta_{\rho\lambda}M_{\sigma\tau}-\delta_{\rho\tau}M_{\sigma\lambda}) \tag{4.8}$$

以上でローレンツ群の生成演算子を与えたが，平行移動の生成演算子は P_μ で与えられるので，P_μ を含む交換関係を与えなければならない．それは

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma]=i(\delta_{\mu\sigma}P_\nu-\delta_{\nu\sigma}P_\mu), \tag{4.9}$$

$$[P_\mu, P_\nu]=0 \tag{4.10}$$

これでポアンカレ群の生成演算子の形成する代数での交換関係が閉じたことになる．注意すべきことは，保存則 (4.6) が成立してもすべての M が P_μ，例えば，ハミルトニアンと可換でないことである．それは (4.5) の中に座標が陽に含まれることであって，公式 (3.6) のお世話にならなければならないからである．

次に対称エネルギー・運動量テンソルを導入する．まず $\mathcal{M}$ を

$$\mathcal{M}_{\mu\rho\sigma}=x_\rho\mathcal{T}_{\mu\sigma}-x_\sigma\mathcal{T}_{\mu\rho}+\mathcal{S}_{\mu\rho\sigma} \tag{4.11}$$

と書いて ∂_μ を適用すると

$$\mathcal{T}_{\sigma\rho}-\mathcal{T}_{\rho\sigma}=-\partial_\mu\mathcal{S}_{\mu\sigma\rho} \tag{4.12}$$

これは正準エネルギー・運動量テンソルが一般には対称テンソルではないことを示している．そこで新しいテンソル $\Theta_{\mu\nu}$ を次式で定義する．

$$\Theta_{\rho\sigma}=\mathcal{T}_{\rho\sigma}+\partial_\mu\mathcal{G}_{\mu\rho\sigma} \tag{4.13}$$

ただし

$$\mathcal{G}_{\mu\rho\sigma}=\frac{1}{2}(\mathcal{S}_{\mu\rho\sigma}+\mathcal{S}_{\rho\sigma\mu}+\mathcal{S}_{\sigma\rho\mu}). \tag{4.14}$$

さて $\mathcal{S}_{\mu\rho\sigma}$ は ρ と σ について反対称であるから

$$\mathcal{G}_{\rho\mu\sigma}=\frac{1}{2}(\mathcal{S}_{\rho\mu\sigma}+\mathcal{S}_{\mu\sigma\rho}+\mathcal{S}_{\sigma\mu\rho})$$

$$=-\frac{1}{2}(\mathcal{S}_{\rho\sigma\mu}+\mathcal{S}_{\mu\rho\sigma}+\mathcal{S}_{\sigma\rho\mu})$$

$$=-\mathcal{G}_{\mu\rho\sigma} \tag{4.15}$$

すなわち $\mathcal{G}$ は初めの二つの添字に関して反対称である．故に

$$\partial_\mu\partial_\rho\mathcal{G}_{\mu\rho\sigma}=0, \tag{4.16}$$

$$\partial_\rho\boldsymbol{\Theta}_{\rho\sigma}=\partial_\rho\mathcal{T}_{\rho\sigma}=0 \tag{4.17}$$

また

$$\partial_\mu(\mathcal{G}_{\mu\rho\sigma}-\mathcal{G}_{\mu\sigma\rho})=\frac{1}{2}\partial_\mu(\mathcal{S}_{\mu\rho\sigma}+\mathcal{S}_{\rho\sigma\mu}+\mathcal{S}_{\sigma\rho\mu}-\mathcal{S}_{\mu\sigma\rho}-\mathcal{S}_{\sigma\rho\mu}-\mathcal{S}_{\rho\sigma\mu})$$

$$=\partial_\mu\mathcal{S}_{\mu\rho\sigma} \tag{4.18}$$

この式と(4.12)，(4.13)とを組み合わせると容易に気が付くように，$\boldsymbol{\Theta}_{\rho\sigma}$ というテンソルは ρ と σ とに関して対称で対称エネルギー・運動量テンソルと呼ばれる．またこのテンソルはBelinfanteにより初めて導入されたのでBelinfanteのテンソルとも呼ばれる．

$$\boldsymbol{\Theta}_{\rho\sigma}=\boldsymbol{\Theta}_{\sigma\rho} \tag{4.19}$$

また $\mathcal{G}_{00\nu}=0$ を考慮すると

$$P_\nu=\int d^3x\,\mathcal{T}_{0\nu}(x)=\int d^3x\boldsymbol{\Theta}_{0\nu}(x). \tag{4.20}$$

同様にして次式が成立する．

$$M_{\rho\sigma}=\int d^3x\,\mathcal{M}_{0\rho\sigma}=\int d^3x(x_\rho\boldsymbol{\Theta}_{0\sigma}-x_\sigma\boldsymbol{\Theta}_{0\rho}) \tag{4.21}$$

二つの積分の差をとると証明すべき式は

$$\int d^3x[x_\rho\partial_\mu\mathcal{G}_{\mu0\sigma}-x_\sigma\partial_\mu\mathcal{G}_{\mu0\rho}]=\int d^3x\mathcal{S}_{0\rho\sigma}$$

そこで以下ではこの式を証明しよう．左辺では $\mu=4$ は効かないから

$$(\text{左辺})=\int d^3x\partial_\mu(x_\rho\mathcal{G}_{\mu0\sigma}-x_\sigma\mathcal{G}_{\mu0\rho})+\int d^3x(\mathcal{G}_{\sigma0\rho}-\mathcal{G}_{\rho0\sigma})$$

$$=\frac{1}{2}\int d^3x(\mathcal{S}_{\sigma0\rho}+\mathcal{S}_{0\rho\sigma}+\mathcal{S}_{\rho0\sigma}-\mathcal{S}_{\rho0\sigma}-\mathcal{S}_{0\sigma\rho}-\mathcal{S}_{\sigma0\rho})$$

$$=\int d^3x\mathcal{S}_{0\rho\sigma}=(\text{右辺})$$

これで (4.21) が証明された．ただし上の証明では三次元的発散の三次元積分は落としている．また重力場の源となるのは正準エネルギー・運動量テンソルではなくて対称エネルギー・運動量テンソルである．良く知られた記号で

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\kappa\Theta_{\mu\nu} \tag{4.22}$$

が重力場の方程式となる．

次に粒子のスピンについて考える．そのために Pauli-Liubanski の演算子を導入する．

$$W_\alpha=\frac{1}{2i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}M_{\beta\gamma}P_\delta \tag{4.23}$$

ただし $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ が $(1,2,3,4)$ の偶置換であるか奇置換であるかによって $+1$，あるいは -1 に等しく，それ以外の時には 0 となる記号である．この軸性ベクトルは P_μ と可換であるが，本義ローレンツ変換に対してはベクトルとして変換される．

$$[P_\mu, W_\alpha]=0 \tag{4.24}$$

さてポアンカレ代数に対して次のような Casimir 演算子，すなわち P と M とのすべての成分と可換な演算子として次の二つがある：

$$P^2=P_\mu P_\mu, \qquad W^2=W_\alpha W_\alpha \tag{4.25}$$

この二量を用いて粒子の質量とスピンとを定義する．まず W_α には次のような性質があることに注意しよう：

$$W_\alpha P_\alpha=0, \tag{4.26}$$

$$[W_\alpha, W_\beta]=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}W_\gamma P_\delta \tag{4.27}$$

一粒子状態に対してお互いに可換な演算子の組

$$P_\mu,\ W_3,\ P^2,\ W^2 \tag{4.28}$$

を対角化することができる．$-P^2$ の固有値を m^2 とすると，m がこの粒子の質量となる．$m\neq 0$ の時にはこの粒子の静止系を選べば P_μ の固有値 p_μ として

$$\boldsymbol{p}=0, \qquad p_0=m \tag{4.29}$$

を選ぶことができる．この時に $\boldsymbol{W}=m\boldsymbol{S}$ と書けば，$\boldsymbol{S}$ の 3 成分は角運動量と同じ交換関係を満たすことになる．このことは (4.27)，(4.29) より明らかである．

すなわち W^2 の固有値は $m^2s(s+1)$ の形になり，s がこの粒子のスピンを表

わすことになる．実際静止した一粒子状態に対しては，$\boldsymbol{W}$ は次の表現を持つ．

$$W_i \to \frac{m}{2i}\varepsilon_{ijk}T_{jk} \tag{4.30}$$

ただし $m=0$ の時には事情は複雑になる．これについては後に述べる．

§5　ローレンツ群の表現

ローレンツ群の6個の生成演算子の間の交換関係は (4.8) 式によって与えられたが，この節ではその表現の問題について議論しよう．そのために次の記法を採用することにしよう：

$$\boldsymbol{M}=(M_{23}, M_{31}, M_{12}), \qquad \boldsymbol{N}=(M_{14}, M_{24}, M_{34}) \tag{5.1}$$

しからば (4.8) 式は次の三式に分解される：

$$[M_i, M_j]=i\varepsilon_{ijk}M_k,\ \ [M_i, N_j]=i\varepsilon_{ijk}N_k,\ \ [N_i, N_j]=i\varepsilon_{ijk}M_k \tag{5.2}$$

次に $\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{N}$ との二つの組み合わせを導入する．

$$\boldsymbol{J}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}), \qquad \boldsymbol{K}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}) \tag{5.3}$$

しからばまず $\boldsymbol{J}$ と $\boldsymbol{K}$ とは可換である．

$$[J_i, K_j]=0 \tag{5.4}$$

また J 同士，K 同士の交換関係は角運動量の3成分間のものと同型となる．

$$[J_i, J_j]=i\varepsilon_{ijk}J_k, \qquad [K_i, K_j]=i\varepsilon_{ijk}K_k \tag{5.5}$$

従って本義ローレンツ群は二つの3次元回転群の直積に分解される．

$$\mathrm{SO}(3)\times\mathrm{SO}(3)\sim\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2) \tag{5.6}$$

そこで本義ローレンツ群の表現は

$$\boldsymbol{J}^2, J_3\ ;\ \boldsymbol{K}^2, K_3 \tag{5.7}$$

の固有値 $j_1(j_1+1)$，m_1；$j_2(j_2+1)$，m_2 を用いて分類される．この固有ベクトルを

$$|\,j_1, m_1\ ;\ j_2, m_2\rangle \tag{5.8}$$

と表わすことにする．ただし角運動量の時と同様に m のとり得る値は

$$m_1=-j_1, -j_1+1, \cdots, j_1\ ; \qquad m_2=-j_2, -j_2+1, \cdots, j_2 \tag{5.9}$$

与えられた本義ローレンツ変換 Λ の (5.8) を基底とする表現を

$$\mathscr{D}^{(j_1,j_2)}(\Lambda) \tag{5.10}$$

と書くことにする．この表現と三次元回転群との間の関係は

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{J}+\boldsymbol{K} \tag{5.11}$$

によって与えられる．三次元回転に対する j は j_1 と j_2 との合成によって与えられることになる．さて本義ローレンツ変換 Λ は次のように表現される：

$$\mathscr{D}(\Lambda)=\exp\left(\frac{1}{2}i\varepsilon_{\mu\nu}M_{\mu\nu}\right) \tag{5.12}$$

そこで $\varepsilon_{\mu\nu}$ という6個のパラメターに次の記法を導入する：

$$\boldsymbol{\theta}=(\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}), \qquad i\boldsymbol{\omega}=(\varepsilon_{14}, \varepsilon_{24}, \varepsilon_{34}) \tag{5.13}$$

ここに $\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{\omega}$ とは実の三次元ベクトルであり，これを用いて (5.12) を書き換える．

$$\mathscr{D}(\Lambda)=\exp(i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{M}-\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{N}) \tag{5.14}$$

そこで二つの j の意味を調べるために $\mathscr{D}^{(j,0)}$ と $\mathscr{D}^{(0,j)}$ とを比較してみよう．

$$\mathscr{D}^{(j,0)}: \qquad \boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}=\boldsymbol{J}, \quad \boldsymbol{K}=0 \tag{5.15 a}$$

$$\mathscr{D}^{(0,j)}: \qquad \boldsymbol{M}=-\boldsymbol{N}=\boldsymbol{K}, \quad \boldsymbol{J}=0 \tag{5.15 b}$$

そこでいずれの表現も $\boldsymbol{M}$ を用いて次のように書ける：

$$\mathscr{D}^{(j,0)}(\Lambda)=\exp[(i\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{M}], \tag{5.16 a}$$

$$\mathscr{D}^{(0,j)}(\Lambda)=\exp[(i\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{M}] \tag{5.16 b}$$

これから次の関係式が得られる：

$$\mathscr{D}^{(0,j)}(\Lambda)=\mathscr{D}^{(j,0)}(\Lambda^{-1})^{\dagger} \tag{5.17}$$

この二種類の添字の物理的意味を調べるために Weyl 方程式を思い出そう．既に§3で述べたように $M_{\mu\nu}$ の表現は $-iT_{\mu\nu}$ により与えられるが，Weyl 方程式の場合には (2.6.35) によりヘリシティの符号により

$$\boldsymbol{M}=\pm\boldsymbol{N} \tag{5.18}$$

が成立する．従って j_1 はヘリシティ正の状態，j_2 はヘリシティ負の状態に対応することが分かる．

空間反転に対してこれらの演算子の変換性は次式で与えられる：

$$\boldsymbol{M}\to\boldsymbol{M}, \qquad \boldsymbol{N}\to-\boldsymbol{N}, \qquad \boldsymbol{J}\rightleftarrows\boldsymbol{K} \tag{5.19}$$

すなわち本義ローレンツ群に属さない空間反転を表現するには $\mathscr{D}^{(j_1,j_2)}$ の範囲内では足りず，

$$\mathscr{D}^{(j_1,j_2)}\rightleftarrows\mathscr{D}^{(j_2,j_1)} \tag{5.20}$$

となる．これが Weyl 方程式が空間反転に対して不変でない理由である．パリ

ティを保存する Dirac 方程式の解は次の表現で与えられる：

$$\mathcal{D}^{(1/2,0)}\oplus\mathcal{D}^{(0,1/2)} \tag{5.21}$$

§6 質量0の粒子のスピン

§3で質量が0でない粒子のスピンについて述べたが，この節では質量が0の粒子のスピンについて調べ，その特徴について議論しよう．

まず W_μ を（5.1）の記法を用いて表現すると

$$W_0=\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{W}=i\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{P}+\boldsymbol{M}P_0 \tag{6.1}$$

更に W_μ と P_μ とは直交することが知られている．

そこで既約表現 $\mathcal{D}^{(j,0)}$ を考えると，$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}=\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}=0$ が (5.15 a) により成り立つから (6.1) は次のように書ける：

$$W_0=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{W}=i\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{P}+\boldsymbol{J}P_0 \tag{6.2}$$

これから

$$W^2=m^2j(j+1) \tag{6.3}$$

が得られることは既に述べた．そこで質量0の粒子が z 方向に進んでいるとして，次のように置く：

$$P_1=P_2=0, \qquad P_3=P_0\equiv P \tag{6.4}$$

ただし P は c 数の固有値であるとする．しからば

$$W_0=PJ_3, \qquad W_1=P(J_1+iJ_2), \qquad W_2=-iW_1, \qquad W_3=W_0 \tag{6.5}$$

さて質量が0であれば，

$$P_\mu{}^2=W_\mu{}^2=W_\mu P_\mu=0 \tag{6.6}$$

もしも W_μ が実のベクトルであれば，上の式は P_μ と W_μ とが平行であることを意味する．これを実数条件と呼ぼう．そして $\boldsymbol{J}^2, J_3$ との同時固有状態を $|j,m\rangle$ と書くならば，この条件は次式で与えられる．j がスピンの値を与える．

$$W_\mu|j,m\rangle=\lambda P_\mu|j,m\rangle \tag{6.7}$$

ところが $P_1=P_2=0$ であるから，上の式より

$$W_1|j,m\rangle=W_2|j,m\rangle=0 \tag{6.8}$$

(6.5) 式を参照すれば

$$(J_1+iJ_2)|j,m\rangle=0 \tag{6.9}$$

この式は $m=j$ の時にのみ成り立つ．パリティが保存すれば $\mathcal{D}^{(0,j)}$ も共存する

が，この時には $m=-j$ も存在することになる．$|m|$ のとり得る値は j のみであるというのが質量0の時の特徴である．それ以外の値が出てくれば，それは状態がスピンについて既約でないことを意味するので，方程式の形自身が $|m|=j$ を保証するように選ばれなければならない．このような粒子の例としては，ニュートリノ，光子，重力子等がある．ニュートリノについては m は 1/2 か $-1/2$ のいずれか一方の値をとりパリティは破る．光子はパリティを保存する相互作用を持っているので $m=\pm 1$ の両方の値をとり，$m=0$ はとれない．光子についてはこれは良く知られた事実であって，光子は横波であることを意味する．

以下において Weyl 方程式も Maxwell 方程式も $|m|=j$ を保証することを確かめてみよう．

Weyl 方程式

$\mathscr{D}^{(1/2,0)}$ に対応する Weyl 方程式では，(2.6.35) より

$$H=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P}=2\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{P} \tag{6.10}$$

であるから，z 方向に進んでいるニュートリノに対して

$$P=2J_3P,\quad \text{あるいは}\quad J_3=\frac{1}{2} \tag{6.11}$$

となり $m=j$ が確かめられる．

Maxwell 方程式

この方程式はスピン1の光子を記述する．まず自由な電磁場の方程式は

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=0,\qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{H}-\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=0 \tag{6.12}$$

まず $\mathscr{D}^{(1,0)}$ に対応する解を調べてみよう．これに対応して右巻きの解を作るために場の強さ $F_{\mu\nu}$ の次のような組み合わせを作る：

$$F_1^R=F_{23}+F_{14},\qquad F_2^R=F_{31}+F_{24},\qquad F_3^R=F_{12}+F_{34} \tag{6.13}$$

あるいはまとめて

$$\boldsymbol{F}^R=\boldsymbol{H}-i\boldsymbol{E} \tag{6.14}$$

以下では添字 R を省略するが，この $\boldsymbol{F}$ の方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{F}=\mathrm{rot}\boldsymbol{F} \tag{6.15}$$

そこで次の3成分を導入する：

$$F_+=-\frac{1}{\sqrt{2}}(F_1-iF_2),\qquad F_0=F_3,\qquad F_-=\frac{1}{\sqrt{2}}(F_1+iF_2) \tag{6.16}$$

この3成分からなる波動関数を $\mathscr{F}$ と書くと，(6.15) は次の形に変換される．

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}+\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathscr{F}=0 \tag{6.17}$$

ここに $\boldsymbol{S}$ は次の3成分を持つ：

$$S_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\qquad S_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\qquad S_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \tag{6.18}$$

この3成分は角運動量と同じ交換関係を満たす．$\mathscr{D}^{(1,0)}$ に対しては (5.15 a) が成り立つから

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}=\boldsymbol{J}=\boldsymbol{S},\qquad \boldsymbol{K}=0 \tag{6.19}$$

そこで $\mathscr{F}$ の x 依存性を z 方向への進行波に対応して次のように選ぶ．

$$\mathscr{F}(x)=\mathscr{F}\exp[iP(x_3-x_0)] \tag{6.20}$$

これを (6.17) に代入すると

$$P(1-S_3)\mathscr{F}=0 \tag{6.21}$$

これから分かることは期待通り $S_3=1$ のみが実現されることになる．

$\mathscr{D}^{(0,1)}$ に対応して左巻きの解を求めるには (6.14) の代りに

$$\boldsymbol{F}^L=\boldsymbol{H}+i\boldsymbol{E} \tag{6.22}$$

から出発すれば良い．この時には $S_3=-1$ のみが実現される．$S_3=0$ に対応する解は存在しない．

以上で分かったように正しい方程式から出発すれば $|m|=j$ に対応する解しか存在しないことになる．

§7　Pauli-Gürsey 群

量子力学においては波動関数の絶対的位相は観測にかからない．そこで

$$\psi_2=e^{i\alpha}\psi_1 \tag{7.1}$$

で結ばれている二つの波動関数 ψ_1, ψ_2 は全く同格であってどちらを使っても物理的解釈には差がない．すなわち定数位相だけ異なる波動関数の組は物理的に同値な類を作るということが出来る．全く同様なことは場の理論でも生ず

る．

複素場を含み相互作用をしている系を考え，そのラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}[\varphi_\alpha, \varphi_\alpha^\dagger\,;\,\varphi_{\alpha:\mu}, \varphi_{\alpha:\mu}^\dagger] \tag{7.2}$$

と書く．このラグランジアンは質量 m, 結合定数 g 等の物理定数を含んでいて，種々の反応の断面積や不安定粒子の寿命等の観測可能量を計算すると，その結果は上記の物理定数や運動量等の関数として与えられる．当然のことであるが，最終結果には場の量自身は現れない．たとえて言えば，場の量とは料理を作るのに使った鍋のようなもので，物理定数は料理のための原料のようなものである．料理を作るのに他の鍋を使ってもできるように，(7.2)に書いた φ_α に対して全く違う記号，例えば φ'_α を用いても観測可能な最終結果に変わりはないことは全く自明である．そこで (7.2) の中の複素場に対して

$$\varphi_\alpha \to \varphi'_\alpha=e^{i\lambda_\alpha}\varphi_\alpha \tag{7.3}$$

のような定数位相変換を導入する．この位相変換群を $\mathcal{G}$ とし，この変換群に対してラグランジアン密度の自由部分 $\mathcal{L}_\mathrm{f}$ は不変であるとする．

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_\mathrm{f}[e^{i\lambda_\alpha}\varphi_\alpha, e^{-i\lambda_\alpha}\varphi_\alpha^\dagger\,;\,e^{i\lambda_\alpha}\varphi_{\alpha:\mu}, e^{-i\lambda_\alpha}\varphi_{\alpha:\mu}^\dagger]\\ &=\mathcal{L}_\mathrm{f}[\varphi_\alpha, \varphi_\alpha^\dagger\,;\,\varphi_{\alpha:\mu}, \varphi_{\alpha:\mu}^\dagger]\end{aligned} \tag{7.4}$$

問題はラグランジアン密度の相互作用部分 $\mathcal{L}_\mathrm{int}$ が $\mathcal{G}$ に対してどうなるかである．もしも $\mathcal{G}$ を適当に選ぶことにより相互作用部分が $\mathcal{G}$ に対して不変であれば，既に述べたように保存則が得られる．例えば φ_α という場の量子の電荷を e_α として，位相 λ_α を

$$\lambda_\alpha=\lambda e_\alpha \tag{7.5}$$

と選べば，相互作用は不変に保たれ，我々は電荷の保存則を得る．

それでは相互作用部分が不変でなければどうなるであろうか？　この時には一般に結合定数が変換を受けることになる．例えば，ψ_1, ψ_2, φ という場を考え

$$\mathcal{L}_\mathrm{int}=g\overline{\psi}_1\psi_2\varphi+g^*\overline{\psi}_2\psi_1\varphi^\dagger \tag{7.6}$$

この時に次のような位相変換を導入する：

$$\psi_1 \to \psi_1, \qquad \psi_2 \to \psi_2, \qquad \varphi \to e^{i\lambda}\varphi \tag{7.7}$$

すると，(7.6) に (7.7) を代入すると $\mathcal{L}_\mathrm{int}$ の形は次のように変わる：

$$\mathcal{L}_\mathrm{int} \to ge^{i\lambda}\overline{\psi}_1\psi_2\varphi+g^*e^{-i\lambda}\overline{\psi}_2\psi_1\varphi^\dagger \tag{7.8}$$

これを (7.6) と比較すると，結合定数が次のような変換を受けたことになる．

$$g \to ge^{i\lambda} \tag{7.9}$$

大切なことは，上の変換は理論の物理的内容を変えないから，g の関数としての観測可能量 $\mathcal{O}(g)$ は上の変換に対して不変でなければならない．すなわち，

$$\mathcal{O}(ge^{i\lambda})=\mathcal{O}(g) \tag{7.10}$$

このような簡単な変換に対しては $|g|^2=g^*g$ が不変量であり，観測可能量はすべて $|g|^2$ のみの関数となる．このことは (7.7) の位相変換をもっと一般化しても成り立つ．

Pauli は上の可換群である位相変換群を一般化して非可換群にまで拡張したのである．そしてその対象となったのはニュートリノ場であった．そこで質量0のニュートリノ場のラグランジアン密度を書く．

$$\mathcal{L}_f=-\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi \tag{7.11}$$

厳密に言うと実は $\mathcal{L}_f$ を ψ と $\bar{\psi}$ とについて対称な形に書いておかなければならない．この理解の下に Pauli は次のような変換に対する (7.11) の不変性を指摘した：

$$\psi \to \psi'=a\psi+b\gamma_5C\bar{\psi}, \qquad \bar{\psi}\to\bar{\psi}'=a^*\bar{\psi}-b^*C^{-1}\gamma_5\psi \tag{7.12}$$

この変換の逆変換は

$$\psi' \to \psi=a^*\psi'-b\gamma_5C\bar{\psi}', \qquad \bar{\psi}' \to \bar{\psi}=a\bar{\psi}'+b^*C^{-1}\gamma_5\psi' \tag{7.13}$$

ただし複素数 a, b は次の条件を満たしているものとする：

$$|a|^2+|b|^2=1 \tag{7.14}$$

この変換群は位相変換群の一般化であり，この群を $\mathcal{G}_1$ と呼ぶことにする．

他方 Pursey は次の変換群 $\mathcal{G}_2$ がやはり $\mathcal{L}_f$ を不変に保つことを指摘した．

$$\psi \to \psi'=e^{i\lambda\gamma_5}\psi, \qquad \bar{\psi} \to \bar{\psi}'=\bar{\psi}e^{i\lambda\gamma_5} \tag{7.15}$$

この二つの群はお互いに可換であることが分かる．Noether の定理により $\mathcal{L}_f$ を不変に保つ無限小変換に対して保存則を導くと次の保存量が得られる．$\mathcal{G}_1$ に対し

$$M_1=\frac{1}{2}\int d^3x(\psi^\dagger\gamma_5\gamma_4C\psi^\dagger+\psi C^{-1}\gamma_4\gamma_5\psi), \tag{7.16 a}$$

$$M_2=\frac{1}{2i}\int d^3x(\psi^\dagger\gamma_5\gamma_4 C\psi^\dagger-\psi C^{-1}\gamma_4\gamma_5\psi), \tag{7.16 b}$$

$$M_3=\int d^3x\psi^\dagger\psi \tag{7.16 c}$$

ただしスピノールの足については和をとっているものとする．また $\mathcal{G}_2$ に対して

$$N=\int d^3x\psi^\dagger\gamma_5\psi \tag{7.17}$$

この群の生成元の代数は次の交換関係を満たす：

$$\left[\frac{M_i}{2},\ \frac{M_j}{2}\right]=i\varepsilon_{ijk}\frac{M_k}{2}, \tag{7.18}$$

$$[M_j, N]=0 \tag{7.19}$$

従ってこの一般化された位相変換群 $\mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2$ は SU(2)×U(1) になることが明らかにされた．この群構造を明らかにしたのは Gürsey である．

ラグランジアン密度 (7.11) がこのように大きい不変群を許すのは全くその質量が 0 であることによる．質量項があれば，本節の初めに述べた定数位相変換群しか許さず，保存されるのは M_3 のみである．従って相互作用のある時に，M_3 以外の保存量が存在すれば，それは逆にニュートリノの質量が 0 であることを保証するであろう．従って以下ではそのような保存量を探すことにする．

この不変群は一般に相互作用を導入することにより不変群ではなくなり，既に述べたように結合定数間の変換を惹起する．そして観測可能量はこの結合定数の変換に対する不変量でなければならない．Pauli はベーター崩壊に関して，結合定数間の変換に対する不変量を求めている．

ニュートリノの質量が 0 であれば，上の不変群 $\mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2$ は完全にはこわれずその部分群は依然として厳密な不変群として残るであろう．これを $\mathcal{G}_\nu$ とする．

$$\mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2\supset\mathcal{G}_\nu \tag{7.20}$$

我々はベーター崩壊の相互作用を不変にする $\mathcal{G}_\nu$ を求めてみよう．

そこでベーター崩壊の相互作用のラグランジアン密度を $\mathcal{L}_\beta$ とする．そして $\mathcal{G}_\nu$ の生成元を M とすれば

$$[\mathcal{L}_\beta, M]=0 \tag{7.21}$$

ここに M は一般的に次のような形に書ける：

$$M=cN+c_1M_1+c_2M_2+c_3M_3 \tag{7.22}$$

そこで適当な位相変換（すなわち不変群 $\mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2$ の変換）により，この M を標準形に変換してやる．

$$M=cN+c_3'M_3' \qquad (c'^2=c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2) \tag{7.23}$$

今後 M_3' を単に M_3 と書くことにする．しからば（7.21）により

$$[[\mathcal{L}_\beta, cN+c_3M_3], cN-c_3M_3]=0. \tag{7.24}$$

ところで $\mathcal{L}_\beta$ はニュートリノ場 $\psi, \psi^\dagger$ を一次で含んでいるから

$$[[\psi, cN+c_3M_3], cN-c_3M_3]=(c^2-c_3{}^2)\psi,$$

$$[[\psi^\dagger, cN+c_3M_3], cN-c_3M_3]=(c^2-c_3{}^2)\psi^\dagger$$

を用いると，（7.24）の不変性の要求は

$$c^2-c_3{}^2=0 \tag{7.25}$$

が満たされていれば良いことになる．従って M としては $N-M_3$ か $N+M_3$ を選べば良い．第2章§7において述べた実験事実は次の選択を要求する：

$$M=N-M_3 \tag{7.26}$$

この生成演算子により惹起される有限な変換はいわゆるカイラル変換の一種であり次の形で与えられる：

$$\psi\to\psi'=\exp[i(1-\gamma_5)\lambda]\cdot\psi, \qquad \overline{\psi}\to\overline{\psi}'=\overline{\psi}\cdot\exp[i(1+\gamma_5)\lambda] \tag{7.27}$$

この変換で不変になるためには，相互作用において ψ と $\overline{\psi}$ とは

$$(1+\gamma_5)\psi, \qquad \overline{\psi}(1-\gamma_5) \tag{7.28}$$

という組み合わせで現れなければならない．これはまさに第2章§7で導入した ψ_L であり，従ってニュートリノは2成分の Weyl 方程式によって記述されることになる．これはまた相互作用のある時でもニュートリノの質量が0であることを保証していることになる．

第7章　S　行　列

素粒子や原子核間の反応はS行列によって記述される．これらの粒子の種々の相互作用に関するすべての知識はS行列に含まれており，素粒子論における最も基本的な量である．S行列は，ラグランジアン密度が知られていれば原理的に決定されるが，実際にS行列を計算するのは難しい．そこでこの章では，相互作用が弱い時にだけ使われる摂動論に基づいてS行列を計算する方法について述べる．この方法は Feynman と Dyson によって展開されたものである．戦後急激な発展をしたQEDには二つの異なった流れがあった．一つの流れは，朝永-Schwinger の方程式に基づく方法であり，伝統的な正準形式に則った形式である．もう一つの流れは Feynman の経路積分法から出発した方法であり極めて直観的な方法であるが，従来の場の理論との関係が明確ではなかった．それにも拘らず両理論の結果は常に一致していた．Dyson は朝永-Schwinger 方程式から出発して S 行列を計算する方法を展開し，それが Feynman の理論と同値であることを証明し，両者が同値であることを確立した．以下に述べる計算法は Dyson の理論に基づいている．

§1　S行列の定義

既にS行列については第5章§1において述べられている．そこではS行列に関する二式（5.1.32）と（5.1.33）とが与られている．この章では

$$S=U(\infty,-\infty) \tag{1.1}$$

の計算法について述べる．

このS行列は多くの重要な一般的性質を持っているが，（5.1.26）の結果として出てくるユニタリー性は確率の保存則と関係した性質である．

$$S^{\dagger}S=SS^{\dagger}=1 \tag{1.2}$$

このユニタリー性の議論は直観的であるが，もっと厳密なものは後に述べる漸近条件に基づいたものであり，それはくりこみをしたS行列のユニタリー性に

関するものである.

もう一つの性質はS行列のポアンカレ不変性であり，この性質はS行列の計算法を通して明らかになる．この不変性は次式で表わされる：

$$[S, P_\mu]=0, \qquad [S, M_{\mu\nu}]=0 \tag{1.3}$$

勿論この性質は外場がある時には失われることになる.

§2 S行列に対する Dyson の公式

朝永-Schwinger 方程式から出発しても良いが，結果は同じであるので相互作用表示における Schrödinger 方程式から出発する．(5.1.10) の方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0)=H_{\rm int}(t)U(t, t_0) \tag{2.1}$$

と書くことができる．ただし

$$H_{\rm int}(t)=\int_{x_0=t} d^3x\mathscr{H}_{\rm int}(x) \tag{2.2}$$

この方程式を初期条件 $U(t_0, t_0)=1$ を用いて積分すると

$$U(t, t_0)=1-i\int_{t_0}^{t} dt' H_{\rm int}(t')U(t', t_0) \tag{2.3}$$

そこでこの方程式の右辺の U に (2.3) の右辺を繰り返して代入してゆくと

$$U(t, t_0)=1-i\int_{t_0}^{t} dt' H_{\rm int}(t')+(-i)^2\int_{t_0}^{t} dt' H_{\rm int}(t')\int_{t_0}^{t'} dt'' H_{\rm int}(t'')+\cdots \tag{2.4}$$

しかしながらこの形はあまり便利ではないので Dyson によって導入された時間的順序付けの演算子 T を導入する.

$$T[H_{\rm int}(t_1)H_{\rm int}(t_2)\cdots H_{\rm int}(t_n)]=H_{\rm int}(t_1')H_{\rm int}(t_2')\cdots H_{\rm int}(t_n') \tag{2.5}$$

ただし $t_1', t_2', \cdots, t_n'$ は $t_1, t_2, \cdots, t_n$ を並べ換えて

$$t_1'>t_2'>\cdots>t_n' \tag{2.6}$$

となるように選んだものとする．この定義から明らかなことは，(2.5) の左辺は $t_1, t_2, \cdots, t_n$ の対称関数となるということである.

さて $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の対称関数であれば次式が成立する：

$$\int_a^b dx_1\int_a^{x_1} dx_2\cdots\int_a^{x_{n-1}} dx_n f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$=\frac{1}{n!}\int_a^b dx_1\int_a^b dx_2\cdots\int_a^b dx_n f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{2.7}$$

この公式を用いると

$$\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_nH_{\rm int}(t_1)H_{\rm int}(t_2)\cdots H_{\rm int}(t_n)$$

$$=\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_nT[H_{\rm int}(t_1)H_{\rm int}(t_2)\cdots H_{\rm int}(t_n)]$$

$$=\frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2\cdots\int_{t_0}^{t}dt_nT[H_{\rm int}(t_1)H_{\rm int}(t_2)\cdots H_{\rm int}(t_n)] \qquad (2.8)$$

上の変形を利用して展開式 (2.4) の一般項を上の形に書くことができる．その結果として $U(t, t_0)$ に対する Dyson の公式が得られる．

$$U(t, t_0)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}dt_1\cdots\int_{t_0}^{t}dt_nT[H_{\rm int}(t_1)\cdots H_{\rm int}(t_n)] \qquad (2.9)$$

更に $t\to\infty$，$t_0\to-\infty$ という極限をとり，$H_{\rm int}(t)$ が $\mathcal{H}_{\rm int}(x)$ の空間積分であることを用いると，S行列に対する Dyson の公式を得る．

$$S=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int d^4x_1\cdots\int d^4x_nT[\mathcal{H}_{\rm int}(x_1)\cdots\mathcal{H}_{\rm int}(x_n)] \qquad (2.10)$$

ただし積分は全時空について行うものとする．この時点において S が P_μ と可換であることは明らかである．そこで次の問題はS行列のローレンツ不変性である．d^4x はローレンツ不変であり，$\mathcal{H}_{\rm int}(x)$ はスカラーであるが，ここに一つ問題があるのは時間的順序付けの演算子 T である．明らかに T の定義は時間軸の選び方によっているが，S行列自身は時間軸の選び方によるであろうか？

二点 x_1, x_2 を比べた時に，もし両者間の距離が時間的であれば，すなわち

$$(x_1-x_2)^2=(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)^2-(t_1-t_2)^2<0$$

t_1-t_2 はどんなローレンツ系でも同じ符号を持つから，その時の時間的順序付けは時間軸の選び方によらない．ところで距離が空間的であれば，すなわち

$$(x_1-x_2)^2=(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)^2-(t_1-t_2)^2>0$$

であれば，時間軸の選び方により $t_1>t_2$ になったり $t_1<t_2$ になったりする．しかしながら x_1-x_2 が空間的である時に

$$\mathcal{H}_{\rm int}(x_1)\mathcal{H}_{\rm int}(x_2)=\mathcal{H}_{\rm int}(x_2)\mathcal{H}_{\rm int}(x_1), \qquad (x_1-x_2)^2>0 \qquad (2.11)$$

であれば，順序付けを気にしなくても良いことになる．ところが (2.11) 式は正に朝永-Schwinger 方程式の積分可能条件 (5.1.20) である．従ってこの条件が満たされている限り S は $M_{\mu\nu}$ と可換であり，ローレンツ不変である．これで (1.3) 式が成り立つことが示された．実際にはハミルトニアン密度が超

曲面σに依存することがあり，上の議論はもっと複雑になる．相互作用が場の微分を含む時にこのような複雑なことが起きる．

§3 Wick の定理

前節で導出した Dyson の公式からS行列を具体的に計算する方法を与えるものが Feynman-Dyson 理論である．そしてその基礎を与えるものが Wick の定理である．

相互作用表示では場の演算子は自由場の方程式，すなわち線形方程式を満たすから第4章§4で述べたように正振動数部分と負振動数部分とに分けることができる．

$$\varphi_\alpha(x)=\varphi_\alpha^{(+)}(x)+\varphi_\alpha^{(-)}(x) \tag{3.1}$$

そして $\varphi_\alpha^{(+)}(x)$ は消滅演算子，$\varphi_\alpha^{(-)}(x)$ は生成演算子を表わす．明らかに

$$\varphi_\alpha^{(+)}(x)|0\rangle=0, \qquad \langle 0|\varphi_\alpha^{(-)}(x)=0. \tag{3.2}$$

以下においては相互作用表示の場の演算子に(3.1)の分解を適用し，(3.2)式を利用して演算子の積を分解する．まず簡単のために中性スカラー場を考える．

$$\begin{aligned}&\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)\\&=(\varphi^{(+)}(x_1)+\varphi^{(-)}(x_1))(\varphi^{(+)}(x_2)+\varphi^{(-)}(x_2))\cdots(\varphi^{(+)}(x_n)+\varphi^{(-)}(x_n))\end{aligned}$$

この積を展開して積の順序を変え，(−)を左に(+)を右に移すとその積の形は

$$\varphi^{(-)}\varphi^{(-)}\cdots\varphi^{(+)}\varphi^{(+)}\cdots \tag{3.3}$$

のようになる．しかしながら $\varphi^{(-)}$ と $\varphi^{(+)}$ とは可換でないから順序を変える度に交換子を生ずる．例えば，

$$\begin{aligned}\varphi(x)\varphi(y)&=(\varphi^{(+)}(x)+\varphi^{(-)}(x))(\varphi^{(+)}(y)+\varphi^{(-)}(y))\\&=\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(+)}(y)+\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(-)}(y)+\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(y)+\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y)\end{aligned}$$

最後の項を除いては (3.3) で示した正しい順序になっている．そこで

$$\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y)=\varphi^{(-)}(y)\varphi^{(+)}(x)+[\varphi^{(+)}(x),\varphi^{(-)}(y)]$$

を用いるとすべての項が (3.3) の標準形になっている．すなわち，

$$\begin{aligned}\varphi(x)\varphi(y)=&\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(+)}(y)+\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(-)}(y)\\&+\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(y)+\varphi^{(-)}(y)\varphi^{(+)}(x)\\&+[\varphi^{(+)}(x),\varphi^{(-)}(y)]\end{aligned} \tag{3.4}$$

この交換子を含まず (3.3) の意味で標準形になっている最初の四項を正規積，

あるいは normal product, と呼び, $:\varphi(x)\varphi(y):$ で表わす. また最後の交換子項はc数であり, 次のように計算される: (第3章§1参照)

$$[\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(y)] = \left[\sum_p \frac{1}{\sqrt{2p_0V}} e^{ip\cdot x} a(\boldsymbol{p}),\ \sum_q \frac{1}{\sqrt{2q_0V}} e^{-iq\cdot y} a^+(\boldsymbol{q})\right]$$

$$= \sum_p \frac{1}{2p_0V} e^{ip\cdot(x-y)}$$

$$= i\Delta^{(+)}(x-y) \tag{3.5}$$

従って

$$\varphi(x)\varphi(y) = :\varphi(x)\varphi(y): + i\Delta^{(+)}(x-y) \tag{3.6}$$

また正規積の定義から明らかなように, これは対称である. すなわち,

$$:\varphi(x)\varphi(y): = :\varphi(y)\varphi(x): \tag{3.7}$$

この対称性は場の演算子の数がもっと多くても同じである. ただしフェルミ統計に従う場の場合には反対称になる. $x_1', x_2', \cdots, x_n'$ が $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の置換である場合には Dirac 場 ψ に対して

$$:\psi(x_1')\psi(x_2')\cdots\psi(x_n'): = (-1)^P :\psi(x_1)\psi(x_2)\cdots\psi(x_n): \tag{3.8}$$

ただし $(-1)^P$ は偶置換に対しては $+1$, 奇置換に対しては -1 に等しい. ボーズ統計に従う場に対してはこのような符号の変化はない.

また正規積の定義と(3.2)とから正規積の真空期待値は消える. 例えば,

$$\langle 0| :\varphi(x)\varphi(y): |0\rangle = 0 \tag{3.9}$$

従って(3.6)より

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = i\Delta^{(+)}(x-y). \tag{3.10}$$

この結果を一般化すると次のような式が得られる:

$$\langle 0|\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)|0\rangle$$
$$= \sum_{k_1<k_2, k_3<k_4, \cdots} i\Delta^{(+)}(x_{k_1}-x_{k_2})\cdots i\Delta^{(+)}(x_{k_{n-1}}-x_{k_n}) \tag{3.11}$$

ここに $k_1, k_2, \cdots, k_n$ は $1, 2, \cdots, n$ の置換であり, n は偶数である. そして不等式 $k_1<k_2$, $k_3<k_4, \cdots$ という制限の下にすべての可能な組み合わせについて加えるものとする. n が奇数ならば $\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)|0\rangle$ は奇数個の量子の状態であるので $|0\rangle$ と直交し, (3.11) の真空期待値は0となる.

また正規積を用いると (5.4.3) で考えた電流密度は次のように書ける:

$$j_\mu = \frac{1}{2} ie[\overline{\psi}, \gamma_\mu\psi] = ie :\overline{\psi}\gamma_\mu\psi: \tag{3.12}$$

従って真空には電荷が無いこと表わす次の式が得られる：

$$\langle 0|j_\mu(x)|0\rangle=0 \tag{3.13}$$

次にS行列要素の評価の問題に進む．Dyson の公式より行列要素

$$S_{ba}=\langle b|S|a\rangle \tag{3.14}$$

を評価するには次式を評価すれば良いことになる．

$$S_{ba}=\langle b|a\rangle+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int d^4x_1\cdots\int d^4x_n\langle b|T[\mathcal{H}_{\rm int}(x_1)\cdots\mathcal{H}_{\rm int}(x_n)]|a\rangle \tag{3.15}$$

以下ではフェルミ粒子とボーズ粒子間の最も簡単な湯川型相互作用として

$$\mathcal{H}_{\rm int}(x)=j(x)\varphi(x),\qquad j(x)=g{:}\overline{\psi}(x)\psi(x){:} \tag{3.16}$$

を考える．ψ は Dirac 場，φ は中性スカラー場を表わす．しからば

$$T[\mathcal{H}_{\rm int}(x_1)\cdots\mathcal{H}_{\rm int}(x_n)]=T[j(x_1)\cdots j(x_n)]\cdot T[\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)] \tag{3.17}$$

のように分解される．そこで $|a\rangle, |b\rangle$ という状態も Dirac 粒子に関する状態とスカラー粒子に関する状態の直積に分解する．

$$|a\rangle=|a^S\rangle\otimes|a^D\rangle,\qquad |b\rangle=|b^S\rangle\otimes|b^D\rangle \tag{3.18}$$

しからば

$$\begin{aligned}&\langle b|T[\mathcal{H}_{\rm int}(x_1)\cdots\mathcal{H}_{\rm int}(x_n)]|a\rangle\\&=\langle b^D|T[j(x_1)\cdots j(x_n)]|a^D\rangle\cdot\langle b^S|T[\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)]|a^S\rangle.\end{aligned} \tag{3.19}$$

次に簡単な第二因子の評価から始めよう．スカラー粒子の状態を

$$|a^S\rangle=a^\dagger(k_1)\cdots a^\dagger(k_i)|0^S\rangle,\qquad |b^S\rangle=a^\dagger(k_1')\cdots a^\dagger(k_f')|0^S\rangle \tag{3.20}$$

のように表わすことにする．以下では $|0^S\rangle$ を単に $|0\rangle$ と書くことにする．そこで次に T 積を正規積に展開し，i 個の消滅演算子と f 個の生成演子を含む部分を取り出して次式を評価する：

$$\begin{aligned}&\langle b^S|T[\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)]|a^S\rangle\\&=\langle 0|a(k_1')\cdots a(k_f')T[\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)]a^\dagger(k_1)\cdots a^\dagger(k_i)|0\rangle\end{aligned}$$

この評価に当って $k_1,\cdots,k_i$ と $k_1',\cdots,k_f'$ との間には共通の運動量は無いものとする．共通のものがあれば相互作用をせずに素通りする粒子を考えなければならない．まず $a^\dagger(k_i)$ を消去することを考えてみよう．それには (3.2) を用いて上の式を $a^\dagger(k_i)$ との交換子にする．

$$\langle 0|AB\cdots a^\dagger(k_i)|0\rangle$$

$$=\langle 0|[AB\cdots, a^{+}(k_i)]|0\rangle+\langle 0|a^{+}(k_i)AB\cdots|0\rangle$$
$$=\langle 0|[AB\cdots, a^{+}(k_i)]|0\rangle \tag{3.21}$$

交換子の評価には次の公式を用いる：

$$[a(k'), a^{+}(k)]=\delta_{k',k} \tag{3.22}$$

$$[\varphi(x), a^{+}(k)]=\frac{1}{\sqrt{2k_0V}}e^{ik\cdot x}=\langle 0|\varphi(x)|k\rangle \tag{3.23}$$

いま仮定により a と a^{+} とは交換するから

$$\begin{aligned}&\langle 0|a(k_1')\cdots a(k_f')T[\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)]a^{+}(k_1)\cdots a^{+}(k_i)|0\rangle\\ &=\sum_{j=1}^{n}\langle 0|a(k_1')\cdots a(k_f')T[\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{j-1})\varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_n)]a^{+}(k_1)\cdots a^{+}(k_{i-1})|0\rangle\\ &\qquad\times\langle 0|\varphi(x_j)|k_i\rangle\end{aligned}$$

この方法を繰り返してゆくと上の式は結局次の形になる：

$$\begin{aligned}&=\sum_{\text{comb}}\langle k_1'|\varphi(x_1')|0\rangle\cdots\langle k_f'|\varphi(x_f')|0\rangle\langle 0|\varphi(x_{f+1}')|k_1\rangle\cdots\langle 0|\varphi(x_{f+i}')|k_i\rangle\\ &\quad\times\langle 0|T[\varphi(x_{f+i+1}')\cdots\varphi(x_n')]|0\rangle\end{aligned} \tag{3.24}$$

ただし $x_1', \cdots, x_n'$ は $x_1, \cdots, x_n$ の置換であり，n 個の変数から $(f+i)$ 個の変数を選び出し，上の形に書くようなすべての可能な組み合わせについて和をとる．上の式はまた次の形にも書ける：

$$=\sum_{\text{comb}}\langle b^S|:\varphi(x_1')\cdots\varphi(x_{f+i}'):|a^S\rangle\langle 0|T[\varphi(x_{f+i+1}')\cdots\varphi(x_n')]|0\rangle \tag{3.25}$$

ただし今度は n 個の変数を $(f+i)$ 個と $(n-f-i)$ 個の変数との二組に分けるすべての組み合わせについて和をとる．ところで上の方法は演算子に対しても使える．

$$\begin{aligned}&T[\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)]\\ &=\sum_{\text{comb}}:\varphi(x_1')\cdots\varphi(x_j'):\langle 0|T[\varphi(x_{j+1}')\cdots\varphi(x_n')]|0\rangle\end{aligned} \tag{3.26}$$

この和は n 個の変数を正規積に入るものと真空期待値に入るものとの二組に分けるあらゆる可能な組み合わせに対して取っている．

次の問題は真空期待値をいかにして評価するかという問題である．まず，

$$\begin{aligned}\langle 0|T[\varphi(x)\varphi(y)]|0\rangle&=\theta(x_0-y_0)\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle+\theta(y_0-x_0)\langle 0|\varphi(y)\varphi(x)|0\rangle\\ &=i\theta(x_0-y_0)\Delta^{(+)}(x-y)+i\theta(y_0-x_0)\Delta^{(+)}(y-x)\\ &=\Delta_F(x-y)\end{aligned} \tag{3.27}$$

上では (3.2.16) 式を用いている．上式を一般化すると

$$\langle 0|T[\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)]|0\rangle=\sum_{\text{comb}}\Delta_F(x_1'-x_2')\cdots\Delta_F(x_{n-1}'-x_n') \tag{3.28}$$

ただし n 個の変数を $n/2$ 個の対に分けるすべての組み合わせについて和をとる．n が奇数ならば 0 である．これを証明するために時間の順序を

$$t_1'>t_2'>\cdots>t_n' \qquad (t=x_0) \tag{3.29}$$

のように仮定すると，

$$\langle 0|T[\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)]|0\rangle=\langle 0|\varphi(x_1')\cdots\varphi(x_n')|0\rangle \tag{3.30}$$

そこで $k_1<k_2$ ならば $t_{k_1}'>t_{k_2}'$ であるから，この時の $\varDelta_F$ は定義により

$$\varDelta_F(x_{k_1}'-x_{k_2}')=i\varDelta^{(+)}(x_{k_1}'-x_{k_2}'). \tag{3.31}$$

さて (3.30) の右辺は (3.11) の形に書けるが，(3.31) を考慮すると (3.28) に等しくなる．(3.29) の時間順序は任意であるから，どんな時間の順序に対しても (3.28) が成立することになる．

今までの結果をまとめると

$$T(\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)]=\sum_{\text{comb}}:\varphi(x_1')\cdots\varphi(x_j'):\varDelta_F(x_{j+1}'-x_{j+2}')\cdots\varDelta_F(x_{n-1}'-x_n') \tag{3.32}$$

Wick は $\varDelta_F$ になる変数対を縮約記号によって指定した．すなわち，

$$\overbrace{\varphi(x)\varphi}(y)=\varDelta_F(x-y) \tag{3.33}$$

この記号は真空期待値に入る対を指定するもので，この記号を使えば(3.32)は，

$$\begin{aligned}T[\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)] = &:\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n):\\ &+\sum_{j\neq k}:\varphi(x_1)\cdots\overbrace{\varphi(x_j)\cdots\varphi}(x_k)\cdots\varphi(x_n):\\ &+\sum_{j\neq k}\sum_{l\neq m}:\varphi(x_1)\cdots\overbrace{\varphi(x_j)\cdots\varphi}(x_k)\cdots\overbrace{\varphi(x_l)\cdots\varphi}(x_m)\cdots\varphi(x_n):\\ &+\cdots\end{aligned} \tag{3.34}$$

のように縮約の回数による展開と見なすことができる．ボーズ場に対しては既に§2で論じたように T 積は対称である：

$$T[\varphi(x_1')\cdots\varphi(x_n')]=T[\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)] \tag{3.35}$$

フェルミ場に対しては正規積の場合の(3.8)式と同様に反対称として定義する：

$$T[\psi(x_1')\cdots\psi(x_n')]=(-1)^P T[\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)] \tag{3.36}$$

勿論上の式は ψ の代りに $\overline{\psi}$ が入っていても成立する．またフェルミ場の縮約は

$$\overbrace{\psi_\alpha(x)\overline{\psi}}_\beta(y)=\langle 0|T[\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(y)]|0\rangle=S_{F\alpha\beta}(x-y) \tag{3.37}$$

ただし S_F は次式で与えられる：

$$S_F(x)=-(\gamma_\mu\partial_\mu-m)\varDelta_F(x). \tag{3.38}$$

一般に縮約関数，あるいは Feynman の伝播関数は次式を満たす：

$$D_{\alpha\beta}(\partial)\Delta_{F\beta\gamma}(x)=i\delta_{\alpha\gamma}\delta^4(x), \tag{3.39}$$

$$\Delta_{F\alpha\beta}(x)=C_{\alpha\beta}(\partial)\Delta_F(x). \tag{3.40}$$

フェルミ場の縮約に関し次式は自明であろう：

$$\overbrace{\psi(x)\psi}(y)=\overbrace{\bar{\psi}(x)\bar{\psi}}(y)=0 \tag{3.41}$$

一般の Wick の定理は次式で与えられる．

$$T[AB\cdots Z]=:AB\cdots Z:+\sum_{1\ \mathrm{cont}}:\overbrace{AB}\cdots Z:$$
$$+\sum_{2\ \mathrm{cont}}:\overbrace{AB}\overbrace{CD}\cdots Z:+\cdots \tag{3.42}$$

ここに n cont とは可能なすべての n 回の縮約について和をとることを指示している．

Wick の定理と上述の縮約関数の性質とを組み合わせると次式を得る：

$$D_{\alpha\beta}(\partial_x)T[\varphi_\beta(x)\cdots]=i\frac{\delta}{\delta\varphi_\alpha^\dagger(x)}T[\cdots] \tag{3.43}$$

例えば，

$$D_{\alpha\beta}(\partial_x)T[\varphi_\beta(x),\varphi_\gamma^\dagger(y)]=i\frac{\delta\varphi_\gamma^\dagger(y)}{\delta\varphi_\alpha^\dagger(x)}=i\delta_{\alpha\gamma}\delta^4(x-y) \tag{3.44}$$

ただし上式では複素場を仮定している．Dirac 場では

$$-\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+m\right)T[\psi(x)\cdots]=i\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}T[\cdots] \tag{3.45}$$

ただし $\bar{\psi}(x)$ に関して汎関数微分を実行するには T 積の中で微分される $\bar{\psi}$ を左端に移動してから行うことによりその符号を確定する．この公式はS行列要素の変形等に用いられ重要な役割を果たすので，仮に相互作用における簡約公式と呼ぶ．英語では reduction formula と呼ぶ．Heisenberg 表示における同様なものは後述する．

§4 Feynman 図形

S行列の構造を直観的に理解するためには Feynman 図形 (Feynman diagram) を導入すると便利である．ここでは例として Fermi ゲージにおける QED についてその考え方を説明する．

S行列を摂動論において結合定数の巾級数として展開した時にその n 次の項は次式で与えられる：

$$S^{(n)}=\frac{(-i)^n}{n!}\int d^4x_1\cdots\int d^4x_nT[\mathcal{H}_{\rm int}(x_1)\cdots\mathcal{H}_{\rm int}(x_n)] \tag{4.1}$$

ここに QED では

$$\mathcal{H}_{\rm int}(x)=-j_\mu(x)A_\mu(x)=-ie:\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x):A_\mu(x) \tag{4.2}$$

そこで (4.1) の中のT積を Wick の定理により正規積の和に展開する．この時に正規積の中の演算子は自由粒子を生成消滅させ，縮約関数は観測にかからない仮想粒子の伝播を記述する．これらの役目を視覚的に理解するためにこれらの演算子を線で表現したものが Feynman 図形である．

2個の演算子が縮約された時にこれを線分で表わす．

$\overbrace{A_\lambda(x)A_\mu(y)}$:　　x ·············· y

$\overbrace{\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(y)}$:　　x ←――― y

この際に仮想光子の伝播は向きのない破線で表わすが，電子の伝播は有向線分で表わす．その向きは電荷 e の流れの向きと一致させる．$x_0>y_0$ ならば，点 y で創られた仮想電子が点 x まで進み，そこで消滅することを意味し，$x_0<y_0$ ならば，点 x で創られた仮想陽電子が点 y まで進み，そこで消滅することになる．向きのない光子の場合には，x か y かいずれか過去の点で仮想光子が創られ，未来の点で消滅することになる．この解釈は(3.27)式から明らかであろう．

それに対して正規積の中にある演算子は，光子に対しては向きのない，そして電子に対しては向きのある半直線で表わされ，この線を外線と呼ぶ．

$A_\lambda(x)$　:　　··············x

$\psi_\alpha(x)$　:　　―――→x

$\overline{\psi}_\alpha(x)$　:　　←―――x

まず A_λ の場合には，点 x で光子が創られるか吸収されることを意味する，また ψ の場合には，点 x で陽電子が創られるか，あるいは電子が吸収されることを意味する．$\overline{\psi}$ の場合には，点 x で電子が創られるか，あるいは陽電子が吸収されることを意味する．

さてS行列の正規積への展開の各項は一つの Feynman 図形に対応する．以

下では $n=2$ の場合について考えてみよう.

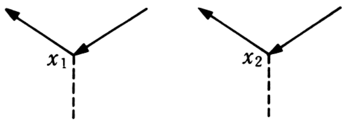
$$S^{(2)}=\frac{(-e)^2}{2}\int d^4x_1\int d^4x_2 T[:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1):, :\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2):]$$
$$\times T[A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)] \quad (4.3)$$

このT積を Wick に従って縮約の数により展開しよう.

1) 縮約の無い場合

$$:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2): \quad :A_\mu(x_1)A_\nu(x_2): \quad (4.4)$$

これに対応する Feynman 図形は二つの非連結部分よりなる.

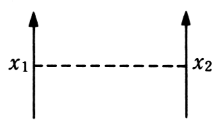


この過程は, エネルギー・運動量の保存則を満たすことができないので物理的に実現しうるものには対応しない.

2) A のみが縮約される場合

$$:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2):\delta_{\mu\nu}D_F(x_1-x_2) \quad (4.5)$$

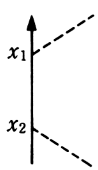
この項は電子・電子散乱, 陽電子・陽電子散乱, 電子・陽電子散乱等を表わす. これに対応する Feynman 図形は, 電子線の時間的方向を指定せず次図で与えられる.



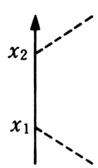
3) 一対の ψ と $\overline{\psi}$ とが縮約される場合

$$(:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu S_F(x_1-x_2)\gamma_\nu\psi(x_2):$$
$$+:\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu S_F(x_2-x_1)\gamma_\mu\psi(x_1):):A_\mu(x_1)A_\nu(x_2): \quad (4.6)$$

この項は Compton 散乱, 電子・陽電子対の二光子崩壊等を表わす.



あるいは



4)　一対の ψ と $\overline{\psi}$，および A の対が縮約される場合

$$(:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu S_F(x_1-x_2)\gamma_\nu\psi(x_2):$$
$$+:\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu S_F(x_2-x_1)\gamma_\mu\psi(x_1):)\delta_{\mu\nu}D_F(x_1-x_2) \qquad (4.7)$$

これは一電子が一電子へ移ることを表わし，自己エネルギーを与える．対応する Feynman 図形は



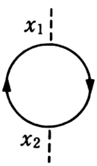
あるいは



5)　二対の ψ と $\overline{\psi}$ が縮約される場合

$$-\mathrm{Tr}[\gamma_\mu S_F(x_1-x_2)\gamma_\nu S_F(x_2-x_1)]:A_\mu(x_1)A_\nu(x_2): \qquad (4.8)$$

これに対応する図形は真空偏極と呼ばれる現象に対応し，光子の自己エネルギーを与える．



どうして（－）と Tr とが現れたかを以下に示す．

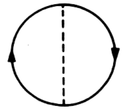
$$\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)=\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu S_F(x_1-x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)$$
$$=\overline{\psi}_\alpha(x_1)[\gamma_\mu S_F(x_1-x_2)\gamma_\nu]_{\alpha\beta}\psi_\beta(x_2)$$
$$=-[\gamma_\mu S_F(x_1-x_2)\gamma_\nu]_{\alpha\beta}\psi_\beta(x_2)\overline{\psi}_\alpha(x_1)$$
$$=-[\gamma_\mu S_F(x_1-x_2)\gamma_\nu]_{\alpha\beta}[S_F(x_2-x_1)]_{\beta\alpha}$$
$$=-\mathrm{Tr}[\gamma_\mu S_F(x_1-x_2)\gamma_\nu S_F(x_2-x_1)]$$

このようにフェルミオンのループに対しては必ず（－）という符号が入ってくるのが特徴であり，後にゲージ理論で重要な役割を果たすことになる．

6)　すべての演算子が縮約される場合

$$-\mathrm{Tr}[\gamma_\mu S_F(x_1-x_2)\gamma_\nu S_F(x_2-x_1)]\delta_{\mu\nu}D_F(x_1-x_2) \qquad (4.9)$$

これは真空に始まり真空に終る過程であり，泡グラフで表わされる．



Dyson の公式で真空から真空へ移る遷移確率振幅は，すべての泡グラフの寄与を加えて得られることなり，次の表式で与えられる：

$$\langle 0|S|0\rangle \tag{4.10}$$

確率の保存則からこの表式の絶対値は1に等しいことが分かるが，その位相は発散する．そこで観測にかからない位相を調節してS行列を定義し直す．

$$S'=S/\langle 0|S|0\rangle \tag{4.11}$$

S' を計算するには外線を含まないすべての泡グラフを初めから落として残った図形についてのみS行列を計算すれば良いことになる．

§5　S行列要素の計算例

前節で述べた方法に従って具体例においてS行列要素を計算してみよう．実際の計算では更に断面積とか崩壊幅を計算しなければならないが，それらについては改めて次章で議論することにしたい．

まずS行列要素を次の形に書く：

$$S_{fi}=\delta_{fi}-i(2\pi)^4\delta^4(P_f-P_i)T_{fi} \tag{5.1}$$

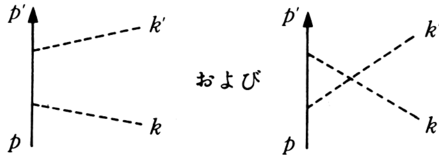
第一項は何も相互作用をしないで素通りする場合に対応し，第二項が実際の相互作用を表わしている．ここでは全エネルギー・運動量を対角化する表示を採用しており，その結果その保存則を表わす四次元 δ 関数が現れるのである．

例1　Compton 散乱

この過程に対しては既に前節で対応する正規積を与えている．そこで $|p,k\rangle$ という状態から $|p',k'\rangle$ という状態への遷移を考える．ここに p,p' は電子の，そして k,k' は光子の四元運動量を表わしている．さて正規積 (4.6) には二項あったが，x_1,x_2 および μ,ν はいずれもダミー変数であり，全体の表式は $x_1\rightleftarrows x_2$，$\mu\rightleftarrows\nu$ という入替えに対して対称であるから，一項のみを残し，その代りに係数 1/2! を落としておいて良い．その結果次の式が得られる：

$$\langle p', k'|S^{(2)}|p, k\rangle = e^2\int d^4x_1\int d^4x_2\langle p'|:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu S_F(x_1-x_2)\gamma_\nu\psi(x_2):|p\rangle$$
$$\times\langle k'|:A_\mu(x_1)A_\nu(x_2):|k\rangle$$
$$= e^2\int d^4x_1\int d^4x_2\langle p'|\overline{\psi}(x_1)|0\rangle\gamma_\mu S_F(x_1-x_2)\gamma_\nu\langle 0|\psi(x_2)|p\rangle$$
$$\times[\langle k'|A_\mu(x_1)|0\rangle\langle 0|A_\nu(x_2)|k\rangle$$
$$+\langle k'|A_\nu(x_2)|0\rangle\langle 0|A_\mu(x_1)|k\rangle] \tag{5.2}$$

そして運動量表示での Feynman 図形は次の二つで与えられる：



この式を評価するために次の行列要素とフーリエ表示を用いる：

$$\langle 0|A_\mu(x)|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2k_0V}}e_\mu^{(\lambda)}e^{ik\cdot x}, \qquad \langle k'|A_\mu(x)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2k_0'V}}e_\mu^{(\lambda')}e^{-ik'\cdot x},$$

$$\langle 0|\psi(x)|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}u(p)e^{ip\cdot x}, \qquad \langle p'|\overline{\psi}(x)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}\overline{u}(p')e^{-ip'\cdot x},$$

$$S_F(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4p\frac{-ip\cdot\gamma+m}{p^2+m^2-i\varepsilon}e^{ip\cdot x}$$

これらの表式を (5.2) に代入し，(5.1) で定義された T_{fi} を求めると，

$$T_{fi}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2k_0V}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2k_0'V}}\cdot\frac{1}{\sqrt{V}}\cdot\frac{1}{\sqrt{V}}$$
$$\times e^2\overline{u}(p')\left[(e'\cdot\gamma)\frac{-i(p+k)\cdot\gamma+m}{(p+k)^2+m^2}(e\cdot\gamma)\right.$$
$$\left.+(e\cdot\gamma)\frac{-i(p-k')\cdot\gamma+m}{(p-k')^2+m^2}(e'\cdot\gamma)\right]u(p) \tag{5.3}$$

ただし e は $e^{(\lambda)}$, e' は $e^{(\lambda')}$ を表わすものとする．次に外線の運動量に対する質量殻上の関係式，すなわち Einstein の関係式 (2.3.1) を用いると

$$(p+k)^2+m^2 = p^2+m^2+k^2+2p\cdot k = 2p\cdot k,$$
$$(p-k')^2+m^2 = p^2+m^2+k'^2-2p\cdot k' = -2p\cdot k'$$

また Dirac 方程式を用いると

$$(i\cdot p\cdot\gamma+m)u(p) = \overline{u}(p')(ip'\cdot\gamma+m) = 0$$

そこで不変振幅 $\mathcal{T}_{fi}$ を次式で導入する:

$$\mathcal{T}_{fi}^{(2)}=\sqrt{2k_0V}\,\sqrt{2k_0'V}\,\sqrt{2p_0V}\,\sqrt{2p_0'V}\;T_{fi}^{(2)} \tag{5.4}$$

この振幅は上記条件式を用いて変形すると

$$\mathcal{T}_{fi}^{(2)}=e^2\sqrt{2p_0'}\,\bar{u}(p')\Big[(e'\cdot\gamma)\frac{-i(p+k)\cdot\gamma+m}{2p\cdot k}(e\cdot\gamma)$$
$$-(e\cdot\gamma)\frac{-i(p-k')\cdot\gamma+m}{2p\cdot k'}(e'\cdot\gamma)\Big]u(p)\sqrt{2p_0} \tag{5.5}$$

Dirac のスピノールに $\sqrt{2p_0}$ を乗じたものは次の Casimir 演算子を持つことは式 (2.8.29) より明らかである．ヘリシティについての和をとれば,

$$\sum_h\sqrt{2p_0}\,u_r(p,h)\bar{u}_s(p,h)\sqrt{2p_0}=(-ip\cdot\gamma+m)_{rs} \tag{5.6}$$

従ってこれは完全にローレンツ系の選び方によらない規格化になっている．さて (5.5) から断面積を計算することは次章で行う．

例2　$\pi\mu$ 崩壊

π^+ 中間子は大部分が次の様式で崩壊する:

$$\pi^+\to\mu^++\nu \tag{5.7}$$

この崩壊を記述する現象論的相互作用としては次の形のものが選ばれる:

$$\mathcal{H}_{\rm int}=\frac{ig}{m_\pi}\bar{\psi}_\nu\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\mu\partial_\lambda\varphi+\text{h. c.} \tag{5.8}$$

ただし m_π は π^+ の質量, ψ_ν,ψ_μ はニュートリノと μ 中間子の場の演算子であり，h.c. はエルミート共役の演算子を表わしている．そして最終状態として $|\mu^+,\nu\rangle=a^+(\mu^+)a^+(\nu)|0\rangle$ をとれば，最低次の崩壊振幅は次のようになる:

$$T_{fi}=\langle\mu^+,\nu|\mathcal{H}_{\rm int}(0)|\pi^+\rangle \tag{5.9}$$

そこで π^+,μ^+,ν の四元運動量をそれぞれ P,p,q と書くと，$P=p+q$ であり,

$$T_{fi}=-\frac{ig}{m_\pi}\langle q|\bar{\psi}_\nu(0)|0\rangle\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\langle p|\psi_\mu(0)|0\rangle\langle 0|\partial_\lambda\varphi(0)|\pi^+\rangle$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2P_0V}\sqrt{V}\sqrt{V}}\frac{g}{m_\pi}\bar{u}(q)\gamma_\lambda(1+\gamma_5)v(p)\cdot P_\lambda \tag{5.10}$$

この式を簡単化するために次式を用いる:

$$\bar{u}(q)iq\cdot\gamma=(ip\cdot\gamma-m_\mu)v(p)=0$$

しからば不変崩壊振幅は

$$\mathcal{T}_{fi}=\sqrt{2P_0V}\,\sqrt{2q_0V}\,\sqrt{2p_0V}\;T_{fi}$$

$$= -ig\left(\frac{m_\mu}{m_\pi}\right)\sqrt{2q_0}\,\bar{u}(q)(1-\gamma_5)v(p)\sqrt{2p_0}. \tag{5.11}$$

例3　π^0 の二光子崩壊

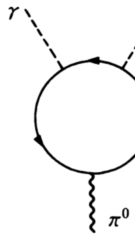
上述の二例は非常に簡単であったが，この種の計算を理解する上で十分複雑であり，かつフェルミオンのループを含み発散の無いのが π^0 中間子の二光子崩壊である．すなわち，

$$\pi^0 \to 2\gamma \tag{5.12}$$

この崩壊過程に関与する相互作用は，π^0 と陽子間の湯川型相互作用と陽子の電磁的相互作用である．前者は（5.4.44）から必要な部分を抽き出すとして，必要な相互作用は ψ, φ をそれぞれ陽子，π^0 の場の演算子とした時に，

$$\mathscr{H}_{\text{int}} = iG\bar{\psi}\gamma_5\psi\cdot\varphi - ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\cdot A_\mu \equiv \mathscr{H}_\pi + \mathscr{H}_{\text{em}}. \tag{5.13}$$

最低次の計算には上の相互作用だけで十分である．Feynman 図形は次図の如し：



本書では Feynman 図形は式と同格と考えて図としての番号は与えていない．

上の図形に対応するS行列要素は，π^0 と二光子の四元運動量を q, k', k'' と書いた時に次式で与えられる：

$$\langle k', k''|S|q\rangle = \frac{(-i)^3}{2!}\int d^4x_1\int d^4x_2\int d^4x_3\langle k', k''|T[\mathscr{H}_{\text{em}}(x_1)\mathscr{H}_{\text{em}}(x_2)\mathscr{H}_\pi(x_3)]|q\rangle$$

$$= \frac{1}{2}e^2G\int d^4x_1\int d^4x_2\int d^4x_3\langle 0|T[\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1), \bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2),$$

$$\bar{\psi}(x_3)\gamma_5\psi(x_3)]|0\rangle$$

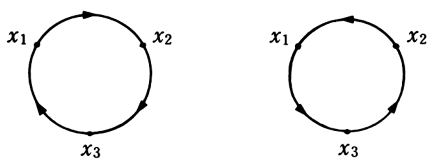
$$\times\langle k', k''|:A_\mu(x_1)A_\nu(x_2):|0\rangle\langle 0|\varphi(x_3)|q\rangle \tag{5.14}$$

係数 1/3! が 1/2! に変わったのは $\mathscr{H}_\pi$ の座標の選び方が x_1, x_2, x_3 と三通りあり，しかもいずれも同じ寄与を与えるので一つだけ，すなわち x_3 の時のみを残し，全体を3倍したからである．また右辺の光子の外線の項は Compton 散

乱の時と同様に，二項を与えるが，両者は同じ寄与を与えるので係数 1/2 を落として一項のみを残すことにする．その結果，

$$\langle k', k''|S|q\rangle = e^2G\int d^4x_1\int d^4x_2\int d^4x_3\langle 0|T[\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1), \overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2), \overline{\psi}(x_3)\gamma_5\psi(x_3)]|0\rangle \times\langle k'|A_\mu(x_1)|0\rangle\langle k''|A_\nu(x_2)|0\rangle\langle 0|\varphi(x_3)|q\rangle \tag{5.15}$$

ところでフェルミオンの演算子を縮約する方法は二通りある．図形では



この二図形の相異はフェルミオンのループの向きが逆な点にある．式では

$$\langle 0|T[\cdots]|0\rangle = -\mathrm{Tr}[\gamma_5S_F(x_3-x_2)\gamma_\nu S_F(x_2-x_1)\gamma_\mu S_F(x_1-x_3)] -\mathrm{Tr}[\gamma_5S_F(x_3-x_1)\gamma_\mu S_F(x_1-x_2)\gamma_\nu S_F(x_2-x_3)] \tag{5.16}$$

この二項は実はお互いに等しい．それを示すには次の公式を利用する：

$$C^{-1}S_F(x-y)C = S_F(y-x)^T. \tag{5.17}$$

何となれば，

$$\begin{aligned} C^{-1}S_F(x-y)C &= C^{-1}\left(-\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+m\right)C\Delta_F(x-y) \\ &= \left(\gamma_\mu^T\frac{\partial}{\partial x_\mu}+m\right)\Delta_F(y-x) \\ &= \left(-\gamma_\mu^T\frac{\partial}{\partial y_\mu}+m\right)\Delta_F(y-x) = S_F(y-x)^T \end{aligned}$$

更に次の公式を利用する：

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu{}^T, \qquad C^{-1}\gamma_5C = \gamma_5{}^T, \qquad \mathrm{Tr}A^T = \mathrm{Tr}A$$

しからば，

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}[\gamma_5S_F(x_3-x_2)\gamma_\nu S_F(x_2-x_1)\gamma_\mu S_F(x_1-x_3)]^T \\ &= \mathrm{Tr}[S_F(x_1-x_3)^T\gamma_\mu{}^TS_F(x_2-x_1)^T\gamma_\nu{}^TS_F(x_3-x_2)^T\gamma_5{}^T] \\ &= \mathrm{Tr}[C^{-1}S_F(x_3-x_1)C\cdot C^{-1}(-\gamma_\mu)C\cdot C^{-1}S_F(x_1-x_2)C\cdot C^{-1}(-\gamma_\nu)C\cdot \\ &\qquad \times C^{-1}S_F(x_2-x_3)C\cdot C^{-1}\gamma_5C] \\ &= \mathrm{Tr}[\gamma_5S_F(x_3-x_1)\gamma_\mu S_F(x_1-x_2)\gamma_\nu S_F(x_2-x_3)] \end{aligned} \tag{5.18}$$

すなわち，第一のトレースは第二のトレースに等しい．上の例から明らかなようにもし光子が奇数個あれば符号が逆転してお互いに消し合うことになる．さて

$$\langle k', k''|S|q\rangle = -2e^2G\int d^4x_1\int d^4x_2\int d^4x_3\langle k'|A_\mu(x_1)|0\rangle\langle k''|A_\nu(x_2)|0\rangle$$
$$\times\langle 0|\varphi(x_3)|q\rangle\mathrm{Tr}[\gamma_5 S_F(x_3-x_1)\gamma_\mu S_F(x_1-x_2)\gamma_\nu S_F(x_2-x_3)] \tag{5.19}$$

以下では二光子の偏極ベクトルをそれぞれ e', e'' と書くことにする．そこで一粒子の波動関数と S_F のフーリエ表示を代入して，x_1, x_2, x_3 について積分すると，$(2\pi)^{4\times 3}$ という係数が出るが S_F のフーリエ表示の係数と打ち消し合う．また3個の四元運動量に関する δ 関数と S_F のフーリエ表示から出る3個の四次元運動量積分が出るが，この中2個の運動量積分は2個の δ 関数を打ち消し，1個の四次元運動量積分と全体のエネルギー・運動量保存を表わす δ 関数が残る．そこでこの δ 関数を除いて T_{fi} を計算し，更に不変崩壊振幅 $\mathcal{T}_{fi}$ を抽き出すと次式が得られる：

$$\mathcal{T}_{fi} = \frac{2e^2G}{(2\pi)^4}e'_\mu e''_\nu\int d^4p$$
$$\mathrm{Tr}\left[\gamma_5\frac{-i(p-k')\cdot\gamma+m}{(p-k')^2+m^2-i\varepsilon}\gamma_\mu\frac{-ip\cdot\gamma+m}{p^2+m^2-i\varepsilon}\gamma_\nu\frac{-i(p+k'')\cdot\gamma+m}{(p+k'')^2+m^2-i\varepsilon}\right] \tag{5.20}$$

ここでまず分子のトレースを計算しなければならない．トレースの計算法については前掲拙著「相対論的量子力学」に詳述してあるが，ここでは基本的公式のみ与える．

$$\mathrm{Tr}(1) = 4, \qquad \mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu) = 4\delta_{\mu\nu} \tag{5.21}$$

更に奇数個の γ 行列の積は0であり，偶数個の場合にはちょうど Wick の展開でフェルミオン場をすべて縮約した時と同じ計算をする．例えば，

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\sigma\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu) \to (\gamma_\sigma\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu) + (\gamma_\sigma\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu) + (\gamma_\sigma\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu)$$
$$\to 4(\delta_{\sigma\lambda}\delta_{\mu\nu} + \delta_{\sigma\nu}\delta_{\lambda\mu} - \delta_{\sigma\mu}\delta_{\lambda\nu})$$

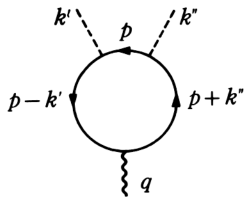
この規則は見て分かるように，縮約したものを δ で置き換え，縮約される γ は隣り合うように順序を変えて符号を定め，最後に因子4を乗ずる．順序を変える時には γ 同士は反可換として扱うのである．$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ を考慮すると

$$\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma) = 4\varepsilon_{\lambda\mu\nu\sigma} \tag{5.22}$$

この公式より

$$\mathrm{Tr}[\gamma_5(-i(p-k')\cdot\gamma+m)\gamma_\mu(-ip\cdot\gamma+m)\gamma_\nu(-i(p+k'')\cdot\gamma+m)]$$
$$=4m\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[p_\alpha(p+k'')_\beta-(p-k')_\alpha(p+k'')_\beta+(p-k')_\alpha p_\beta]$$
$$=4m\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k'_\alpha k''_\beta \tag{5.23}$$

なおこの過程に対応する Feynman 図形は運動量表示では次のようになる：



この図形から明らかなように図形内の各頂点では，ちょうど電気回路で電流の保存が成立しているように，四元運動量の保存が成り立っている．これは各頂点に対応して四次元的座標積分の結果として運動量の δ 関数が生じるためである．

さて上のトレースは p に依存しないから積分の外に出して

$$\mathcal{T}_{fi}=\frac{8me^2G}{(2\pi)^4}(\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}e'_\mu e''_\nu k'_\alpha k''_\beta)$$
$$\times\int\frac{d^4p}{[(p-k')^2+m^2][p^2+m^2-i\varepsilon][(p+k'')^2+m^2-i\varepsilon]} \tag{5.24}$$

この p に関する積分を実行するために Feynman の公式を用いる．まず，

$$\int\frac{d^4p}{[p^2+\Lambda-i\varepsilon]^3}=\frac{i\pi^2}{2(\Lambda-i\varepsilon)} \tag{5.25}$$

これは Feynman-Dyson 理論における基本的公式である．その証明を与えると

$$\int_0^\infty dxe^{-i\alpha x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^\infty dxe^{-i\alpha x-\varepsilon x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{-i}{\alpha-i\varepsilon}$$

以下では lim を省略して書かないことにする．この式から

$$\int_0^\infty dx\exp[-i(p^2+\Lambda)x]=\frac{-i}{p^2+\Lambda-i\varepsilon} \tag{5.26}$$

この式を Λ につき二回微分すると，

$$\int_0^\infty dxx^2\exp[-i(p^2+\Lambda)x]=\frac{2i}{(p^2+\Lambda-i\varepsilon)^3} \tag{5.27}$$

ところでガウス積分の公式から，$x>0$ ならば

$$\int d^4p\,\exp(-ip^2x)=\left(\prod_{j=1}^{3}\int dp_j\,\exp(-ip_j{}^2x)\right)\int dp_0\exp(ip_0{}^2x)=-\frac{i\pi^2}{x^2}$$

従って

$$\int d^4p\int_0^\infty dx\,x^2\exp[-i(p^2+\Lambda)x]=-i\pi^2\int_0^\infty dx\,\exp(-i\Lambda x)=-\frac{\pi^2}{\Lambda-i\varepsilon}$$

ところがこの左辺は（5.27）の右辺を p について積分したものであるから，それを上式の右辺に等しいと置くと（5.25）の公式が得られる．

この公式を（5.24）に適用するにはもう一つ公式が必要である．それは，

$$\frac{1}{A_1A_2\cdots A_n}=(n-1)!\int_0^1 dx_1\cdots\int_0^1 dx_n\delta(1-\sum x_i)\,\frac{1}{(x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_nA_n)^n} \tag{5.28}$$

この公式が成立するための条件は，積分領域内で右辺の分母が消えないことである．上の公式の変形として次のものがある：

$$\frac{1}{AB}=\int_0^1\frac{dx}{[xA+(1-x)B]^2},$$

$$\frac{1}{ABC}=2\int_0^1 dx\int_0^1 dy\frac{x}{[A(1-x)+Bxy+Cx(1-y)]^3}$$

そこで最後の公式を用いてみよう．

$$A=(p-k')^2+m^2-i\varepsilon=p^2-2p\cdot k'+m^2-i\varepsilon,$$

$$B=p^2+m^2-i\varepsilon,$$

$$C=(p+k'')^2+m^2-i\varepsilon=p^2+2p\cdot k''+m^2-i\varepsilon$$

ただし $k'^2=k''^2=0$ を用いている．しからば p 積分は

$$I=\int d^4p\int_0^1 2xdx\int_0^1 dy\frac{1}{[p^2+m^2+(1-x)(-2p\cdot k')+x(1-y)(2p\cdot k'')-i\varepsilon]^3}$$

$$=\int d^4p'\int_0^1 2xdx\int_0^1 dy\frac{1}{[p'^2+m^2+2x(1-x)(1-y)k'\cdot k''-i\varepsilon]^3} \tag{5.29}$$

ただし p の一次項を消去するために次の置換えをしている：

$$p'=p-(1-x)k'+x(1-y)k'' \tag{5.30}$$

（5.29）における p' 積分を Feynman の公式（5.25）を用いて実行すると，

$$I=i\pi^2\int_0^1 xdx\int_0^1 dy\frac{1}{m^2+2x(1-x)(1-y)k'\cdot k''} \tag{5.31}$$

ところで $q^2=(k'+k'')^2=-\mu^2$ であるから，$2k'\cdot k''=-\mu^2$ となるので

$$I=i\pi^2\int_0^1 xdx\int_0^1 dy\frac{1}{m^2-\mu^2x(1-x)(1-y)}$$

ここに m は陽子の質量であり，μ は π^0 の質量である．そして数値的に $4m^2$ は μ^2 の約 200 倍であることを考慮すると

$$\frac{\mu^2}{m^2}x(1-x)(1-y) \leqq \frac{\mu^2}{4m^2} \ll 1$$

従って

$$I = \frac{i\pi^2}{m^2}\int_0^1 xdx\int_0^1 dy\left[1+O\left(\frac{\mu^2}{4m^2}\right)\right] \approx \frac{i\pi^2}{2m^2} \tag{5.32}$$

この結果を (5.24) に代入すると

$$\mathcal{T}_{fi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)\frac{G}{m}(i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}e'_\mu e''_\nu k'_\alpha k''_\beta) \tag{5.33}$$

ここに最後の因子は i が入っているので実数となることに注意されたい．これから π^0 の寿命を計算することは次章で扱う．

§6 Furry の定理

$\pi^0 \to 2\gamma$ のループ計算で示したように逆向きループの寄与が逆符号だと，お互いに打ち消し合って，その過程は禁止される．この禁止則を摂動論によらずに導き出すことを考えてみよう．QED は荷電共役に対して不変である．

$$\mathcal{C}^{-1}\mathcal{H}_{\text{int}}(x)\mathcal{C} = \mathcal{H}_{\text{int}}(x) \tag{6.1}$$

第 2 章 §9 の議論によると，電流 j_μ は荷電共役に対して符号を変えるから，上の式は A_μ も符号を変えることを要求する．

$$\mathcal{C}^{-1}A_\mu(x)\mathcal{C} = -A_\mu(x) \tag{6.2}$$

さて (6.1) が成り立てば，S 行列も荷電共役に対して不変である．S 行列に対する Dyson の公式は次の形に書ける：

$$S = T\exp\left(-i\int d^4x\mathcal{H}_{\text{int}}(x)\right) \tag{6.3}$$

この式の意味は，指数関数を巾展開して出てくるハミルトニアン密度を時間的に順序付け，その後で時空積分を行えということである．しからば，

$$\mathcal{C}^{-1}S\mathcal{C} = T\exp\left(-i\int d^4x\mathcal{C}^{-1}\mathcal{H}_{\text{int}}(x)\mathcal{C}\right) = S \tag{6.4}$$

そこで $|a\rangle, |b\rangle$ を $\mathcal{C}$ の固有状態として

$$\mathcal{C}|a\rangle = \varepsilon_a|a\rangle, \qquad \mathcal{C}|b\rangle = \varepsilon_b|b\rangle \tag{6.5}$$

とした時に $\varepsilon_a \neq \varepsilon_b$ ならば，$a \to b$ という遷移は禁止になる．n 光子状態では

$$\mathcal{C}|n\gamma\rangle=(-1)^n|n\gamma\rangle \tag{6.6}$$

従って奇数個の光子状態から偶数個の光子状態への遷移は禁止される．

また（5.13）のハミルトニアン密度の荷電共役不変性から，π^0 に対して

$$\mathcal{C}^{-1}\varphi(x)\mathcal{C}=\varphi(x) \tag{6.7}$$

従って π^0 が奇数個の光子に崩壊する過程は禁止される．これらの一連の荷電共役不変性に基づいた禁止則を Furry の定理と呼ぶ．

§7　中性中間子の二光子崩壊

前節において荷電共役不変性に基づく禁止則を議論したが，その他の根拠，例えば，角運動量の保存則等に基づく禁止則について考えてみよう．以下において

$$M^0\to 2\gamma \tag{7.1}$$

という中性中間子 M^0 が二光子に崩壊するという過程を議論する．

前節の議論から明らかなように，不変崩壊振幅 $\mathcal{T}$ は，M^0 のスピンが0か1かに従って次のように書ける．右辺は演算子だが適当な行列要素をとるものとする：

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(M^0\to 2\gamma)&\propto c_{\mu\nu}(k,k'):A_\mu(k)A_\nu(k')\varphi(k+k'): &&\text{スピン 0}\\ &\propto c_{\lambda\mu\nu}(k,k'):A_\mu(k)A_\nu(k')\varphi_\lambda(k+k'): &&\text{スピン 1}\end{aligned} \tag{7.2}$$

ただし正規積の中には場の演算子をフーリエ変換したものが入っている．さて（5.4.13）によれば，上の正規積は $\partial_\mu A_\mu(x)$ と可換でなければならない．第4章§4の議論を更に詳しく調べると，このことは $\mathcal{T}$ の中の正規積に電磁場は

$$F_{\mu\nu}(k),\qquad k_\mu A_\mu(k) \tag{7.3}$$

という組み合わせでしか入らないことが分かる．Lorentz 条件を考慮に入れると後者は0と置いて良いことになる．$\mathcal{T}$ が（7.3）のみを含むならば，$\mathcal{T}$ の中で

$$A_\mu(k)\to A_\mu(k)+\lambda k_\mu \tag{7.4}$$

という置き換えをしても $\mathcal{T}$ は不変なはずであり，これがゲージ不変性の要求となる．このことは第6章§5で議論された質量0の粒子のスピンの性質と深く関係していることになる．

1)　0^+ の場合

この時 $c_{\mu\nu}$ は k と k' とで作られるテンソルでなければならない，すなわち，

$$\delta_{\mu\nu},\quad k_\mu k_\nu,\quad k'_\mu k_\nu,\quad k_\mu k'_\nu,\quad k'_\mu k'_\nu$$

の一次結合でなければならない．Lorentz 条件により k_μ か k'_ν を含むものは消えてしまうから，可能な形は

$$c_{\mu\nu}=a\delta_{\mu\nu}+bk'_\mu k_\nu \tag{7.5}$$

そこで (7.4) に対する不変性を考慮すると

$$c_{\mu\nu}k_\mu=c_{\mu\nu}k'_\nu=0,\qquad \text{すなわち}\quad a+b(k\cdot k')=0 \tag{7.6}$$

従って許される $c_{\mu\nu}$ の形とそれに対応する $\mathcal{T}$ の形は

$$c_{\mu\nu}=-b[(k\cdot k')\delta_{\mu\nu}-k'_\mu k_\nu], \tag{7.7}$$

$$\mathcal{T}(M^0\to 2\gamma)\propto[(k\cdot k')\delta_{\mu\nu}-k'_\mu k_\nu]:A_\mu(k)A_\nu(k')\varphi(k+k'):$$

$$\propto:F_{\mu\nu}(k)F_{\mu\nu}(k')\varphi(k+k'): \tag{7.8}$$

この結果は中性スカラー中間子の二光子崩壊の有効相互作用が

$$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\varphi \tag{7.9}$$

で与えられることを意味する．

2)　0^- の場合

この時に $c_{\mu\nu}$ は k と k' とで作られる擬テンソルということから

$$c_{\mu\nu}=b\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k'_\alpha k_\beta \tag{7.10}$$

従って許される $\mathcal{T}$ の形と有効相互作用は

$$\mathcal{T}(M^0\to 2\gamma)\propto:F_{\mu\nu}(k)\tilde{F}_{\mu\nu}(k')\varphi(k+k'):, \tag{7.11}$$

$$F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\varphi \tag{7.12}$$

で与えられる．ただし

$$\tilde{F}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \tag{7.13}$$

3)　1^- の場合

この時には更にスピン 1 の場に対する既約性の条件が存在する．すなわち，

$$(k+k')_\lambda\varphi_\lambda(k+k')=0 \tag{7.14}$$

となり k_λ と k'_λ とは独立ではなく，また k_μ, k'_ν も使えないから $c_{\lambda\mu\nu}$ としては

$$(k_\lambda-k'_\lambda)\delta_{\mu\nu},\quad (k_\lambda-k'_\lambda)k'_\mu k_\nu,\quad k'_\mu\delta_{\lambda\nu},\quad k_\nu\delta_{\lambda\mu}$$

の一次結合をとらねばならない．しかし最初の二つはボーズ対称性に反し，後の二つはゲージ不変性

$$k_\mu c_{\lambda\mu\nu}=k'_\nu c_{\lambda\mu\nu}=0 \tag{7.15}$$

により排除される． 従って 1^- の中性中間子は二光子に崩壊し得ない． 同様に

1^+ の中性中間子も二光子に崩壊し得ない．

定理　スピン1の中性中間子の二光子崩壊は禁止される．

これと同様な議論により次の定理も証明される．

定理　スピン0の粒子の他のスピン0の粒子と一光子への崩壊は禁止される．

二光子の偏極

簡単のために Coulomb ゲージを考えると，

$$\boldsymbol{A}/\!/\boldsymbol{e}, \qquad \boldsymbol{E}/\!/\boldsymbol{e}, \qquad \boldsymbol{H}/\!/\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}, \tag{7.16}$$

$$0^+ \text{ の崩壊振幅} \propto (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2), \tag{7.17}$$

$$0^- \text{ の崩壊振幅} \propto (\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{k}), \tag{7.18}$$

そこで $\boldsymbol{k}_1$ の方向を z 軸に選ぶと，$\boldsymbol{k}_2=-\boldsymbol{k}_1$ であるから上記の二振幅は，右偏光 R と左偏光 L とを用いて表わすことができる．

$$(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)=\frac{e_{1x}+ie_{1y}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{e_{2x}-ie_{2y}}{\sqrt{2}}+\frac{e_{1x}-ie_{1y}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{e_{2x}+ie_{2y}}{\sqrt{2}}$$
$$\propto\Phi^{RR}+\Phi^{LL} \tag{7.19}$$

$$(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{k}_1)\propto\Phi^{RR}-\Phi^{LL} \tag{7.20}$$

これからパリティ $\mathcal{P}$ は

$$\mathcal{P}(\Phi^{RR}\pm\Phi^{LL})=\Phi^{LL}\pm\Phi^{RR}=\pm(\Phi^{RR}\pm\Phi^{LL}). \tag{7.21}$$

高いスピンの場合

スピンが2以上の場合について考える．スピンが2以上の場の演算子を

$$\varphi_{\lambda\mu\cdots} \tag{7.22}$$

と書くことにしよう．これは次のような既約性の条件を満たさねばならない．

(1)　**対称性**　上の φ は任意の2個の添字の入替えに対して対称である．

$$\varphi_{\cdots\lambda\cdots\mu\cdots}=\varphi_{\cdots\mu\cdots\lambda\cdots} \tag{7.23}$$

(2)　**縮約に対する性質**　任意の2個の添字を縮約したものが消える．

$$\varphi_{\cdots\lambda\cdots\lambda\cdots}=0 \tag{7.24}$$

(3)　**発散に対する性質**　任意の添字について発散をとると消える．

$$\partial_\lambda\varphi_{\cdots\lambda\cdots}=0 \tag{7.25}$$

そこで2個の $F_{\mu\nu}$ と $\varphi_{\cdots}$ とを使ってスカラーの有効相互作用を作る．その際に

(1)　$F_{\mu\nu}, \tilde{F}_{\mu\nu}$ は μ と ν との入替えに対して反対称

(2)　$\partial_\mu F_{\mu\nu}=\partial_\mu \tilde{F}_{\mu\nu}=0$

という性質を考慮に入れることにする．

まずスピン２の時について調べると，可能な形は

$$\text{偶パリティ：}\quad \partial_\alpha\partial_\beta F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu}\cdot\varphi_{\alpha\beta},\quad F_{\mu\alpha}F_{\mu\beta}\varphi_{\alpha\beta} \tag{7.26}$$

$$\text{奇パリティ：}\quad \partial_\alpha\partial_\beta F_{\mu\nu}\cdot \tilde{F}_{\mu\nu}\cdot\varphi_{\alpha\beta},\quad F_{\mu\alpha}\tilde{F}_{\mu\beta}\varphi_{\alpha\beta} \tag{7.27}$$

のように２個のタイプがあることが分かる．これを一般化すると

$$\partial_\alpha\partial_\beta\cdots F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu}\cdot\varphi_{\alpha\beta\cdots}, \tag{7.28}$$

$$\partial_\alpha\partial_\beta\cdots F_{\mu\rho}\cdot F_{\nu\rho}\cdot\varphi_{\mu\nu\alpha\beta\cdots} \tag{7.29}$$

これはスピンもパリティも共に偶，あるいは共に奇の場合である．しかしながら共に奇の場合にはボーズ対称性に反することがＳ行列を作った時に部分積分をしてみると分かる註)．従って次の定理を得る：

定理　スピンもパリティも共に奇である中性中間子の二光子崩壊は禁止される．

スピンが偶数でパリティが奇ならば，

$$\partial_\alpha\partial_\beta\cdots F_{\mu\nu}\cdot \tilde{F}_{\mu\nu}\cdot\varphi_{\alpha\beta\cdots} \tag{7.30}$$

スピンが奇数でパリティが偶ならば，

$$\partial_\alpha\partial_\beta\cdots F_{\mu\rho}\tilde{F}_{\nu\rho}\cdot\varphi_{\mu\nu\alpha\beta\cdots}. \tag{7.31}$$

さて一般にスピンもパリティも偶であれば，二光子状態は

$$\Phi^{RR}+\Phi^{LL},\qquad \Phi^{RL},\qquad \Phi^{LR} \tag{7.32}$$

スピンが偶数でパリティが奇であれば

$$\Phi^{RR}-\Phi^{LL} \tag{7.33}$$

またスピンが奇数でパリティが偶であれば

$$\Phi^{RL},\qquad \Phi^{LR} \tag{7.34}$$

のような偏極状態に崩壊することが分かる．

以上のような結論は，Yang によって角運動量に基づいた議論から導き出されたものである．

註)　(7.8), (7.11) のように運動量表示を用いれば，(7.28), (7.29) は

$$\mathcal{T}(M^0\to2\gamma)\propto(k-k')_\alpha(k-k')_\beta\cdots:F_{\mu\nu}(k)F_{\mu\nu}(k')\varphi_{\alpha\beta}\ldots(k+k'):, \tag{7.35}$$

$$\mathcal{T}(M^0\to2\gamma)\propto(k-k')_\alpha(k-k')_\beta\cdots:F_{\mu\rho}(k)F_{\nu\rho}(k')\varphi_{\alpha\beta}\ldots(k+k'): \tag{7.36}$$

の形に書ける．この形ではボーズ対称性の検証は容易である．

第8章　断面積と崩壊幅

前章においてS行列要素の評価法について述べた．しかしながら理論値を実験と比較するためには，更に断面積とか崩壊幅などを計算しなければならない．そこでこのような公式を導き出す．

§1　断面積に関する Møller の公式と崩壊幅の公式

まず単位時間当りの遷移確率の式から出発する．

$$w_{fi}=\lim_{\substack{t_1\to-\infty\\ t_2\to\infty}}\frac{|\langle f|U(t_2,t_1)-1|i\rangle|^2}{t_2-t_1}\tag{1.1}$$

この比は一般に t_1 と t_2 との複雑な関数であるが，上の極限では簡単になる．

さて上の極限では $U(t_2, t_1)$ はS行列となるから

$$\langle f|S|i\rangle=\delta_{fi}-i(2\pi)^4\delta^4(P_f-P_i)\langle f|T|i\rangle\tag{1.2}$$

を用いると，

$$|\langle f|S-1|i\rangle|^2=(2\pi)^4\delta^4(P_f-P_i)|\langle f|T|i\rangle|^2\times(2\pi)^4\delta^4(0)\tag{1.3}$$

ところで V を量子化の体積，T をマクロな時間とすると，

$$(2\pi)^4\delta^4(0)=\int d^4xe^{i0\cdot x}=\int d^4x\sim VT,$$

$$t_2-t_1\sim T$$

従って（1.1）式は

$$w_{fi}=(2\pi)^4\delta^4(P_f-P_i)|\langle f|T|i\rangle|^2V\tag{1.4}$$

また断面積の式は

$$\sigma_{fi}=\frac{V}{v_{\rm rel}}w_{fi}=\frac{(2\pi)^4}{v_{\rm rel}}\delta^4(P_f-P_i)|\langle f|T|i\rangle|^2V^2\tag{1.5}$$

実際の断面積は終状態について和をとることになる．例えば，終状態に n 個の粒子があれば，運動量について和をとることは次の積分を行うことになる：

$$\sum_f\to\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3p_1\cdots\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3p_n\tag{1.6}$$

まず始状態に1個の粒子しかなければ，n 粒子に崩壊する崩壊幅（確率）は

$$w(i\to n)=(2\pi)^4\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3p_1\cdots\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3p_n|\langle f\,|\,T\,|\,i\rangle|^2V\delta^4(P_f-P_i)$$
$$=\frac{(2\pi)^{4-3n}}{2P_0}\int\frac{d^3p_1}{2p_{10}}\cdots\int\frac{d^3p_n}{2p_{n0}}|\langle p_1,\cdots,p_n|\mathcal{T}|P\rangle|^2\delta^4(P_f-P_i)\tag{1.7}$$

ただし不変崩壊振幅 $\mathcal{T}$ は次式で定義される：

$$\langle p_1,\cdots,p_n|\mathcal{T}|P\rangle=\sqrt{2p_{10}V}\cdots\sqrt{2p_{n0}V}\langle p_1,\cdots,p_n|T|P\rangle\sqrt{2P_0V}\tag{1.8}$$

これは (7.5.4) と全く同じ定義である．

さて (1.7) 式の積分は第3章の議論から明らかなようにローレンツ不変である．このことは次の式から明らかである：

$$\int\frac{d^3p}{2p_0}\cdots=\int d^4p\,\theta(p_0)\delta(p^2+m^2)\cdots\tag{1.9}$$

従って (1.7) の崩壊幅は分母の P_0 を除けばローレンツ不変である．そこでこの粒子の平均寿命 τ は全崩壊幅の逆数で与えられ，

$$\frac{1}{\tau}=\sum_n w(i\to n)\tag{1.10}$$

かつ τ の変換性は P_0 のそれと同じである．従って静止系における寿命を τ_0 とすれば，運動系における寿命は，粒子の速さを β とした時に

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\tag{1.11}$$

で与えられることになる．w は単位時間当りの崩壊確率であるが，自然単位系では崩壊幅に等しく，これをはっきりさせるために $\Gamma(i\to n)$ と書いても良い．

次に始状態に2個の粒子が存在すれば，断面積が計算の対象となる．終状態に n 粒子が存在するような反応の全断面積は (1.5), (1.6) を組み合わせて

$$\sigma(2\to n)=\frac{(2\pi)^{4-3n}}{4v_{\rm rel}P_{10}P_{20}}\int\frac{d^3p_1}{2p_{10}}\cdots\int\frac{d^3p_n}{2p_{n0}}|\langle p_1,\cdots,p_n|\mathcal{T}|P_1,P_2\rangle|^2\delta^4(P_f-P_i)\tag{1.12}$$

さて重心系および実験室系においては相対速度 $v_{\rm rel}$ は次の形に書ける：

$$v_{\rm rel}=\left|\frac{\boldsymbol{P}_1}{P_{10}}-\frac{\boldsymbol{P}_2}{P_{20}}\right|\tag{1.13}$$

そこで $v_{\rm rel}P_{10}P_{20}$ をローレンツ不変な形に一般化してみよう．

$$v_{\rm rel}P_{10}P_{20}=|\boldsymbol{P}_1P_{20}-\boldsymbol{P}_2P_{10}|$$

$$\to\sqrt{(\boldsymbol{P}_1P_{20}-\boldsymbol{P}_2P_{10})^2-(\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2)^2}$$
$$=\sqrt{(P_1\cdot P_2)^2-M_1^2M_2^2}\equiv B \tag{1.14}$$

ただし M_1, M_2 は2個の入射粒子の質量である．この B は確かにローレンツ不変量であり，重心系と実験室系では $v_{\rm rel}P_{10}P_{20}$ と一致する．従って

$$\sigma(2\to n)=\frac{(2\pi)^{4-3n}}{4B}\int\frac{d^3p_1}{2p_{10}}\cdots\int\frac{d^3p_n}{2p_{n0}}|\langle p_1,\cdots,p_n|\mathcal{T}|P_1,P_2\rangle|^2\delta^4(P_f-P_i) \tag{1.15}$$

で与えられる断面積はローレンツ不変量である．これを Møller の公式と呼ぶ．勿論終状態に同種粒子が存在すれば，同じ状態を繰り返して数えないために，この式を適当な因子で除しておかなければならない．

また入射粒子が偏極しておらず，終状態でスピンを測定しなければ，入射粒子のスピン状態については平均をとり，終状態の粒子のスピン状態については和をとって断面積を計算することになる．崩壊幅についても同様である．

$$|\mathcal{T}_{fi}|^2\to\frac{1}{2S_i+1}\sum_{S_i}\sum_{S_f}|\mathcal{T}_{fi}|^2,\qquad \text{崩壊幅} \tag{1.16}$$

$$\to\frac{1}{(2S_1+1)(2S_2+1)}\sum_{S_i}\sum_{S_f}|\mathcal{T}_{fi}|^2,\qquad \text{断面積} \tag{1.17}$$

S_i は崩壊する粒子のスピン，S_1, S_2 は入射する二粒子のスピン，S_i (S_f) に関する和は始（終）状態にある粒子のスピン状態に関する和を表わす．

終状態に粒子が2個という場合が多いが，その時の積分について考えよう．

$$I=\int\frac{d^3p_1}{2p_{10}}\int\frac{d^3p_2}{2p_{20}}\,\delta^4(P_f-P_i)\cdots$$
$$=\int d^4p_1\int d^4p_2\theta(p_{10})\delta(p_1{}^2+m_1{}^2)\theta(p_{20})\delta(p_2{}^2+m_2{}^2)\delta^4(P_f-P_i)\quad\cdots \tag{1.18}$$

この積分を遂行するために次のような変数変換を導入する：

$$p_1=\frac{P_f}{2}+\Delta,\qquad p_2=\frac{P_f}{2}-\Delta,\qquad d^4p_1d^4p_2=d^4P_fd^4\Delta \tag{1.19}$$

しからば

$$I=\int d^4\Delta\delta\left[\left(\frac{P_i}{2}+\Delta\right)^2+m_1{}^2\right]\delta\left[\left(\frac{P_i}{2}-\Delta\right)^2+m_2{}^2\right]\cdots$$
$$=\frac{1}{2}\int d^4\Delta\delta\left[\Delta^2+\frac{P_i{}^2}{4}+\frac{m_1{}^2+m_2{}^2}{2}\right]\delta\left[P_i\cdot\Delta+\frac{m_1{}^2-m_2{}^2}{2}\right]\cdots$$

この式を評価するためにまず重心系を選ぶ．そして次のように置く：

$$P_{i0}=W=\sqrt{s}:\quad \text{系の全エネルギー} \tag{1.20}$$

しからば $\boldsymbol{P}_i=0$ より $\varDelta_0$ が直ちに求まる.

$$\varDelta_0=\frac{m_1{}^2-m_2{}^2}{2W}=\frac{m_1{}^2-m_2{}^2}{2\sqrt{s}} \tag{1.21}$$

また第一の δ 関数より $\vec{\varDelta}^2$ が求まる.

$$\vec{\varDelta}^2=\frac{(m_1{}^2-m_2{}^2)^2}{4s}+\frac{s}{4}-\frac{m_1{}^2+m_2{}^2}{2}=\frac{[s-(m_1-m_2)^2][s-(m_1+m_2)^2]}{4s} \tag{1.22}$$

従って積分自身は次のように求まる:

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2W}\int d^3\varDelta\delta[\varDelta^2+\cdots]\cdots\\&=\frac{1}{2\sqrt{s}}\int\varDelta^2 d\varDelta d\Omega\delta[\varDelta^2+\cdots]\cdots\\&=\frac{\varDelta_f}{4\sqrt{s}}\int d\Omega\cdots\end{aligned} \tag{1.23}$$

ここに $\varDelta_f$ は終状態での相対運動量の絶対値であり，(1.22) で与えられる．故に

$$\int\frac{d^3p_1}{2p_{10}}\int\frac{d^3p_2}{2p_{20}}\delta^4(P_f-P_i)\cdots=\frac{\sqrt{[s-(m_1-m_2)^2][s-(m_1+m_2)^2}}{8s}\int d\Omega\cdots \tag{1.24}$$

この公式から重心系における微分断面積を出すと，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{(4\pi)^2B}\cdot\frac{\varDelta_f}{4\sqrt{s}}|\langle p_1,p_2|\mathcal{T}|P_1,P_2\rangle|^2 \tag{1.25}$$

ところで $\varDelta_i$ を始状態での相対運動量の絶対値とすると，

$$\begin{aligned}B^2&=\frac{1}{4}(s-M_1{}^2-M_2{}^2)^2-M_1{}^2M_2{}^2\\&=\frac{1}{4}[s-(M_1-M_2)^2][s-(M_1+M_2)^2]=s\varDelta_i{}^2\end{aligned} \tag{1.26}$$

従って重心系において微分断面積は次の形になる:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{(8\pi W)^2}\left(\frac{\varDelta_f}{\varDelta_i}\right)|\langle p_1,p_2|\mathcal{T}|P_1,P_2\rangle|^2 \tag{1.27}$$

次に**実験室系**で Compton 散乱を考えてみよう．P_1 と P_2 を入射光子と静止電子の四元運動量，p_1 と p_2 を散乱後の光子と電子との四元運動量とし，その空間および時間成分を次のように置く:

$$P_1=(\boldsymbol{p}_1, E_1^0),\quad P_2=(\boldsymbol{0}, m),\quad p_1=(\boldsymbol{P}_1, E_1),\quad p_2=(\boldsymbol{P}_2, E_2) \tag{1.28}$$

しからば位相空間における積分は

$$I=\int\frac{d^3p_1}{2E_1}\int\frac{d^3p_2}{2E_2}\delta^3(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{P}_1)\delta(E_1+E_2-E_1^0-m)\cdots \tag{1.29}$$

まず $\boldsymbol{p}_2$ について積分し，$\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{p}_1$ と置いてやると，

$$\begin{aligned} I&=\int\frac{d^3p_1}{4E_1E_2}\delta(E_1+E_2-E_1^0-m)\cdots \\ &=\int\frac{{p_1}^2dp_1d\Omega_1}{4E_1E_2}\delta(E_1+E_2-E_1^0-m)\cdots \end{aligned} \tag{1.30}$$

ただし p_1 は $\boldsymbol{p}_1$ の絶対値であり，$d\Omega_1$ は散乱光子の運動量の微分立体角である．

ところで

$${E_2}^2=m^2+(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{p}_1)^2=m^2+{P_1}^2+{p_1}^2-2p_1P_1\cos\theta \tag{1.31}$$

これから直ちに

$$\frac{\partial E_1}{\partial p_1}=\frac{p_1}{E_1},\qquad \frac{\partial E_2}{\partial p_1}=\frac{p_1-P_1\cos\theta}{E_2} \tag{1.32}$$

そこで p_1 に関する積分を実行すると，

$$\begin{aligned} I&=\int d\Omega_1\frac{{p_1}^2}{4E_1E_2\left(\frac{p_1}{E_1}+\frac{p_1}{E_2}-\frac{P_1}{E_2}\cos\theta\right)}\cdots \\ &=\frac{{p_1}^2}{4}\int d\Omega_1\frac{1}{p_1(E_1+E_2)-P_1E_1\cos\theta}\cdots \end{aligned} \tag{1.33}$$

そこで記号を少し変えて，$p_1=E_1=\omega'$，$P_1=E_1{}^0=\omega$，$E_1+E_2=\omega+m$ と書くことにすれば，上式の分母は Compton の公式を用いて次のように書ける：

$$\omega'(\omega+m)-\omega\omega'\cos\theta=\omega'[m+\omega(1-\cos\theta)]=\omega m \tag{1.34}$$

従って上記の積分は

$$I=\frac{\omega'^2}{4\omega m}\int d\Omega_1\cdots \tag{1.35}$$

この問題では $B=\omega m$ となるので，実験室系での Compton 散乱の微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1}=\frac{1}{(8\pi m)^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2|\langle f|\mathcal{T}|i\rangle|^2 \tag{1.36}$$

最後に (1.24) 式を，質量 M の粒子が質量 m_1, m_2 の二粒子に崩壊する場合

に応用すると，その崩壊幅は次式で与えられる：

$$\Gamma(i\to 2)=\frac{1}{16\pi M^3}\sqrt{[M^2-(m_1-m_2)^2][M^2-(m_1+m_2)^2]}\,|\mathcal{T}(i\to 2)|^2 \tag{1.37}$$

この際勿論（1.17）式で指定される置換えが必要である．終状態が二粒子系ならば，位相空間の積分は以上のように実行される．

§2　断面積と崩壊幅の計算例

我々はS行列要素の計算法と断面積の公式の計算法を知ったので両者を組み合わせて具体的な結果を出してみよう．

まず Compton 散乱に対する断面積の具体的な表式を導くことにする．そこで入射する光子，電子の四元運動量を k,p と書き，散乱後のものを k',p' と書くことにする．実験室系では

$$\boldsymbol{p}=0,\qquad p_0=m. \tag{2.1}$$

また散乱前後の光子の偏極ベクトルを e,e' と書くことにすれば，横波に対して e,e' は空間成分しかないように選べることは既に（4.3.27）で示したから

$$p\cdot e=p\cdot e'=0 \tag{2.2}$$

と仮定しても一般性を失うことはない．また観測される光子に対しては Lorentz 条件を課することができるので次式を仮定しても良い：

$$k\cdot e=k'\cdot e'=0 \tag{2.3}$$

これらの条件を用いると，$(k\cdot\gamma)$ と $(e\cdot\gamma)$，あるいは $(p\cdot\gamma)$ と $(e\cdot\gamma)$ とは反可換となる．そこで（5.5）式を簡単化することを考える．

$$\begin{aligned}&\bar{u}(p')(e'\cdot\gamma)[-i(p+k)\cdot\gamma+m](e\cdot\gamma)u(p)\\&=\bar{u}(p')(e'\cdot\gamma)(e\cdot\gamma)[i(p+k)\cdot\gamma+m]u(p)\\&=\bar{u}(p')(e'\cdot\gamma)(e\cdot\gamma)(ik\cdot\gamma)u(p)\end{aligned} \tag{2.4}$$

同様にして

$$\bar{u}(p')(e\cdot\gamma)[-i(p-k')\cdot\gamma+m](e'\cdot\gamma)u(p)=-\bar{u}(p)(e\cdot\gamma)(e'\cdot\gamma)(ik'\cdot\gamma)u(p) \tag{2.5}$$

従って不変散乱振幅は次の形に書ける：

$$\mathcal{T}_{fi}=e^2\sqrt{2p_0'}\,\bar{u}(p')\left[(e'\cdot\gamma)(e\cdot\gamma)\frac{ik\cdot\gamma}{2p\cdot k}+(e\cdot\gamma)(e'\cdot\gamma)\frac{ik'\cdot\gamma}{2p\cdot k'}\right]u(p)\sqrt{2p_0} \tag{2.6}$$

(2.8.29) 式を用いて始状態の電子のスピンにつき平均をとり，終状態の電子のスピンについて和をとると，(1.17) の置き換えに対応して

$$|\mathcal{T}_{fi}|^2 \to \frac{1}{2}e^4 \mathrm{Tr}\Big[\Big((e'\cdot\gamma)(e\cdot\gamma)\frac{ik\cdot\gamma}{2p\cdot k}+(e\cdot\gamma)(e'\cdot\gamma)\frac{ik'\cdot\gamma}{2p\cdot k'}\Big)(-ip\cdot\gamma+m)$$
$$\times\Big(\frac{ik'\cdot\gamma}{2p\cdot k'}(e'\cdot\gamma)(e\cdot\gamma)+\frac{ik\cdot\gamma}{2p\cdot k}(e\cdot\gamma)(e'\cdot\gamma)\Big)(-ip'\cdot\gamma+m)\Big] \qquad (2.7)$$

この表式を (1.36) に代入すると，実験室系における微分断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{lab}}=\frac{e^4}{128\pi^2}\cdot\frac{\omega'^2}{m^2\omega^2}\cdot\mathrm{Tr}[\cdots] \qquad (2.8)$$

このトレースの計算をするのに次のベクトルを導入すると便利である．

$$a=\frac{k'}{2p\cdot k'}-\frac{k}{2p\cdot k} \qquad (2.9)$$

このベクトルは p と直交するように作られており，それを利用すると，

$$(e'\cdot\gamma)(e\cdot\gamma)\frac{ik\cdot\gamma}{2p\cdot k}+(e\cdot\gamma)(e'\cdot\gamma)\frac{ik'\cdot\gamma}{2p\cdot k'}=(e\cdot\gamma)(e'\cdot\gamma)(ia\cdot\gamma)+2(e\cdot e')\frac{ik\cdot\gamma}{2p\cdot k}$$

これを用いるとトレースは次の式に帰着させられる：

$$\mathrm{Tr}[\cdots]=8(e\cdot e')^2+2\frac{(\omega-\omega')^2}{\omega\omega'} \qquad (2.10)$$

故に

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{lab}}=\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2\frac{1}{4m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left[4(e\cdot e')^2+\frac{(\omega-\omega')^2}{\omega\omega'}\right] \qquad (2.11)$$

これは入射する光子と散乱される光子の偏極を指定した場合の式である．そこで入射波の偏極について平均し，散乱波について和をとると，

$$(e\cdot e')^2 \to \frac{1}{2}\sum_{\lambda}\sum_{\lambda'}(e,e')^2=\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) \qquad (2.12)$$

そして偏極ベクトルを含まない部分は単に2倍される．

(2.12) 式を導く時には次の公式を用いる．k の方向を z 方向に選ぶと，偏光ベクトルの方向としては x 方向と y 方向を選ぶことができるので

$$\sum_{\lambda}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}^{(\lambda)})^2=a_x{}^2+a_y{}^2=\boldsymbol{a}^2-a_z{}^2=\boldsymbol{a}^2-\frac{(\boldsymbol{a}\boldsymbol{k})^2}{\boldsymbol{k}^2}$$

この式を二回繰り返せば (2.12) 式が得られる．ただし θ は光子の散乱角である．従って上の置換えをした結果の断面積は Klein-仁科の式で与えられる．

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{lab}}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2\frac{1}{[m+\omega(1-\cos\theta)]^2}\left(\frac{\omega^2(1-\cos\theta)^2}{m[m+\omega(1-\cos\theta)]}+1+\cos^2\theta\right) \tag{2.13}$$

ただし (1.34) を用いて ω' を ω と $\cos\theta$ とで表わしている．特に $\omega\ll m$ ならば

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{e^2}{4\pi m}\right)^2\frac{1+\cos^2\theta}{2}=r_0{}^2\frac{1+\cos^2\theta}{2} \tag{2.14}$$

という古典的な Thomson の公式に帰着させられる．r_0 は古典電子半径で

$$r_0=\frac{e^2}{4\pi mc^2}=\left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\right)\left(\frac{\hbar}{mc}\right)=2.818\times10^{-13}\text{cm}\quad(\text{CGS 単位}) \tag{2.15}$$

この時の全断面積は Thomson の断面積と呼ばれ，次式で与えられる：

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}r_0{}^2=\sigma_{\text{Thomson}}=6.65\times10^{-25}\text{cm}^2 \tag{2.16}$$

さて (2.13) を立体角について積分して全断面積を求めると，

$$\sigma=\sigma_{\text{Thomson}}\times\frac{3}{4}\left[\frac{1+\gamma}{\gamma^3}\left\{\frac{2\gamma(1+\gamma)}{1+2\gamma}-\log(1+2\gamma)\right\}+\frac{1}{2\gamma}\log(1+2\gamma)-\frac{1+3\gamma}{(1+2\gamma)^2}\right] \tag{2.17}$$

ただし $\gamma=\omega/m$ である．近似式として

$$\begin{aligned}\sigma&=\sigma_{\text{Thomson}}\left(1-2\gamma+\frac{26}{5}\gamma^2+\cdots\right),&&\gamma\ll1\text{ の時}\\&=\sigma_{\text{Thomson}}\times\frac{3}{8\gamma}\left(\log(2\gamma)+\frac{1}{2}\right),&&\gamma\gg1\text{ の時}\end{aligned} \tag{2.18}$$

次に $\pi\mu$ 崩壊に対して (1.37) を適用してみよう．(7.5.11) より

$$|\mathcal{T}_{fi}|^2\to\sum_{S_f}|\mathcal{T}_{fi}|^2 \tag{2.19}$$

を計算してみよう．ただし終状態のスピンについて和をとるものとする．

$$\sum_{S_f}|\mathcal{T}_{fi}|^2=g^2\left(\frac{m_\mu}{m_\pi}\right)^2\text{Tr}[(1-\gamma_5)(-ip\cdot\gamma-m_\mu)(1+\gamma_5)(-iq\cdot\gamma)] \tag{2.20}$$

さてこのトレースは次のようになる：

$$\text{Tr}=-8(p\cdot q)=4(m_\pi{}^2-m_\mu{}^2) \tag{2.21}$$

従って崩壊幅は (1.37) を用いて，

$$\Gamma(\pi\to\mu+\nu)=\left(\frac{g^2}{4\pi}\right)m_\pi\left(\frac{m_\mu}{m_\pi}\right)^2\left[1-\left(\frac{m_\mu}{m_\pi}\right)^2\right] \tag{2.22}$$

この逆数が π^+ の寿命 $\tau=2.56\times10^{-8}$ sec であるから，g^2 は次のようになる：

$$\frac{g^2}{4\pi}=1.76\times10^{-15} \tag{2.23}$$

そこで $\pi^+\to e^+ + \nu$ に対しても (7.5.8) の相互作用を仮定し，更に同じ g^2 を仮定する．これは普遍性の仮定と呼ばれる．しからば分岐比として

$$\frac{\Gamma(\pi^+\to e^+ + \nu)}{\Gamma(\pi^+\to \mu^+ + \nu)}=\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2\left(\frac{m_\pi{}^2-m_e{}^2}{m_\pi{}^2-m_\mu{}^2}\right)=1.29\times10^{-4} \qquad (2.24)$$

この比は実験と一致し，後に弱い相互作用の構造を調べる上で重要な鍵となる．

最後に $\pi^0\to 2\gamma$ について考えよう．(7.5.33) で $\mathcal{T}_{fi}$ を与えたが，その際にその絶対値の自乗を二光子の偏極状態について和をとらねばならない．そこで $e^{(\lambda')}$ と $e^{(\lambda'')}$ の λ' と λ'' とについて和をとることになるが，(4.3.28) を用いると

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda'}\sum_{\lambda''}(i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}e'_\mu e''_\nu k'_\alpha k''_\beta)^2 &= -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha'\beta'}k'_\alpha k'_{\alpha'}k''_\beta k''_{\beta'}\\ &=2(\delta_{\alpha\beta'}\delta_{\alpha'\beta}-\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'})k'_\alpha k'_{\alpha'}k''_\beta k''_{\beta'}\\ &=2((k'\cdot k'')^2-k'^2k''^2)\\ &=\frac{1}{2}\mu^4 \end{aligned} \qquad (2.25)$$

ここに μ は π^0 の質量，また m は陽子の質量とすると (1.37) を用い，かつ終状態には同種粒子が2個あるので同じ状態を二回数えないように2で除してやると，

$$\begin{aligned}\Gamma(\pi^0\to2\gamma)&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16\pi\mu}\left(\frac{1}{\pi}\right)^2\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2\frac{G^2}{m^2}\cdot\frac{\mu^4}{2}\\ &=\frac{\alpha^2}{64\pi^3}G^2\left(\frac{\mu}{m}\right)^2\mu \qquad \left(\alpha=\frac{e^2}{4\pi}\approx\frac{1}{137}\right)\end{aligned} \qquad (2.26)$$

この逆数をとると

$$\tau=0.7\times10^{-15}\left(\frac{G^2}{4\pi}\right)^{-1}\quad \mathrm{sec} \qquad (2.27)$$

ここで $G^2/4\pi=15$ と置くと，$\tau\approx0.5\times10^{-16}$ sec となる．実験では 2×10^{-16} sec となる．従って理論と実験との一致はあまり良いとは言えない．この問題はまた後にクォーク模型と関連して議論することになる．

勿論，理論値と実験値との一致が悪い時には摂動論という近似が悪いのか，それとも模型が悪いのかという問題が残る．

§3　包含反応

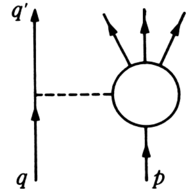
今まで考えた断面積は個別反応 (exclusive reaction) に対するもので，これ

は終状態に存在するすべての粒子を観測する場合に相当する．それに対して終状態において特定の粒子のみを観測し，他の粒子を観測しない場合を考えることもできる．これを包含反応 (inclusive reaction) と呼び，この節では包含反応の断面積をどのように計算するかを議論する．

この節では電子と核子との非弾性散乱について考える．例えば

$$e^- + p \to e^- + \cdots \tag{3.1}$$

という反応を考え，終状態では電子のみを観測し，他の粒子は観測しない．



四元運動量 q の電子が陽子と仮想光子を交換し，四元運動量 q' となった電子を観測するものとする．仮想光子を吸収した陽子は n 個のハドロンからなる状態に移るものとする．始状態の陽子の四元運動量を p とし，n 個のハドロン状態を $|n\rangle$ と表わす．まず電磁的相互作用については最低次の二次まで考え，そのハミルトニアン密度を次のように分ける：

$$\mathcal{H}_{\text{int}}(x) = -j_\mu(x) A_\mu(x), \tag{3.2}$$

$$j_\mu(x) = j_\mu^e(x) + j_\mu^h(x) \tag{3.3}$$

ここに j_μ^e と j_μ^h とはそれぞれ電子とハドロンの四元電流密度である．従って最低次のS行列は

$$S_{fi} = (-i)^2 \int d^4x \int d^4y \langle q'|j_\mu^e(x)|q\rangle D_F(x-y) \langle n|j_\mu^h(y)|p\rangle \tag{3.4}$$

となり，弾性散乱を表わすことになる．しかしながら強い相互作用については高次補正を入れなければならない．強い相互作用のハミルトニアン密度を $\mathcal{H}_s$ と書くことにすると，次の置換えによって高次補正が入る：

$$\langle n|j_\mu^h(x)|p\rangle \to \langle n|T\left[j_\mu^h(x)\exp\left(-i\int d^4y \mathcal{H}_s(y)\right)\right]|p\rangle \Big/ \langle 0|T\exp\left(-i\int d^4y\mathcal{H}_s(y)\right)|0\rangle$$

ただしここでは (7.4.11) により泡グラフを落としており，かつ (7.6.3) の記

法を用いている．第10章で示すが，この右辺は

$$\langle \boldsymbol{n} | \boldsymbol{j}^h_\mu(x) | \boldsymbol{p} \rangle \tag{3.5}$$

に等しい．ただし太字は Heisenberg 表示を表わしている．しかし以下では，(3.5)を再び細字で表わすことにするが混乱は起きないであろう．そこで(3.4)の中のハドロン部分の行列要素は Heisenberg 表示を表わすものと再解釈する．そこで (3.4) を運動量表示に移し，$V=1$ と置くことにする．

$$S_{fi}=-ie\int d^4x\int d^4y\bar{u}(q')\gamma_\mu u(q)e^{i(q-q')\cdot x}\left(\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{e^{ik\cdot(x-y)}}{k^2-i\varepsilon}\right)$$
$$\times\langle n|j^h_\mu(0)|p\rangle e^{i(p-n)\cdot y}$$
$$=(-i)^2(2\pi)^4e\int d^4k\delta^4(q-q'+k)\delta^4(p-n-k)\frac{1}{k^2-i\varepsilon}\bar{u}(q')\gamma_\mu u(q)\langle n|j^h_\mu(0)|p\rangle$$
$$=ie(2\pi)^4\delta^4(p-n-q'+q)\frac{1}{(q'-q)^2}\bar{u}(q')i\gamma_\mu u(q)\langle n|j^h_\mu(0)|p\rangle \tag{3.6}$$

ただし e は符号を含めて電子の電荷を表わすものとしている．従って T 行列は

$$T_{fi}=-e\frac{1}{(q'-q)^2}\bar{u}(q')i\gamma_\mu u(q)\langle n|j^h_\mu(0)|p\rangle \tag{3.7}$$

そこで全断面積は

$$\sigma=\frac{(2\pi)^4}{v_{\rm rel}}\int\frac{d^3q'}{(2\pi)^3}\sum_n\delta^4(n+q'-q-p)|T_{fi}|^2$$
$$=\frac{(2\pi)^4}{v_{\rm rel}}\int\frac{d^3q'}{(2\pi)^3}\sum_n\frac{e^2}{[(q'-q)^2]^2}\delta^4(n+q'-q-p)$$
$$\times|\bar{u}(q')i\gamma_\mu u(q)\cdot\langle n|j^h_\mu(0)|p\rangle|^2 \tag{3.8}$$

さて，$Q=q-q'$ という四元ベクトルを導入することにしよう．そして (3.8) の右辺を電子部分とハドロン部分とに分解すると，

$$\sigma=\frac{M}{2p_0q_0v_{\rm rel}}\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q'}{2q_0'}\cdot\frac{e^2}{Q^4}\cdot4q_0q_0'\bar{u}(q')i\gamma_\nu u(q)\cdot\bar{u}(q)i\gamma_\mu u(q')$$
$$\times\sum_n\left(\frac{p_0}{M}\right)\langle p|j^h_\mu(0)|n\rangle\langle n|j^h_\nu(0)|p\rangle(2\pi)^4\delta^4(n-p-Q) \tag{3.9}$$

ただし M は陽子の質量である．また $B=p_0q_0v_{\rm rel}$ と置く．電子のスピンについては，始状態に関して平均をとり，終状態について和をとると，

$$4q_0q_0'\bar{u}(q')i\gamma_\nu u(q)\bar{u}(q)i\gamma_\mu u(q')\to\frac{1}{2}{\rm Tr}[i\gamma_\nu(-iq\cdot\gamma+m)i\gamma_\mu(-iq'\cdot\gamma+m)], \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}=-2[\delta_{\mu\nu}(q\cdot q'+m^2)-q_\mu q'_\nu-q'_\mu q_\nu] \tag{3.11}$$

更に次のハドロン部分は二階のテンソルの変換性を持つ:

$$\sum_n\left(\frac{p_0}{M}\right)\langle p|j^h_\mu(0)|n\rangle\langle n|j^h_\nu(0)|p\rangle(2\pi)^4\delta^4(n-p-Q)$$

$$=\int d^4x\left(\frac{p_0}{M}\right)\langle p|j^h_\mu(x)j^h_\nu(0)|p\rangle e^{-iQ\cdot x} \tag{3.12}$$

従って全断面積は次の形に書ける:

$$\sigma=\frac{M}{2B}\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q'}{2q'_0}\cdot\frac{e^2}{Q^4}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\right)_{\mu\nu}\int d^4x\left(\frac{p_0}{M}\right)\langle p|j^h_\mu(x)j^h_\nu(0)|p\rangle e^{-iQ\cdot x} \tag{3.13}$$

以下では実験室系を考えると

$$B=qM \qquad (q=|\boldsymbol{q}|) \tag{3.14}$$

そこで非常に高エネルギーを考え，$q\approx q_0=E$，$q'\approx q'_0=E'$ と書くと，

$$\sigma=\frac{1}{2E}\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{E'^2dE'd\Omega'}{2E'}\frac{e^2}{Q^4}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\right)_{\mu\nu}\left(\int\right)_{\mu\nu} \tag{3.15}$$

そこで (3.11) を代入すると

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega'dE'}=\frac{1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{E'}{2E}\cdot\frac{e^2}{Q^4}[q_\mu q'_\nu+q'_\mu q_\nu-\delta_{\mu\nu}(q\cdot q'+m^2)]\left(\int\right)_{\mu\nu} \tag{3.16}$$

この右辺最後の因子は二階のテンソルであり，e^2 に比例しているので次のように置く:

$$\int d^4x\left(\frac{p_0}{M}\right)\langle p|j^h_\mu(x)j^h_\nu(0)|p\rangle e^{-iQ\cdot x}=2\pi e^2W_{\mu\nu} \tag{3.17}$$

しからば $W_{\mu\nu}$ は p, Q という 2 個の四元運動量の関数であるからその一般形は

$$W_{\mu\nu}=W_1\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{Q_\mu Q_\nu}{Q^2}\right)+W_2\left(p_\mu-\frac{p\cdot Q}{Q^2}Q_\mu\right)\left(p_\nu-\frac{p\cdot Q}{Q^2}Q_\nu\right)/M^2 \tag{3.18}$$

ただし電流の保存則に対応して次の関係が成立するように (3.18) を選んでいる:

$$Q_\mu W_{\mu\nu}=Q_\nu W_{\mu\nu}=0 \tag{3.19}$$

そこで高エネルギーで成り立つ次の関係式に注意しよう:

$$[q_\mu q'_\nu+q'_\mu q_\nu-\delta_{\mu\nu}(q\cdot q'+m^2)]\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{Q_\mu Q_\nu}{Q^2}\right)\approx Q^2\approx 4EE'\sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{3.20}$$

$$[q_\mu q'_\nu+q'_\mu q_\nu-\delta_{\mu\nu}(q\cdot q'+m^2)]\left(p_\mu-\frac{p\cdot Q}{Q^2}Q_\mu\right)\left(p_\nu-\frac{p\cdot Q}{Q^2}Q_\nu\right)\approx 2M^2EE'\cos^2\frac{\theta}{2} \tag{3.21}$$

この関係式を (3.16) に代入すると

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega' dE'}=4\alpha^2\frac{E'^2}{Q^4}\left[2W_1\sin^2\frac{\theta}{2}+W_2\cos^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{3.22}$$

この W_1 と W_2 とを構造関数と呼ぶ．いずれも p と Q とから作られるスカラー量の関数となる．$p^2=-M^2$ を考慮すると，独立なスカラー量は

$$Q^2, \qquad p\cdot Q\equiv -M\nu \tag{3.23}$$

ただし ν は実験室系における電子のエネルギー損失に等しくなる．

$$\nu=E-E' \tag{3.24}$$

Bjorken によれば，$Q^2\to\infty$，$M\nu\to\infty$ なる極限で，$Q^2/2M\nu=x$ が有限なら

$$MW_1\to F_1(x), \qquad \nu W_2\to F_2(x) \tag{3.25}$$

のようにいずれも比 x のみの関数となる．これを Bjorken のスケール則と呼ぶ．これは後に強い相互作用のゲージ理論に対する根拠を与えた．

§4　光学定理

量子力学においてスピン 0 の粒子が中心力の場で散乱される場合の散乱振幅は，良く知られた記号で次のような部分波展開で表わされる：

$$f(\theta)=\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{i\delta_l}\sin\delta_l\, P_l(\cos\theta) \tag{4.1}$$

ただし k は運動量の絶対値である．弾性散乱しかなければ位相のずれ δ_l は実数であり，従って全断面積 σ は次式を満足する：

$$\sigma=\int d\Omega|f(\theta)|^2=\frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l=\frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}\,f(0) \tag{4.2}$$

この関係式は光学定理 (optical theorem) と呼ばれる．この式の場の理論における一般化を考えてみよう．

S 行列のユニタリー性を T を用いて表わすと，(7.5.1) を (7.1.2) に代入して

$$\mathrm{Im}\,T_{fi}=-\frac{(2\pi)^4}{2}\sum_j T^\dagger_{fj}\delta^4(P_f-P_i)T_{ji} \tag{4.3}$$

そこで $f=i$ と置くと，

$$\mathrm{Im}\,T_{ii}=-\frac{(2\pi)^4}{2}\sum_j \delta^4(P_i-P_j)|T_{ji}|^2 \tag{4.4}$$

この関係式を不変振幅 $\mathcal{T}$ を用いて書き換えると，

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{T}_{ii}=-\sum_n\frac{(2\pi)^{4-3n}}{2}\int\frac{d^3p_1}{2p_{10}}\cdots\int\frac{d^3p_n}{2p_{n0}}\delta^4(P_i-P_n)|\mathcal{T}_{ni}|^2$$

$$=-2B\sum_{n=2}^{\infty}\sigma(i\to n) \tag{4.5}$$

ただし始状態 $|i\rangle$ は二粒子状態であるとする．全断面積を σ とすると，

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{T}_{ii}=-2B\sigma \qquad (|i\rangle\ \text{は二粒子状態}) \tag{4.6}$$

これが場の理論における光学定理である．全崩壊幅 Γ に対しても同様に

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{T}_{ii}=-P_0\Gamma \qquad (|i\rangle\ \text{は一粒子状態}) \tag{4.7}$$

場の理論における光学定理は弾性散乱だけでなく非弾性散乱まで含めて成立することに注意しておこう．

光学定理の応用例として電子・陽電子対が消滅してハドロンになる過程：

$$e^-+e^+\to\text{hadrons} \tag{4.8}$$

の全断面積を考えてみよう．電磁的相互作用については最低次で，強い相互作用については高次補正の入った伝播関数を考えてみよう．

$$D'_{F\mu\nu}(x-y)$$
$$=\langle0|T\left[A_\mu(x)A_\nu(y)\exp\left(-i\int d^4z\mathcal{H}_s(z)\right)\right]|0\rangle\Big/\langle0|T\exp\left(-i\int d^4z\mathcal{H}_s(z)\right)|0\rangle \tag{4.9}$$

今 $\mathcal{T}_{ii}$ に対応して次の過程を考える．括弧内に四元運動量を書いて，

$$e^-(p)+e^+(\bar{p})\to e^-(p')+e^+(\bar{p}') \tag{4.10}$$

途中でハドロンのみになるとすると，対応するＳ行列は

$$S^{(2)}=-\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4y:j^e_\mu(x)D'_{F\mu\nu}(x-y)j^e_\mu(y): \tag{4.11}$$

この過程に対するＴ行列要素は，$V=1$ と置いて

$$T_{fi}=-e^2\bar{u}(p')i\gamma_\mu v(\bar{p}')D'_{F\mu\nu}(p+\bar{p})\bar{v}(\bar{p})i\gamma_\nu u(p) \tag{4.12}$$

従って前方散乱に対する不変散乱振幅は

$$\mathcal{T}_{ii}=-e^2D'_{F\mu\nu}(p+\bar{p})(2p_0)(2\bar{p}_0)\bar{u}(p)i\gamma_\mu v(\bar{p})\bar{v}(\bar{p})i\gamma_\nu u(p) \tag{4.13}$$

そこで始状態のスピンについて平均をすると

$$(2p_0)(2\bar{p}_0)\bar{u}(p)i\gamma_\mu v(\bar{p})\bar{v}(\bar{p})i\gamma_\nu u(p)\to\frac{1}{4}\mathrm{Tr}[i\gamma_\mu(-i\bar{p}\cdot\gamma-m)i\gamma_\nu(-ip\cdot\gamma+m)]$$

$$=p_\mu\bar{p}_\nu+\bar{p}_\mu p_\nu+\delta_{\mu\nu}(m^2-p\cdot\bar{p}) \tag{4.14}$$

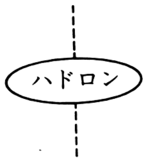
次に変数 s を導入する．

$$s=-(p+\bar{p})^2=2(m^2-p\cdot\bar{p}) \tag{4.15}$$

しからば

$$B=\sqrt{(p\cdot\bar{p})^2-m^4}=\frac{1}{2}\sqrt{s(s-4m^2)}\,. \tag{4.16}$$

次に $\mathcal{T}_{ii}$ の虚部を考えるために，$D'_{F\mu\nu}$ で途中ハドロンになるような寄与のみを導入する．これは次の Feynman 図形に対応する：



$$D'_{F\mu\nu}(k)\to\frac{1}{k^4}(k_\mu k_\nu-\delta_{\mu\nu}k^2)\sigma^h(-k^2)=\frac{1}{k^4}\Pi^h_{\mu\nu}(-k^2)\qquad(k=p+\bar{p}) \tag{4.17}$$

この形に書けることは (3.18) の時と同様な理由による．そして上の Feynman 図形から読み取れるように $\Pi^h_{\mu\nu}(k^2)$ は次の形に書ける：

$$\langle 0|T[j^h_\mu(x)j^h_\nu(y)]|0\rangle=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{ik\cdot(x-y)}\Pi^h_{\mu\nu}(-k^2) \tag{4.18}$$

ただし左辺は Heisenberg 表示で定義されていると解釈すべきである．そこで

$$\sigma^h(-k^2)=\Pi^h(s)\qquad(s=-k^2) \tag{4.19}$$

と書いてやれば，

$$\begin{aligned}-\mathrm{Im}\,\mathcal{T}_{ii}&=e^2\left(p_\mu\bar{p}_\nu+\bar{p}_\mu p_\nu+\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}s\right)\frac{1}{s^2}(k_\mu k_\nu-\delta_{\mu\nu}k^2)\mathrm{Im}\,\Pi^h(s)\\&=e^2\frac{s+2m^2}{s}\mathrm{Im}\,\Pi^h(s)\end{aligned} \tag{4.20}$$

従って (4.8) の全断面積は光学定理により

$$\sigma(e^-+e^+\to\text{hadrons})=\frac{1}{2B}(-\mathrm{Im}\,\mathcal{T}_{ii})=\frac{e^2}{s}\cdot\frac{s+2m^2}{\sqrt{s(s-4m^2)}}\mathrm{Im}\,\Pi^h(s) \tag{4.21}$$

特に高エネルギーで $s\gg m^2$ とすれば

$$\sigma(e^-+e^+\to\text{hadrons})=\frac{e^2}{s}\mathrm{Im}\,\Pi^h(s) \tag{4.22}$$

この断面積を測定することは，後に述べるようにクォークの種類(フレイバー)がどれだけあるかを知るのに役立つ．

§5　三体崩壊

本章の§1において終状態が二粒子状態の時の位相空間での積分について述べた．この節では三粒子終状態の時の積分について述べよう．多くの場合この種の積分は非常に複雑になるが，この節では処理可能な例について述べよう．

まずμ中間子の崩壊について考える．

$$\mu^+ \to e^+ + \nu + \bar{\nu} \tag{5.1}$$

この過程に出てくるνと$\bar{\nu}$とが反粒子であるかどうかは以下の議論では本質的でないのでここでは問題にしない．この過程では終状態で観測されるのは電子のみである．そこで以下ではこの電子のエネルギー・スペクトルがどのような形になるかを議論しよう．(5.1)はいわゆるFermi型相互作用で記述される．この時に不変崩壊振幅$\mathcal{T}_{fi}$は4個のDirac スピノールと適当なγ行列で表わされるが，スピンについて平均したり和をとったりすると，

$$\sum_{S_i}\sum_{S_f}|\mathcal{T}_{fi}|^2 \tag{5.2}$$

は4個のCasimir 演算子と適当なγ行列の積のトレースで与えられる．従ってこの結果は，$p_\nu, p_{\bar{\nu}}, p_e$あるいは$m_e, p_\mu$あるいは$m_\mu$について一次のスカラー量となるはずである．可能な組み合わせは次の四通りである：

$$m_\mu m_e(p_\nu\cdot p_{\bar{\nu}}),\quad (p_\mu\cdot p_e)(p_\nu\cdot p_{\bar{\nu}}),\quad (p_\mu\cdot p_\nu)(p_e\cdot p_{\bar{\nu}}),\quad (p_\mu\cdot p_{\bar{\nu}})(p_e\cdot p_\nu) \tag{5.3}$$

これを崩壊幅の公式に代入して積分することになるが，μ中間子の質量は電子の約200倍なので，出てくる電子は光速度に近く，従ってm_eを無視しても良い．そこで(5.3)の第一項は考えなくても良い．また第三項と第四項とは，ニュートリノを観測せず$p_\nu, p_{\bar{\nu}}$について積分すれば同じ結果を与えるので，エネルギー・スペクトルの可能な形を議論する限りは区別できない．そこで電子のエネルギー・スペクトルの形を求めるにはただ二通りのみを考えれば充分である．

$$(p_\mu\cdot p_e)(p_\nu\cdot p_{\bar{\nu}}),\qquad (p_\mu\cdot p_\nu)(p_e\cdot p_{\bar{\nu}}) \tag{5.4}$$

従ってスペクトルの形を決めるパラメターは両者の係数の比だけになる．このただ一つのパラメターを適当に選んだものがMichel パラメターである．

さて崩壊幅は比例定数を除いて次式で与えられる：

$$\Gamma \propto \int\frac{d^3p_e}{2p_{e0}}\int\frac{d^3p_\nu}{2p_{\nu0}}\int\frac{d^3p_{\bar{\nu}}}{2p_{\bar{\nu}0}}\delta^4(P-p_e-p_\nu-p_{\bar{\nu}})\langle|\mathcal{T}_{fi}|^2\rangle$$

$$=\int\frac{d^3p_e}{2p_{e0}}\int d^4Q\delta^4(P-p_e-Q)\int\frac{d^3p_\nu}{2p_{\nu0}}\int\frac{d^3p_{\bar{\nu}}}{2p_{\bar{\nu}0}}\delta^4(Q-p_\nu-p_{\bar{\nu}})\langle|\mathcal{T}_{fi}|^2\rangle \tag{5.5}$$

ただし $\langle|\mathcal{T}_{fi}|^2\rangle$ はスピンに関する平均値と考えて良い．その形は(5.4)の二項の一次結合で与えられる．まずニュートリノについて積分するために次の積分を実行しよう：

$$I_{\alpha\beta}=\int\frac{d^3p_\nu}{2p_{\nu0}}\int\frac{d^3p_{\bar{\nu}}}{2p_{\bar{\nu}0}}\delta^4(Q-p_\nu-p_{\bar{\nu}})(p_\nu)_\alpha(p_{\bar{\nu}})_\beta$$
$$=\int d^4p_\nu\int d^4p_{\bar{\nu}}\delta_+(p_\nu{}^2)\delta_+(p_{\bar{\nu}}{}^2)\delta^4(Q-p_\nu-p_{\bar{\nu}})(p_\nu)_\alpha(p_{\bar{\nu}})_\beta \tag{5.6}$$

ただし $\delta_+(p^2)=\theta(p_0)\delta(p^2)$ という記号を用いている．次の変数変換を導入する：

$$p_\nu=\frac{Q'}{2}+\varDelta,\qquad p_{\bar{\nu}}=\frac{Q'}{2}-\varDelta \tag{5.7}$$

しからば積分は $d^4Q'd^4\varDelta$ になり，Q' で積分すると残りの積分で $Q'=Q$ と置けて

$$I_{\alpha\beta}=\int d^4\varDelta\,\delta\left[\left(\frac{Q}{2}+\varDelta\right)^2\right]\delta\left[\left(\frac{Q}{2}-\varDelta\right)^2\right]\left(\frac{Q}{2}+\varDelta\right)_\alpha\left(\frac{Q}{2}-\varDelta\right)_\beta$$
$$=\int d^4\varDelta\,\delta\left[\frac{Q^2}{4}+\varDelta^2\right]\delta(2Q\cdot\varDelta)\left(\frac{Q}{2}+\varDelta\right)_\alpha\left(\frac{Q}{2}-\varDelta\right)_\beta \tag{5.8}$$

ただし $Q_0>2|\varDelta_0|$ でのみ積分するものとする．Q は時間的ベクトルなので，Q の方向を時間軸に選ぶと，$\delta(Q\cdot\varDelta)$ を $\varDelta_0$ で積分すると残りの積分では

$$\varDelta_0=0 \tag{5.9}$$

と置けて $\vec{\varDelta}$ について偶数次の項のみが生き残る．

$$I_{\alpha\beta}=\frac{1}{2Q_0}\int\frac{\vec{\varDelta}^2d|\vec{\varDelta}^2|d\Omega}{2|\vec{\varDelta}|}\delta\left[\frac{Q^2}{4}+\vec{\varDelta}^2\right]\left(\frac{1}{4}Q_\alpha Q_\beta-\varDelta_\alpha\varDelta_\beta\right) \tag{5.10}$$

第二項の積分は対称性から $\alpha=\beta\neq4$ の時にのみ生き残るから積分内で

$$\varDelta_\alpha\varDelta_\beta\to\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}(1-\delta_{\alpha4})\vec{\varDelta}^2$$
$$=\frac{1}{3}\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{Q_\alpha Q_\beta}{Q^2}\right)\bar{\varDelta}^2$$
$$=-\frac{1}{12}(\delta_{\alpha\beta}Q^2-Q_\alpha Q_\beta) \tag{5.11}$$

で置き換えて良い．第一項と加えて残りの積分を実行すると，

$$I_{\alpha\beta}=\frac{\pi}{24}(\delta_{\alpha\beta}Q^2+2Q_\alpha Q_\beta) \tag{5.12}$$

この結果を（5.5）に代入すると，次の形の二積分が残る：

$$\int\frac{d^3p}{2p_0}\int d^4Q\,\delta^4(P-p-Q)(P\cdot p)(4Q^2+2Q^2), \tag{5.13}$$

$$\int\frac{d^3p}{2p_0}\int d^4Q\,\delta^4(P-p-Q)[(P\cdot p)Q^2+2(P\cdot Q)(p\cdot Q)] \tag{5.14}$$

ただし $p=p_e$，$P=p_\mu$ と置いている．そこで μ 中間子の静止系を選ぶと，

$$P_0=m_\mu, \qquad \boldsymbol{P}=0 \tag{5.15}$$

$m_e=0$ と置けば，電子のエネルギーはニュートリノ対が反対方向に放出された時に最大値 $m_\mu/2$ をとるので，次のように置く．

$$p_0=|\boldsymbol{p}|=\frac{1}{2}m_\mu x \tag{5.16}$$

しからば x のとり得る値は 0 と 1 との間にあり，

$$\frac{d^3p}{2p_0}\propto xdx \tag{5.17}$$

また積分内の種々のスカラー積の x 依存性は

$$P\cdot p=-\frac{1}{2}m_\mu{}^2x, \qquad -Q^2=-P^2+2p\cdot P=m_\mu{}^2(1-x),$$

$$P\cdot Q=P^2-p\cdot P=m_\mu{}^2\left(-1+\frac{x}{2}\right), \qquad p\cdot Q=p\cdot P=-\frac{1}{2}m_\mu{}^2x$$

従って Γ の積分の形は立体角についてのトリビアルな積分の後に

$$\Gamma\propto\int_0^1 dx\,x^2(a+bx) \tag{5.18}$$

の形になる．すなわちスペクトルは x^2 と x^3 の組み合わせである．そこで積分が 1 になるように規格化して，x^2 と x^3 との適当な一次結合を二つ導入してその比をパラメターとして残すと，電子のエネルギー・スペクトルは

$$dN=4x^2\left[3(1-x)+\frac{2}{3}\rho(4x-3)\right]dx \tag{5.19}$$

第一項は $x=1$ で消え，かつ x について 0 から 1 まで積分すると 1 になるように選んである．第二項は x について積分すると消え，その係数 ρ を Michel パラメターと呼ぶ．ρ の値は $x\sim1$ におけるスペクトルの形から決める．ρ の値は Fermi 型相互作用に入る γ 行列の選択に依存し，VA 型ならば $\rho=0.75$ であり，SP 型ならば $\rho=0$ となる．これについては後に述べる．

三体崩壊と関連してもう一つ有名なのは Dalitz プロットである．彼は

$$K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \tag{5.20}$$

という崩壊過程における π 中間子のエネルギー分布から K^+ 中間子のスピンとパリティを決めようとして Dalitz プロットという方法を考案した．崩壊幅は

$$\Gamma(K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-) = \frac{(2\pi)^{-5}}{2M} \int \frac{d^3p_1}{2p_{10}} \int \frac{d^3p_2}{2p_{20}} \int \frac{d^3p_3}{2p_{30}} \delta^4(P_f - P_i)$$
$$\times |\mathcal{T}(K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-)|^2 \tag{5.21}$$

で与えられる．ただし P_i は K^+, p_1, p_2 は π^+, p_3 は π^- に対応する四元運動量で，$P_f = p_1 + p_2 + p_3$ である．また同じ状態を二回数えないために積分領域には

$$p_{10} < p_{20} \tag{5.22}$$

という制限を設けるものとする．

$|\mathcal{T}|^2$ は $(p_i \cdot p_j)$ という形のスカラー積の関数であるが，独立なのは2個で，

$$(p_1 \cdot P_i), \qquad (p_3 \cdot P_i) \tag{5.23}$$

を独立変数に選ぶ．K中間子の静止系ではこのスカラー積はそれぞれ $-M\omega_1$, $-M\omega_3$ と書ける．M は K 中間子の質量であり，ω_1, ω_3 はK中間子静止系における π 中間子のエネルギーである．エネルギー保存則から

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = M \tag{5.24}$$

従って $|\mathcal{T}|^2$ は ω_1, ω_3 の関数と見なせるから（5.21）の積分は次の形に書ける：

$$I = \int \frac{d^3p_1}{\omega_1} \int \frac{d^3p_2}{\omega_2} \int \frac{d^3p_3}{\omega_3} \delta^3(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - M) f(\omega_1, \omega_3)$$
$$= \int d\omega_1' \int d\omega_3' K(\omega_1', \omega_3') f(\omega_1', \omega_3') \tag{5.25}$$

ただし

$$K(\omega_1', \omega_3') = \int \frac{p_1^2 dp_1 d\Omega_1}{\omega_1} \int \frac{p_3^2 dp_3 d\Omega_3}{\omega_3} \frac{\delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - M)}{\omega_2} \delta(\omega_1 - \omega_1') \delta(\omega_3 - \omega_3') \tag{5.26}$$

ここに $p_1 = |\boldsymbol{p}_1|$, $p_3 = |\boldsymbol{p}_3|$．この計算は Ω_3 の積分から始める．まず $\boldsymbol{p}_1$ の方向を z 方向に選び，$\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_3$ との間の角を θ とすると

$$\int d\Omega_1 \int d\Omega_3 \cdots = 8\pi^2 \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \cdots \tag{5.27}$$

$\cos\theta$ を残すのは，運動量保存のために ω_2 が $\cos\theta$ の関数となるからである．

$$\omega_1^2 = p_1^2 + \mu^2,\ \omega_3^2 = p_3^2 + \mu^2,\ \omega_2^2 = (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_3)^2 + \mu^2 = p_1^2 + p_3^2 + 2p_1p_3\cos\theta + \mu^2 \tag{5.28}$$

そこで積分変数を $p_1, p_3, \cos\theta$ から $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ へ変換するために次の関数行列式を導入する．

$$\frac{\partial(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial(p_1, p_3, \cos\theta)} = \frac{p_1{}^2 p_3{}^2}{\omega_1\omega_2\omega_3} \tag{5.29}$$

従って

$$K(\omega_1', \omega_3') = 8\pi^2 \int dp_1 dp_2 d(\cos\theta) \frac{\partial(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial(p_1, p_3, \cos\theta)} \delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3-M) \times \delta(\omega_1-\omega_1')\delta(\omega_3-\omega_3')$$

$$= 8\pi^2 \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3-M)\delta(\omega_1-\omega_1')\delta(\omega_3-\omega_3') \tag{5.30}$$

この積分は，ω_1', ω_3' の値が物理的に実現可能ならば $8\pi^2$，しからざれば 0 である．かくして余計な因子がすっかり落ちてしまった．これは恐るべき簡単化である．従って崩壊幅（5.21）式は

$$\Gamma(\mathrm{K}^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-) = \frac{(4\pi)^{-3}}{M} \int_{\omega_1<\omega_2} d\omega_1 d\omega_3 |\mathcal{T}(\mathrm{K}^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-)|^2 \tag{5.31}$$

ここで大切なことは次の比例関係が成り立っていることである：

$$\frac{d^2\Gamma}{d\omega_1 d\omega_3} \propto |\mathcal{T}|^2 \tag{5.32}$$

従って各崩壊例を $\omega_1\omega_3$ 平面上の点としてプロットとしてやれば，そのプロットの密度は崩壊振幅の絶対値の自乗に比例することになり，実験から $|\mathcal{T}|^2$ を ω_1 と ω_3 との関数として知ることができる．

Dalitz はこのプロットを次のように正三角形の内部に与えることを提案した．各 π 中間子の運動のエネルギー $T_i = \omega_i - \mu$ を定義すると，エネルギー保存則より

$$T_1 + T_2 + T_3 = M - 3\mu \equiv Q. \tag{5.33}$$

さて正三角形の内部に一点を定め，その点から三辺に垂線を下ろすと，その三垂線の長さの和はその正三角形の高さに等しい．そこで正三角形の高さを適当な単位で Q に等しくとっておく．そして実験で観測された崩壊例を，三辺へ下ろした垂線の長さがそれぞれ T_1, T_2, T_3 に等しくなるような内部の点で表わす．このプロットが Dalitz プロットである．これは ω_1, ω_3 を独立変数とした時に斜交座標になるが，(5.32) 式の比例関係は失われない．

さてQ値は約 75 MeV の程度なので崩壊の際に放出されるπを非相対論的に扱っても余り悪い近似ではないであろう．この時にどのようなプロットができるか調べてみよう．エネルギーと運動量の保存則は

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2=2\mu Q, \tag{5.34}$$

$$\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3=0. \tag{5.35}$$

故にまず p_1, p_2, p_3 は三角不等式を満たさねばならない．

$$(p_1+p_3)^2 \geqq p_2^2 \geqq (p_1-p_3)^2 \tag{5.36}$$

あるいは

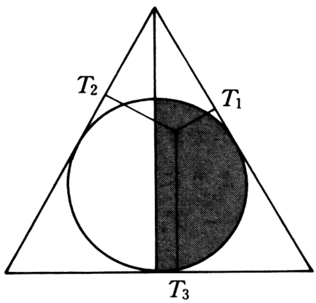
$$2p_1p_3 \geqq |p_2^2-p_1^2-p_3^2|$$

これをTを用いて表わせば

$$4T_1T_3 \geqq (T_2-T_1-T_3)^2=(Q-2T_1-2T_3)^2 \tag{5.37}$$

これは斜交系における楕円の内部を表わす．しかしながらこの図形は T_1, T_2, T_3 に関して対称であるから正三角形の重心を中心にして 120° の回転をしても変わらないはずであるから円となる．これは結局，正三角形の内接円の内部になる．

第4図　Dalitz プロット



第4図において円の内部の点から三辺へ下ろした垂線の長さが T_1, T_2, T_3 となる．$T_1<T_2$ という制限のためにプロットは半円の内部に限られてしまう．

Dalitz プロットは元来 K^+ のスピンとパリティを決めるために考案されたもので，そのためには終状態のスピンとパリティを決めなければならない．そこで2個の π^+ の相対的軌道角運動量を $\boldsymbol{l}$ とし，2個の π^+ の重心と π^- との相対的軌道角運動量を $\boldsymbol{l}'$ とする．π のスピンは0であるから，K^+ のスピンを $\boldsymbol{J}$ と

すると

$$J=l+l'. \tag{5.38}$$

1)　K のスピンが 0 の場合

この場合には $J=0$ なので当然 $l=l'$ である．そこで 3 個の π 中間子の系のパリティは軌道部分から $(-1)^{l+l'}=1$, π 自身の固有のパリティは (-1) であるから，3 個で $(-1)^3=-1$ となり，両者の積は (-1) となる．すなわちスピンが 0 ならばパリティは奇となり，0^- と書くことができる．

2)　一般の場合

まず同種粒子間のボーズ対称性から l は偶数である．そこで 3π 系の種々なスピンとパリティの組み合わせに対してそれを実現する最小の (l,l') の組み合わせを与える．パリティは $(-1)^{l'+1}$ で与えられることは明らかであろう．

3π 系のスピンとパリティ	(l,l') の最小値
0^+	無し
0^-	$(0,0)$
1^+	$(0,1)$
1^-	$(2,2)$
2^+	$(2,1)$
2^-	$(0,2)$, $(2,0)$
⋮	⋮

さてこの崩壊の Q 値は 75 MeV と小さいので大きい (l,l') に対する崩壊振幅は遠心力のために小さくなる．l と l' とに対応する相対運動量の絶対値をそれぞれ p,q とすると，

$$\mathcal{T}\sim(pR)^l(qR)^{l'} \tag{5.39}$$

ただし R は π 同士の力の到達距離である．実験的には Dalitz プロットの密度が一様であることから

$$|\mathcal{T}|^2\sim\text{const} \tag{5.40}$$

従って $l=l'=0$ となり 3π 系は 0^- 状態にあることが分かる．また K^+ がスピン 0 であれば $K^+\to\pi^++\gamma$ は第 7 章の最後の節で述べたように禁止になる．実験で確かにこの崩壊様式は観測されていない．

同様に中性中間子 η^0 は，$\eta^0\to\pi^++\pi^-+\pi^0$ に対する Dalitz プロットの密

度分布および $\eta^0 \to 2\gamma$ の存在より 0^- であることが分かった.

ところでK^+は (5.20) の 3π 崩壊の外に 2π にも崩壊する.

$$K^+ \to \pi^+ + \pi^0 \tag{5.41}$$

ところでK^+のスピンは0であるから π^+ と π^0 との間の相対角運動量は0でなければならない. するとこの 2π という終状態のスピンとパリティは 0^+ となる. これは 3π 崩壊の結論 0^- と矛盾する. (5.41) と (5.20) の崩壊様式をそれぞれ θ, τ と呼び, この矛盾を $\theta\tau$ の謎と呼ぶ. 元来 θ と τ とは異なる中間子と考えられていたが, 測定の精度が増すと共に両者の質量と寿命が一致し, 更に両者の瀕度比が両者の創られる実験条件に依存せず一定であることが明らかになるに従って両者は同じ粒子であると考えざるを得なくなった. そこでLeeとYangとはパリティは弱い相互作用では保存されないと考え, この考えを検証するための種々の実験を提案した. その結果は彼らの考えが正しいことを証明した. 1956年のことである.

第9章　離散対称性

第6章において与えられた系の連続変換群に対する不変性からそれに対応する保存則を導き出すという Noether の定理について述べた．そこで扱われた保存則は古典論でも量子論でも同様に成り立った．これに反して空間反転とか荷電共役等の離散対称性は量子論に特有なもので古典的には現れないような種類の保存則を与える．古典論では物理量は連続的にしか変化しないと考えているので保存則には結び付かないが，この種の対称性は一つの古典解が知られている場合に他の古典解へと導く．

§1　対称性とユニタリー変換

第6章では連続変換群に対する理論の不変性を議論するのに無限小変換に対する不変性を基礎とした．量子論ではこのような変換に対して状態ベクトルは無限小変換の重ね合わせとして生成されるユニタリー変換によって変換され，

$$\Phi \to U\Phi = \exp(i\lambda Q)\Phi \tag{1.1}$$

ここに Q は Noether の定理によって導かれた保存量でエルミート演算子であり，λ は任意の実数である．従って U はユニタリー演算子となる．

離散的ユニタリー変換はこのような生成元，あるいは生成演算子を持たないユニタリー演算子によって表現される．第2章§9および第7章§6で述べた荷電共役は離散的ユニタリー変換 $\mathscr{C}$ によって表わされる．この変換はラグランジアン密度，運動方程式の形を変えず，またS行列と可換である．従って $\mathscr{C}$ は保存量である．この変換の下に場の演算子は，例えば QED をとると，次のように変換される：

$$\mathscr{C}^{-1}\psi\mathscr{C} = C\overline{\psi}, \qquad \mathscr{C}^{-1}\overline{\psi}\mathscr{C} = C^{-1}\psi, \\ \mathscr{C}^{-1}A_\mu\mathscr{C} = -A_\mu. \tag{1.2}$$

既に第2章§9で議論したが，荷電共役に対する Dirac 行列 C は c 数の位相を除いては一意的に定められてしまう．そこでスピノール場 ψ_a に対する C を C_a

と書くならば，一つの標準的行列 C を用いて

$$C_a=\eta_a C, \qquad |\eta_a|=1 \tag{1.3}$$

の如く書けるであろう．荷電共役が保存量として存在する場合には，位相 η_a はラグランジアン密度が荷電共役に対して不変であるように選ぶ．どう選んでも不変にできないような系では，荷電共役に対する不変性は破れていることになる．ところで (1.2) より分かることは，

$$\mathcal{C}^{-2}\psi\mathcal{C}^2=\psi, \qquad \mathcal{C}^{-2}\overline{\psi}\mathcal{C}^2=\overline{\psi}, \qquad \mathcal{C}^{-2}A_\mu\mathcal{C}^2=A_\mu \tag{1.4}$$

すなわち $\mathcal{C}^2$ はすべての場の演算子と可換である．従って $\mathcal{C}^2$ は c 数であると結論できる．そこで $\mathcal{C}$ 自身の位相を調整して次のように選ぶことができる：

$$\mathcal{C}^2=1 \tag{1.5}$$

一般に強い相互作用および電磁的相互作用に対しては $\mathcal{C}$ は保存されている．

同様にして空間反転 $\mathcal{P}$ も弱い相互作用が無ければ保存される．すなわち，ラグランジアン密度，運動方程式の形を変えず，またS行列と可換である．既に (2.6.28) で与えたようにスピノール場 ψ_a に対して

$$\mathcal{P}^{-1}\psi_a(\boldsymbol{x},t)\mathcal{P}=\varepsilon_a\gamma_4\psi_a(-\boldsymbol{x},t), \qquad |\varepsilon_a|=1 \tag{1.6}$$

の如く表わすことができる．ところが空間反転を二回行うと

$$\mathcal{P}^{-2}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{P}^2=\varepsilon_a{}^2\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{1.7}$$

のように単なる位相変換になってしまう．そこで理論がこのような位相変換に対して不変ならば，$\mathcal{P}$ とこの位相変換とを適当に組み合わせたものを改めて $\mathcal{P}$ と定義し直してやれば，

$$\mathcal{P}^{-2}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{P}^2=\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{1.8}$$

とすることができる．この時には ε_a に対して次の制限が付く：

$$\varepsilon_a{}^2=1, \qquad \varepsilon_a=\pm 1 \tag{1.9}$$

この ε_a を a というスピノール場の内部パリティと呼ぶ．第5章§4の議論では陽子と中性子との内部パリティをいずれも (+1) と選んでいる．また $\mathcal{P}^2$ 自身はすべての場の演算子と可換なのでその全体に乗ぜられる位相を調節して

$$\mathcal{P}^2=1 \tag{1.10}$$

と選ぶことができる．(1.5) とか (1.10) のように，ユニタリー演算子の自乗が1になれば，その演算子は同時にエルミート演算子でもある．内部パリティは保存量の数だけのスピノール場に対して自由に決められるが，便利な規約は

$$\varepsilon_n = \varepsilon_p = \varepsilon_\Lambda = 1 \tag{1.11}$$

これは上に述べた規約を少し拡張したもので，その規約の坂田模型的表現である．この規約はクォーク模型では，すべてのクォークの内部パリティは $(+1)$ であるという表現に帰着させられる．

上の議論を一般化して一つの離散対称性に対応するユニタリー変換 $\mathcal{U}$を導入すると，これはS行列と可換である．

$$\mathcal{U}^{-1} S \mathcal{U} = S \tag{1.12}$$

そこで $\mathcal{U}$ の固有状態を考えよう．

$$\mathcal{U}|a\rangle = \varepsilon_a |a\rangle, \qquad \mathcal{U}|b\rangle = \varepsilon_b |b\rangle \tag{1.13}$$

この時に，$\varepsilon_a \neq \varepsilon_b$ であれば $a \to b$ という遷移は禁止される．すなわち

$$\langle b|S|a\rangle = 0 \qquad (\varepsilon_a \neq \varepsilon_b) \tag{1.14}$$

これは Furry の定理の一般化である．ユニタリー変換の特徴として

$$|a'\rangle = \mathcal{U}|a\rangle, \qquad |b'\rangle = \mathcal{U}|b\rangle \tag{1.15}$$

とすると，

$$\langle b'|a'\rangle = \langle b|a\rangle. \tag{1.16}$$

§2 反粒子のパリティ

荷電共役と空間反転とのからみ合いで大切なのは両者の交換関係である．そこで真空は両者の固有状態であり，その固有値は共に1であるとする．このことは真空が縮退していないという仮定から出る結論である．

$$\mathcal{P}|0\rangle = \mathcal{C}|0\rangle = |0\rangle \tag{2.1}$$

以下では次の規約を用いることにする:

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{C}^2 = 1 \tag{2.2}$$

そこでこの二変換をDirac場に対して二通りの順序で施して両者を比較してみよう．この際 $\overline{\psi}$ が本来 $(1,4)$ 行列なので $(4,1)$ 行列にするには $\overline{\psi}^T$ と書くと，

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{C}\mathcal{P} &= \mathcal{P}^{-1}(\eta C\overline{\psi}^T(\boldsymbol{x},t))\mathcal{P} \\
&= \eta\varepsilon C(\overline{\psi}(-\boldsymbol{x},t)\gamma_4)^T \\
&= \eta\varepsilon C\gamma_4{}^T\overline{\psi}^T(-\boldsymbol{x},t) \\
&= -\eta\varepsilon\gamma_4 C\overline{\psi}^T(-\boldsymbol{x},t), \\
\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{P}\mathcal{C} &= \mathcal{C}^{-1}(\varepsilon\gamma_4\psi(-\boldsymbol{x},t))\mathcal{C}
\end{aligned}$$

$$=\eta\varepsilon\gamma_4 C\overline{\psi}^T(-\boldsymbol{x},t)$$
$$=-\mathcal{P}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{C}\mathcal{P}. \tag{2.3}$$

この式を一般化すると

$$\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1}\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)\mathcal{P}\mathcal{C}=(-1)^n\mathcal{P}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)\mathcal{C}\mathcal{P} \tag{2.4}$$

この n 個の演算子の積の中には $\overline{\psi}$ が入っていても良い．そこで上の式を真空状態に乗じ，n 個の Dirac 粒子の存在する状態を $|n\rangle$ と書くと，

$$\mathcal{C}\mathcal{P}|n\rangle=(-1)^n\mathcal{P}\mathcal{C}|n\rangle. \tag{2.5}$$

さて $|n\rangle$ が $\mathcal{P}$ の固有状態でその固有値を $\varepsilon(n)$，$\mathcal{C}|n\rangle=|\bar{n}\rangle$ とすると

$$\mathcal{P}|\bar{n}\rangle=(-1)^n\varepsilon(n)|\bar{n}\rangle \tag{2.6}$$

従って Dirac 粒子が 1 個の状態 ($n=1$) を考えると，$|1\rangle$ と $|\bar{1}\rangle$ との内部パリティは符号が逆であることに気が付く．ボーズ粒子はフェルミ粒子が偶数個の状態に遷移できるとすると，その反粒子と同じ内部パリティを持つことになる．従って次の定理を得る：

定理　反粒子の内部パリティは，ボーズ粒子では元の粒子のものと等しく，フェルミ粒子では元の粒子のものと逆符号になる．

さて，Nをフェルミ粒子の数とすると，(2.5)から次の交換関係が得られる：

$$\mathcal{C}\mathcal{P}=\mathcal{P}\mathcal{C}(-1)^N=(-1)^N\mathcal{P}\mathcal{C} \tag{2.7}$$

$(-1)^N$ は $\mathcal{C}$ とも $\mathcal{P}$ とも可換であるので，$\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$, $(-1)^N$ から生成される群を考えると，いずれも自乗すると 1 に等しくなり，$(-1)^N$ はその群の中心に属する．

次に例として二粒子系を $\mathcal{P}$ の固有状態となるように重心系で考える．

例 1　$\pi^+\pi^-$ 系

このような状態を生成演算子を用いて表わし，$\mathcal{C}$ と $\mathcal{P}$ を施す．

$$\Phi=\varphi(\boldsymbol{p})\varphi^\dagger(-\boldsymbol{p})|0\rangle, \tag{2.8}$$
$$\mathcal{C}\Phi=\varphi^\dagger(\boldsymbol{p})\varphi(-\boldsymbol{p})|0\rangle \tag{2.9}$$
$$\mathcal{P}\Phi=\varphi(-\boldsymbol{p})\varphi^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle=\varphi^\dagger(\boldsymbol{p})\varphi(-\boldsymbol{p})|0\rangle \tag{2.10}$$

ただし，$\mathcal{C}^{-1}=\mathcal{C}$ であり，かつ次式を用いている：

$$\mathcal{C}^{-1}\varphi(x)\mathcal{C}=\varphi^\dagger(x), \qquad \mathcal{C}^{-1}\varphi^\dagger(x)\mathcal{C}=\varphi(x) \tag{2.11}$$

これから直ちに次の関係を得る：

$$\mathcal{C}\Phi=\mathcal{P}\Phi, \qquad \mathcal{C}\mathcal{P}\Phi=\Phi \tag{2.12}$$

すなわち $\pi^+\pi^-$ 系は $\mathcal{C}\mathcal{P}$ の固有値 1 に対応する状態である．さて中性K中間子

は$\mathcal{CP}$が保存されるとすると，その固有値 (+1) あるいは (−1) に属する2成分を持ち，それぞれ K^0_S, K^0_L と書かれる．前者は短寿命 (~10^{-10}sec) であり，後者は長寿命(~5×10^{-8}sec)である．添字のSとLとはそれぞれ short と long に対応する．従って$\mathcal{CP}$が保存されるならば，長寿命の成分が2個のπ中間子に崩壊することは禁止される．ところが1964年に Christenson, Cronin, Fitch, Turley はこの過程を観測し，$\mathcal{CP}$は保存されないことを示した．

$$K^0_L \to \pi^+ + \pi^- \tag{2.13}$$

例 2　ポジトロニューム (^{1}S 状態と ^{3}S 状態)

電子と陽電子は水素原子のように束縛状態を形成する．この束縛状態はポジトロニュームと呼ばれるが，不安定で複数の光子に崩壊する．この状態を$\boldsymbol{\Phi}$と書けば，パリティは両者間の相対軌道角運動量の量子数 L により定まり，

$$\mathcal{P}\boldsymbol{\Phi} = (-1)^L \varepsilon(e^-)\varepsilon(e^+)\boldsymbol{\Phi} = (-1)^{L+1}\boldsymbol{\Phi} \tag{2.14}$$

ただし本節に掲げた定理を用いている．従ってS状態 ($L=0$) ではパリティは奇(−1)である．荷電共役に対する固有値を調べるために$\boldsymbol{\Phi}$を次のように書く：

$$\boldsymbol{\Phi} = a^\dagger(\boldsymbol{p}, \sigma_z, e)a^\dagger(-\boldsymbol{p}, \sigma'_z, -e)|0\rangle \tag{2.15}$$

ただし $a^\dagger$ は生成演算子で運動量，スピン，電荷が指定されている．しからば，

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}a^\dagger(\boldsymbol{p}, \sigma_z, e)a^\dagger(-\boldsymbol{p}, \sigma'_z, -e)|0\rangle \\ &= a^\dagger(\boldsymbol{p}, \sigma_z, -e)a^\dagger(-\boldsymbol{p}, \sigma'_z, e)|0\rangle \\ &= -a^\dagger(-\boldsymbol{p}, \sigma'_z, e)a^\dagger(\boldsymbol{p}, \sigma_z, -e)|0\rangle \\ &= -P_x P_\sigma \boldsymbol{\Phi} \end{aligned} \tag{2.16}$$

ただし P_x，P_σ は二粒子間の座標とスピンを交換する演算子である．そこで S を二粒子のスピンを合成したものとすれば，三重項では $S=1$，一重項では $S=0$ である．前者は対称スピン状態，後者は反対称スピン状態に対応するから

$$P_x\boldsymbol{\Phi} = (-1)^L\boldsymbol{\Phi}, \qquad P_\sigma\boldsymbol{\Phi} = (-1)^{S+1}\boldsymbol{\Phi} \tag{2.17}$$

従って (2.17) を (2.16) に代入すれば

$$\mathcal{C}\boldsymbol{\Phi} = (-1)^{L+S}\boldsymbol{\Phi} \tag{2.18}$$

勿論ポジトロニューム状態は (2.15) のような状態をいろいろな$\boldsymbol{p}$の値に対して重ね合わせなければ実現されない．従って ^{3}S と ^{1}S のポジトロニュームに対して

$$\mathcal{C}\boldsymbol{\Phi}(^3\mathrm{S}) = -\boldsymbol{\Phi}(^3\mathrm{S}), \qquad \mathcal{C}\boldsymbol{\Phi}(^1\mathrm{S}) = \boldsymbol{\Phi}(^1\mathrm{S}) \tag{2.19}$$

前者はベクトル，後者は擬スカラーである．Furry の定理から予測される崩壊様式は

$$^3\mathrm{S} \to 3\gamma, \qquad ^1\mathrm{S} \to 2\gamma. \tag{2.20}$$

§3　荷電パリティとG共役

荷電空間における回転の一つとして荷電パリティ T を次式で定義する：

$$T = \exp(i\pi I_2) \tag{3.1}$$

しからば明らかに

$$T^{-1} I_3 T = -I_3 \tag{3.2}$$

原子核において I_3 は陽子数と中性子数の差の半分であるから対角化されている．従って同時に T を対角化し得るのは $I_3=0$ の時のみである．この時，量子数 I は整数であるから I_2 の固有値もすべて整数となり，

$$T^2 = \exp(2\pi i I_2) \to 1 \tag{3.3}$$

という置換えをしても良いことになる．この時 T の固有値は

$$T = \pm 1 \tag{3.4}$$

となり，この固有値が与えられた原子核の荷電パリティになる．この量が定義し得るのは陽子数と中性子数の等しい原子核に限られる．

また一核子系に対して，T は次の表現を持つ：

$$T = \exp\left(\frac{1}{2} i\pi\tau_2\right) = i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

この行列は陽子と中性子を入れかえる．

Kroll-Foldy の定理

$I_3=0$ なる状態の荷電パリティは次式で与えられる：

$$T = (-1)^I. \tag{3.6}$$

(証明)　アイソ・スピンの固有状態 $|I', I_3'\rangle$ を考えると，この定理は

$$T|I', 0\rangle = (-1)^{I'} |I', 0\rangle \tag{3.7}$$

と表現し得る．この式を証明するには代数的に同値な次式を証明すれば良い：

$$e^{i\pi L_y} Y_{l,0} = (-1)^l Y_{l,0} \tag{3.8}$$

ところが T に相当する演算子は y 軸のまわりの π だけの回転を表わすから，この演算により

$$x \to -x, \qquad y \to y, \qquad z \to -z \tag{3.9}$$

従って

$$\cos\theta \to -\cos\theta \tag{3.10}$$

そこで $Y_{l,0}$ を $P_l(\cos\theta)$ で置き換えると (3.8) と同値な式が出る.

$$e^{i\pi L_y}P_l(\cos\theta) = P_l(-\cos\theta) = (-1)^l P_l(\cos\theta) \tag{3.11}$$

さて T によってアイソ・スピンの3成分は次の変数を受ける. (3.9) に対応し

$$T^{-1}I_1T = -I_1, \qquad T^{-1}I_2T = I_2, \qquad T^{-1}I_3T = -I_3 \tag{3.12}$$

さて核子のアイソ・スピンの場の理論による表現 (6.3.14) を荷電共役によって変換してやると

$$\mathcal{C}^{-1}\hat{I}\mathcal{C} = \mathcal{C}^{-1}\left(\frac{1}{2}\int d^3x\psi^\dagger\hat{\tau}\psi\right)\mathcal{C} = -\frac{1}{2}\int d^3x\psi^\dagger\hat{\tau}^T\psi \tag{3.13}$$

従って $\hat{\tau}$ に対する Pauli 表現を用いると

$$\mathcal{C}^{-1}I_1\mathcal{C} = -I_1, \qquad \mathcal{C}^{-1}I_2\mathcal{C} = I_2, \qquad \mathcal{C}^{-1}I_3\mathcal{C} = -I_3 \tag{3.14}$$

この結果は, 中間子のアイソ・スピンを考慮しても成り立つ. この式を (3.12) と比べると, $\mathcal{C}T$ という積はアイソ・スピンの3成分と可換になる. そこでCとTという二文字を合成してGという文字を作り, G共役を次式で定義する:

$$G = \mathcal{C}T = \mathcal{C}e^{i\pi I_2} \tag{3.15}$$

しからば

$$G^{-1}\hat{I}G = \hat{I} \tag{3.16}$$

また π 中間子場に対して

$$G^{-1}\hat{\varphi}G = -\hat{\varphi} \tag{3.17}$$

このように π 中間子のすべての荷電状態がGの固有状態となり, その固有値は (-1) となる. 荷電共役の場合と異なって, 中性だけでなく荷電状態にまで使えるので便利である. ただしアイソ・スピン保存則は核力に対してのみ成り立ち, 既に電磁的相互作用により破れるので, G不変性についても同様な限界が存在する.

しかし強い相互作用に対しては G 不変性に基づいた Furry の定理が成り立つ.

$$\begin{array}{llllll} & \rho \to \pi + \pi, & & \rho \not\leftrightarrow \eta + \pi & & \\ G: + & - & - & + & + & - \end{array}$$

前者は実現し，後者は禁止されている．これが Furry の定理の例である．

以上議論したのは空間反転，荷電共役，G 共役のようなユニタリー変換であるが，次節で述べる時間反転は反ユニタリー変換と呼ばれるものとなる．しかし後の便宜のために素粒子の状態を指定する種々の量がどのような変換を受けるかを表3に示しておく．

表 3 種々の粒子状態指定量の変換性

	角運動量	運動量	座　標	電　荷
荷電共役	＋	＋	＋	－
空間反転	＋	－	－	＋
時間反転	－	－	＋	＋

この変換表の意味は明らかであろう．この表は次節の議論で役に立つ．

§4 反ユニタリー変換

前節で議論した荷電共役と空間反転とはユニタリー変換であるが，時間反転は反ユニタリー変換と呼ばれるものになる．荷電共役，空間反転，時間反転をそれぞれ C, P, T と書くと種々の積変換が定義され次のように分類される：

ユニタリー変換　：　C, P, CP

反ユニタリー変換　：　T, CT, PT, CPT

以下ではまず反ユニタリー変換の一般論から始めよう．

1) ユニタリー変換

$$\boldsymbol{\Phi} \to \boldsymbol{\Phi}' = \mathcal{U}\boldsymbol{\Phi} \tag{4.1}$$

ここに $\mathcal{U}$ はユニタリー演算子であり，2個の状態ベクトルに対してその内積は不変である．すなわち．内積を括弧で表わせば

$$(\boldsymbol{\Phi}', \boldsymbol{\Psi}') = (\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}). \tag{4.2}$$

2) 反ユニタリー変換

$$\boldsymbol{\Phi} \to \boldsymbol{\Phi}' = \mathcal{U}^T\boldsymbol{\Phi}^* \equiv \boldsymbol{\Phi}^{\star} \tag{4.3}$$

この変換は明らかに複素共役の一般化であるので ☆ で表わしている．この時に

$$(\boldsymbol{\Phi}', \boldsymbol{\Psi}') = (\boldsymbol{\Phi}^{\star}, \boldsymbol{\Psi}^{\star}) = (\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Phi}) \tag{4.4}$$

この式は ☆ が複素共役の一般化であることから明らかであろう．上の記法はヒ

ルベルト空間のベクトルの各成分について書いたものであるので区別していないが，この変換は明らかに列ベクトルを行ベクトルに，ケット・ベクトルをブラ・ベクトルに変換するものである.

次に演算子の変換を次式で定義する：

$$(\Phi^\star, Q\Psi^\star)=(\Psi, Q^\star\Phi) \tag{4.5}$$

これはある反ユニタリー変換を状態ベクトルに押付けるか，演算子に押付けるかという選択に相当し，時間依存性を状態ベクトルに押付けるか，演算子に押付けるかによって生ずるSchrödinger描像とHeisenberg描像との相異に相当する. Heisenberg表示では運動方程式の形が古典論と量子論で共通であったように，後者の選択は古典論の知識を利用し得るという点で便利である．そして

$$Q^\star=\mathcal{U}Q^T\mathcal{U}^{-1} \tag{4.6}$$

であることは容易に導かれる．しからば演算子の変換に関して

$$(aA+bB)^\star=aA^\star+bB^\star \qquad (\text{線形性}) \tag{4.7}$$

$$(AB)^\star=B^\star A^\star \tag{4.8}$$

ここに a, b はc数である．この線形性は状態ベクトルの変換では成立せず，係数は複素共役に変わる．これも演算子の変換を考える利点である.

定理　ある物理量に対応する演算子 Q が，$Q^\star=\pm Q$ を満たす時に，Φ を Q の固有状態とし，その固有値を q とすれば，$\Phi^\star$ も Q の固有状態でその固有値は $\pm q$ である.

(証明)

$$(Q\Phi^\star, \Psi^\star)=(\Phi^\star, Q\Psi^\star)=(\Psi, Q^\star\Phi)=\pm(\Psi, Q\Phi)=\pm q(\Psi, \Phi)=\pm q(\Phi^\star, \Psi^\star)$$

しかるに $\Psi^\star$ は任意の状態であるから

$$Q\Phi^\star=\pm q\Phi^\star \qquad (\text{証明終})$$

さてある系が反ユニタリー変換 ☆ に対して不変であるとは次式を意味する：

$$S^\star=S \tag{4.9}$$

Schrödinger 表示においてハミルトニアンを自由部分と相互作用部分に分ける.

$$H=H_f+H_{int} \tag{4.10}$$

不変性の条件 (4.9) は次式が成立すれば満たされる：

$$H_f^\star=H_f, \qquad H_{int}^\star=H_{int} \tag{4.11}$$

このことを証明するために相互作用表示に移る．相互作用における相互作用ハミルトニアンは次式で与えられる：

$$H_{\mathrm{int}}(t)=e^{itH_f}H_{\mathrm{int}}e^{-itH_f} \tag{4.12}$$

従って

$$\begin{aligned}H_{\mathrm{int}}(t)^{\star}&=e^{-itH_f^{\star}}H_{\mathrm{int}}^{\star}e^{itH_f^{\star}}\\&=e^{-itH_f}H_{\mathrm{int}}e^{itH_f}\\&=H_{\mathrm{int}}(-t)\end{aligned} \tag{4.13}$$

この関係式が我々の証明の出発点となる．Dyson の公式を次の形に書く：

$$S=T_t\ \exp\left(-i\int dtH_{\mathrm{int}}(t)\right) \tag{4.14}$$

ここに T_t は t というパラメターにつき順序付けをすることを意味する．☆をとると順序付けが逆になるから，それに対応して $\tilde{T}_t$ という演算を導入する．

$$\begin{aligned}S^{\star}&=\tilde{T}_t\exp\left(-i\int dt\,H_{\mathrm{int}}(t)^{\star}\right)\\&=\tilde{T}_t\exp\left(-i\int dtH_{\mathrm{int}}(-t)\right)\\&=T_{t'}\exp\left(-i\int dt'\,H_{\mathrm{int}}(t')\right)\\&=S\end{aligned} \tag{4.15}$$

ただし途中で $t'=-t$ と置き，$\tilde{T}_t=T_{-t}$ を用いている．

反ユニタリー変換に対する不変性から禁止則は出ないが，第5章§4で議論したような詳細釣合の原理を出すことはできる．(4.15) の意味するものは

$$(\Phi^{\star},S\Psi^{\star})=(\Psi,S\Phi) \tag{4.16}$$

であるから，スピン状態について和をとると

$$\sum_{S_i}\sum_{S_f}|\mathcal{T}(i\to f)|^2=\sum_{S_i}\sum_{S_f}|\mathcal{T}(f^{\star}\to i^{\star})|^2 \tag{4.17}$$

この式と (8.1.27) とを組み合わせると逆反応の微分断面積の間の関係式を得る．

1)　T, TP に対する不変性

$$\frac{d}{d\Omega}\sigma(a+b\to c+d)\Big/\frac{d}{d\Omega}\sigma(c+d\to a+b)=\frac{(2S_c+1)(2S_d+1)}{(2S_a+1)(2S_b+1)}\left(\frac{p_{cd}}{p_{ab}}\right)^2 \tag{4.18}$$

ただし S_a は粒子 a のスピンを表わす．他も同様である．p_{ab} (p_{cd}) は重心系に

おける粒子 $a, b(c, d)$ 間の相対運動量の絶対値を表わす．π 中間子，あるいはパイオンのスピンを決定するのに用いた（5.4.35）式は上の（4.18）式の特別の場合であり，この式は強い相互作用の時間反転に対する不変性の仮定の下に導かれたものである．

2) CT, CPT に対する不変性

$$\frac{d}{d\Omega}\sigma(a+b\to c+d)\Big/\frac{d}{d\Omega}\sigma(\bar{c}+\bar{d}\to\bar{a}+\bar{b})=\frac{(2S_c+1)(2S_d+1)}{(2S_a+1)(2S_b+1)}\left(\frac{p_{cd}}{p_{ab}}\right)^2 \tag{4.19}$$

§5 CPT 定理

次に反ユニタリー変換の一つで局所場理論において常に成り立つ CPT定理，あるいは Pauli-Lüders の定理について述べる．この定理は Lüders により 1954 年に，Pauli により 1955 年に与えられたものであるが，1956 年のパリティの非保存の発見と共に脚光を浴びることになったものである．

この節では ☆ は CPT 変換を表わすものとする．☆ は次式で定義される．

$$\psi(x)^{\star}=i\gamma_5\psi(-x),\quad \overline{\psi}(x)^{\star}=i\overline{\psi}(-x)\gamma_5 \qquad \text{（スピノール）} \tag{5.1}$$

$$\varphi_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(x)^{\star}=(-1)^n\varphi_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(-x) \qquad \text{（テンソル）} \tag{5.2}$$

ここに場の演算子は Heisenberg 表示，あるいは相互作用表示のように時間依存性の存在する表示で考えられている．

CPT 定理　局所場理論は CPT 変換に対して不変である．

この定理の内容は次式で表現される：

$$\mathcal{L}(x)^{\star}=\mathcal{L}(-x) \tag{5.3}$$

あるいはもっと詳しくは

$$\mathcal{L}_{\mathrm{f}}(x)^{\star}=\mathcal{L}_{\mathrm{f}}(-x),\qquad \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(x)^{\star}=\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(-x). \tag{5.4}$$

このことを証明するために簡単なラグランジアン密度を考える．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(x)=g\overline{\psi}_{\alpha_1}(x)\cdots\overline{\psi}_{\alpha_n}(x)O^{\lambda_1\cdots\lambda_m}_{\alpha_1\cdots\alpha_n\beta_1\cdots\beta_n}\psi_{\beta_1}(x)\cdots\psi_{\beta_n}(x)\varphi_{\lambda_1\cdots\lambda_m}(x) \tag{5.5}$$

ただし $\overline{\psi}$ と ψ とは同数だけあると仮定する．O は Dirac 行列の積で，例えば $m=n$ であれば，

$$(\gamma_{\lambda_1})_{\alpha_1\beta_1}\cdots(\gamma_{\lambda_n})_{\alpha_n\beta_n}(1+\gamma_5). \tag{5.6}$$

また $\varphi_{\lambda_1\cdots\lambda_m}$ はボーズ部分で，ベクトルの足が $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ で与えられるものであれば複数個の演算子の積で良い．例えば，

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma}(x)=\varphi_\alpha(x)\varphi_\beta(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\gamma} \tag{5.7}$$

しかし容易に分かるように常に次式が成り立つ:

$$\varphi_{\lambda_1\cdots\lambda_m}(x)^\star=(-1)^m\varphi_{\lambda_1\cdots\lambda_m}(-x). \tag{5.8}$$

さて CPT 変換によりスピノール演算子の順序が逆転する．ボーズ部分は正規積で定義されているとすれば順序は問題にならない．そこでスピノール部分の順序を元に戻すと $(-1)^n$ という符号因子が付く．従って (5.3) を証明するには次式を証明しなければならない:

$$\begin{aligned}&(-1)^{m+n}(i\gamma_5)_{\alpha_1\alpha_1'}\cdots(i\gamma_5)_{\alpha_n\alpha_n'}O^{\lambda_1\cdots\lambda_m}_{\alpha_1'\cdots\alpha_n'\beta_1'\cdots\beta_n'}(i\gamma_5)_{\beta_1'\beta_1}\cdots(i\gamma_5)_{\beta_n'\beta_n}\\&=O^{\lambda_1\cdots\lambda_m}_{\alpha_1'\cdots\alpha_n'\beta_1'\cdots\beta_n'}\end{aligned} \tag{5.9}$$

この式を証明するには次式を用いれば十分である:

$$(i\gamma_5)(1\text{ or }\gamma_5)(i\gamma_5)=-(1\text{ or }\gamma_5),\qquad (n-m)\text{ 個}$$

$$(i\gamma_5)(\gamma_\mu\text{ or }\gamma_\mu\gamma_5)(i\gamma_5)=\gamma_\mu\text{ or }\gamma_\mu\gamma_5,\qquad m\text{ 個}$$

従って全体としての符号の変化は $(-1)^{n-m}=(-1)^{n+m}$ となり，(5.9) が証明される．

次に ψ と $\overline{\psi}$ との数が異なる場合を考える．例えば

$$\mathscr{L}_{\text{int}}(x)=g\overline{\psi}(x)(1+\gamma_5)C\overline{\psi}(x)\varphi(x)+\text{h. c.} \tag{5.10}$$

荷電共役の議論から明らかなように，本義ローレンツ変換に対しては，$C\overline{\psi}$ は ψ と同じ変換を受ける．従って (5.10) は本義ローレンツ変換に対して不変である．そこで

$$\psi'(x)=C\overline{\psi}(x) \tag{5.11}$$

と置けば，CPT 変換に対する ψ' の変換性は ψ のものと同じになる．(5.11) で $\overline{\psi}$ は厳密には $\overline{\psi}^T$ と書くべきなのでこのことは次のように証明される．

$$\begin{aligned}\psi'(x)^\star&=(C\overline{\psi}^T(x))^\star=iC(\overline{\psi}(-x)\gamma_5)^T=iC\gamma_5{}^T\overline{\psi}^T(-x)\\&=i\gamma_5C\overline{\psi}^T(-x)=i\gamma_5\psi'(-x)\end{aligned} \tag{5.12}$$

従って ψ と $\overline{\psi}$ とが同数であるという仮定は，$\overline{\psi}$ を ψ' と書き換えれば不要となる．上に述べたこと，すなわち $C\overline{\psi}$ の変換性を調べてみよう．

1)　$C\overline{\psi}$ の変換性

本義ローレンツ変換に対する ψ の変換性については第2章§6で詳しく議論したので，それに基づいて $C\overline{\psi}$ の変換性を調べる．(2.6.16) より

$$C\overline{\psi}^T \to C(\overline{\psi}S^{-1})^T = C(S^T)^{-1}\overline{\psi}^T \tag{5.13}$$

ところが無限小変換に対しては(2.6.19)より

$$S^T = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}T^T_{\mu\nu} \tag{5.14}$$

従って (2.6.21) を用いると

$$CS^TC^{-1} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}CT^T_{\mu\nu}C^{-1} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}T_{\mu\nu} = S^{-1} \tag{5.15}$$

従って有限な本義ローレンツ変換に対してもこの関係を拡張しうるので

$$C(S^T)^{-1}\overline{\psi}^T = C(S^T)^{-1}C^{-1}\cdot C\overline{\psi}^T = S(C\overline{\psi}^T) \tag{5.16}$$

すなわち，本義ローレンツ変換に対して

$$C\overline{\psi}^T \to S(C\overline{\psi}^T) \tag{5.17}$$

となり，ψ と同じ変換則に従う．それに対して空間反転に対し (9.1.6) 式より

$$C\overline{\psi}^T \to \varepsilon C(\overline{\psi}\gamma_4)^T = \varepsilon C\gamma_4{}^T\overline{\psi}^T = -\varepsilon\gamma_4(C\overline{\psi}^T) \tag{5.18}$$

となり， ψ の変換性とは符号が違う．これは第 9 章 §2 に述べた定理の結果を裏書きするものである．

2) CPT 変換という名称の由来

次に示すことは C, P, T という三つの変換を組み合わせると☆になるということである．この時各変換の位相は必ずしも定まっていないので最も簡単なものを採用しよう． まず時間反転に対しては粒子の生成と消滅が入替わるので $\psi \rightleftarrows \overline{\psi}$, かつ $t \to -t$ となる．更に $i\overline{\psi}\gamma_\mu\psi$ という四次元的流れの空間成分は符号が逆転する．従って位相の不定性を除いてスピノールの時間反転は

$$T: \psi(\boldsymbol{x}, t) \to \overline{\psi}(\boldsymbol{x}, -t)\gamma_4\gamma_5 C,\ \ \overline{\psi}(\boldsymbol{x}, t) \to C^{-1}\gamma_5\gamma_4\psi(\boldsymbol{x}, -t) \tag{5.19}$$

次に空間反転と荷電共役を施すと，

$$PT: \psi(\boldsymbol{x}, T) \to \overline{\psi}(-\boldsymbol{x}, -t)\gamma_5 C,\ \ \overline{\psi}(\boldsymbol{x}, t) \to C^{-1}\gamma_5\psi(-\boldsymbol{x}, -t) \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned} CPT: \psi(\boldsymbol{x}, t) &\to (\gamma_5 C)^T C^{-1}\psi(-\boldsymbol{x}, -t) \\ &= -\gamma_5\psi(-\boldsymbol{x}, -t) \end{aligned} \tag{5.21}$$

同様にして

$$CPT: \overline{\psi}(\boldsymbol{x}, t) \to \overline{\psi}(-\boldsymbol{x}, -t)\gamma_5 \tag{5.22}$$

これは未定の位相因子を除いて (5.1) の ☆ と一致する．これが何故 ☆ を CPT 変換と呼ぶかの理由である．(5.1) の CPT 変換は一意的に定まるが，個々の変換の位相は必ずしも一意的には定められない．

この三変換の積が常に不変であるということは，どれか一つの変換が理論を不変に保たない場合には，少なくとももう一つの変換が不変性を破っていることになる．実際1956年に空間反転に対する不変性，すなわちパリティが保存しないことが発見された時に，同時に荷電共役に対する不変性も破れていることが分かった．しかしながらその時暫くは CP という積の不変性は成り立つことが期待されていた．1964年にこの期待も破られることになった事情については既に (2.13) の崩壊様式と関連して述べられた通りである．

3) ハミルトニアンの変換性

エネルギー・運動量という四元ベクトルは次式で与えられる：

$$P_\nu=\int d^3x\mathcal{T}_{0\nu}(x) \tag{5.23}$$

ところで CPT 変換に対して

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}(x)^{\star}=\mathcal{T}_{\mu\nu}(-x) \tag{5.24}$$

従って

$$P_\nu^{\star}=P_\nu \tag{5.25}$$

これから $t=0$ において，あるいは Schrödinger 表示において

$$H_{\rm f}^{\star}=H_{\rm f},\qquad H_{\rm int}^{\star}=H_{\rm int} \tag{5.26}$$

(4.11) から (4.9) が導き出されるのであるから，この式は CPT 変換に対して S 行列が不変であることを保証している．

4) 粒子と反粒子の質量が等しいこと．

§3で述べた定理を利用する．Φ を質量 m の粒子が1個ある状態とすると，$\Phi^{\star}$ はその反粒子が1個ある状態であり，

$$(P_\nu{}^2+m^2)\Phi=0 \tag{5.27}$$

ならば (5.25) より

$$(P_\nu{}^2+m^2)\Phi^{\star}=0 \tag{5.28}$$

この式は，粒子と反粒子の質量が等しいことを意味している．

5) 粒子と反粒子の寿命が等しいこと

$$\mathcal{T}(a\to a)=\mathcal{T}(a^{\star}\to a^{\star}) \tag{5.29}$$

これはSの不変性から出る．虚部をとれば光学定理の壊崩過程に対する応用として，粒子と反粒子の全崩壊幅，従って寿命は等しいことになる．

第10章　グリーン関数

今までS行列の性質についていろいろ議論してきたが，S行列と密接な関係にある量としてグリーン関数という量がある．ここではまずグリーン関数を相互作用表示で定義し，これを Heisenberg 表示に書き直す．これが Gell-Mann-Low の関係式と呼ばれる．次に Hamilton 形式と Lagrange 形式との関係に関する Matthews の定理につき議論し，最後にS行列とグリーン関数とを結び付ける簡約公式について述べる．この公式は Heisenberg 表示では漸近条件と呼ばれる基本的な条件と結び付く．

§1　Gell-Mann-Low の関係式

第2章で与えたように相互作用表示で自由場のエネルギー・運動量四元ベクトルを $P_\mu^{(0)}$ と書くことにすると，外場を含まない場の演算子 $\mathcal{O}(x)$ に対して (2.2.2) 式が成り立つ．

$$[P_\mu^{(0)}, \mathcal{O}(x)]=i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\mathcal{O}(x) \tag{1.1}$$

特に $\mu=0$ に対しては

$$[P_0^{(0)}, \mathcal{O}(x)]=-i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{O}(x). \tag{1.2}$$

そこで次の変換関数を $\mathcal{O}$ として導入する：

$$U(t, t_0)=T\exp\left(-i\int_{t_0}^t dt'\, H_{\rm int}(t')\right) \tag{1.3}$$

これを (1.2) に代入するが，その際に次の公式に留意する：

$$\begin{aligned}\left[P_0^{(0)}, (-i)\int_{t_0}^t dt'\, H_{\rm int}(t')\right]&=-\int_{t_0}^t dt'\frac{\partial}{\partial t'}H_{\rm int}(t')\\ &=-(H_{\rm int}(t)-H_{\rm int}(t_0))\end{aligned} \tag{1.4}$$

従って直ちに次式を得る：

$$\begin{aligned}[P_0^{(0)}, U(t, t_0)]&=-T[(H_{\rm int}(t)-H_{\rm int}(t_0))U(t, t_0)]\\ &=-H_{\rm int}(t)U(t, t_0)+U(t, t_0)H_{\rm int}(t_0)\end{aligned} \tag{1.5}$$

そこで $t=0$ と置き，$t_0\to-\infty$ という極限をとる．その際に

$$P_0^{(0)}+H_{\rm int}(0)=H_{\rm total} \tag{1.6}$$

と置くと，

$$H_{\rm total}U(0,-\infty)=U(0,-\infty)(P_0^{(0)}+H_{\rm int}(-\infty))$$

ここで第3章§4と第5章§3で用いたように，相互作用は初めは有限な時空領域にのみ存在するとして，この時空領域を無限に拡げるという極限を考える．これは相互作用を断熱的に導入することに相当し，いろいろな結果はその極限のとり方に依存するが，ここでは厳密性を犠牲にして次式を仮定する：

$$H_{\rm int}(-\infty)=0 \tag{1.7}$$

すなわち，

$$H_{\rm total}U(0,-\infty)=U(0,-\infty)P_0^{(0)} \tag{1.8}$$

そこで相互作用表示での真空を $\boldsymbol{\Phi}_0$ と書くと，

$$P_0^{(0)}\boldsymbol{\Phi}_0=0 \tag{1.9}$$

従って Heisenberg 表示での真空を $\boldsymbol{\Psi}_0$ と書くと，

$$H_{\rm total}\boldsymbol{\Psi}_0=0, \qquad \boldsymbol{\Psi}_0=U(0,-\infty)\boldsymbol{\Phi}_0. \tag{1.10}$$

ところで第5章で示したように Heisenberg 表示と相互作用表示における場の演算子の間には，(5.1.30) 式で与えられる関係式が存在する．

$$U(t,t_0)^{-1}\varphi_\alpha(\boldsymbol{x},t)U(t,t_0)=\varphi_\alpha^{(H)}(\boldsymbol{x},t) \tag{1.11}$$

この節では $t_0=0$ と選ぶことにする．しからば $t_1>t_2$ に対して

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\Phi}_0,\ T[U(\infty,-\infty)A(\boldsymbol{x}_1,t_1)B(\boldsymbol{x}_2,t_2)]\boldsymbol{\Phi}_0)\\
&=(\boldsymbol{\Phi}_0,\ U(\infty,t_1)A(\boldsymbol{x}_1,t_1)U(t_1,t_2)B(\boldsymbol{x}_2,t_2)U(t_2,-\infty)\boldsymbol{\Phi}_0)\\
&=(\boldsymbol{\Phi}_0,\ U(\infty,0)A^{(H)}(\boldsymbol{x}_1,t_1)B^{(H)}(\boldsymbol{x}_2,t_2)U(0,-\infty)\boldsymbol{\Phi}_0)\\
&=(\boldsymbol{\Phi}_0,\ U(\infty,-\infty)U(0,-\infty)^{-1}A^{(H)}(\boldsymbol{x}_1,t_1)B^{(H)}(\boldsymbol{x}_2,t_2)U(0,-\infty)\boldsymbol{\Phi}_0)\\
&=(\boldsymbol{\Phi}_0,\ U(\infty,-\infty)\boldsymbol{\Phi}_0)(\boldsymbol{\Phi}_0,\ U(0,-\infty)^{-1}A^{(H)}(\boldsymbol{x}_1,t_1)B^{(H)}(\boldsymbol{x}_2,t_2)U(0,-\infty)\boldsymbol{\Phi}_0)\\
&=(\boldsymbol{\Phi}_0,\ U(\infty,-\infty)\boldsymbol{\Phi}_0)(\boldsymbol{\Psi}_0,\ A^{(H)}(\boldsymbol{x}_1,t_1)B^{(H)}(\boldsymbol{x}_2,t_2)\boldsymbol{\Psi}_0)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

ただし変換関数の合成則 (5.1.27) および $U(\infty,-\infty)$ は真空 $\boldsymbol{\Phi}_0$ を位相を除いては再び真空にしか変換しないことを用いている．これを次のように書く：

$$(\boldsymbol{\Psi}_0,\ T[A^{(H)}(x_1)B^{(H)}(x_2)]\boldsymbol{\Psi}_0)=\frac{(\boldsymbol{\Phi}_0,\ T[U(\infty,-\infty)A(x_1)B(x_2)]\boldsymbol{\Phi}_0)}{(\boldsymbol{\Phi}_0,\ U(\infty,-\infty)\boldsymbol{\Phi}_0)} \tag{1.13}$$

この分母は (7.4.11) で述べたように泡グラフを落とすことに相当している．

この式は容易に一般化し得る.

$$(\Psi_0, T[A^{(H)}(x_1)B^{(H)}(x_2)\cdots Z^{(H)}(x_n)]\Psi_0)$$
$$=\frac{(\Phi_0, T[U(\infty, -\infty)A(x_1)B(x_2)\cdots Z(x_n)]\Phi_0)}{(\Phi_0, U(\infty, -\infty)\Phi_0)} \tag{1.14}$$

この関係式を Gell-Mann-Low の関係式と呼ぶ. この関係式は Heisenberg 表示と相互作用表示との間の関係を与えるものである. またこの左辺のような量, すなわち場の演算子の時間的順序付けをした積の真空期待値をグリーン関数と呼ぶ.

§2　グリーン関数とその母汎関数

グリーン関数の性質を議論するに当って個々のものを議論する代りにその母関数, あるいはもっと正確には母汎関数について議論した方が便利なことがある. そこでこの節では簡単な中性スカラー場について母汎関数を導入する.

まず次のラグランジアン密度を導入する:

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}[(\partial_\mu\varphi)^2+m^2\varphi^2]-\frac{g}{4!}\varphi^4 \tag{2.1}$$

このラグランジアン密度を自由場部分と相互作用部分とに分ける. この分け方は実はトリビアルではなく, 特に次章で議論するくりこみのことを考慮に入れると大変複雑な問題である. しかしこの節では簡単に次のように選ぶ:

$$\mathcal{H}_{\text{int}}(x)=-\mathcal{L}_{\text{int}}(x)=\frac{g}{4!}\varphi^4. \tag{2.2}$$

以下においては真空 Φ_0 を簡単に $|0\rangle$ と表わすことにする. まず c 数の外場 $J(x)$ を導入して次の汎関数を定義する:

$$\mathcal{T}^{(0)}[J]=\frac{\langle 0|T\exp\left[-i\int d^4x(\mathcal{H}_{\text{int}}(x)+J(x)\varphi(x))\right]|0\rangle}{\langle 0|T\exp\left[-i\int d^4x\mathcal{H}_{\text{int}}(x)\right]|0\rangle} \tag{2.3}$$

次にグリーン関数の母汎関数 $\mathcal{T}^{(0)}[J]$ の満たす方程式を求めてみよう. それには第7章§3で得られた簡約公式 (7.3.43) を用いれば良い. すなわち,

$$(\square_x-m^2)T[\varphi(x)AB\cdots]=i\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}T[AB\cdots] \tag{2.4}$$

(2.3) の分母を $\langle 0|U(\infty, -\infty)|0\rangle$ と書くことにすれば,

$$(\square_x-m^2)\, i\frac{\delta}{\delta J(x)}\mathcal{T}^{(0)}[J]$$

$$=(\Box_x-m^2)\langle 0|T\left[\varphi(x)\exp\left(-i\int d^4y(\mathscr{H}_{\rm int}(y)+J(y)\varphi(y))\right)\right]|0\rangle \Big/ \langle 0|U(\infty,-\infty)|0\rangle$$

$$=\langle 0|\, i\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}T\left[\exp\left(-i\int d^4y(\mathscr{H}_{\rm int}(y)+J(y)\varphi(y))\right)\right]|0\rangle \Big/ \langle 0|U(\infty,-\infty)|0\rangle$$

$$=\langle 0|T\left[\left(\frac{g}{3!}\varphi^3(x)+J(x)\right)\exp\left(-i\int d^4y(\mathscr{H}_{\rm int}(y)+J(y)\varphi(y))\right)\right]|0\rangle \Big/ \langle 0|U(\infty,-\infty)|0\rangle$$

$$=\left[\frac{g}{3!}\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3+J(x)\right]\mathscr{T}^{(0)}[J] \tag{2.5}$$

この式を積分すると $\mathscr{T}^{(0)}[J]$ に対する汎関数方程式を得る.

$$i\frac{\delta}{\delta J(x)}\mathscr{T}^{(0)}[J]=-i\int d^4y\Delta_F(x-y)\left[\frac{g}{3!}\left(i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^3+J(y)\right]\mathscr{T}^{(0)}[J] \tag{2.6}$$

n 点グリーン関数は，$\mathscr{T}^{(0)}[J]$ を n 回 J について汎関数微分をして $J=0$ と置けば得られる.

$$\left(i^n\frac{\delta^n}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\mathscr{T}^{(0)}[J]\right)_{J=0}=\frac{\langle 0|T[\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)U(\infty,-\infty)]|0\rangle}{\langle 0|U(\infty,-\infty)|0\rangle} \tag{2.7}$$

次に Heisenberg 表示に移り，母汎関数を次のように定義する：

$$\mathscr{T}[J]=\langle\mathbf{0}|T\exp\left(-i\int d^4xJ(x)\boldsymbol{\varphi}(x)\right)|\mathbf{0}\rangle \tag{2.8}$$

ただし Ψ_0 を $|\mathbf{0}\rangle$，$\varphi^{(H)}$ を $\boldsymbol{\varphi}$ と太字で書いてある．しからば，

$$(\Box_x-m^2)\,i\frac{\delta}{\delta J(x)}\mathscr{T}[J]=(\Box_x-m^2)\langle\mathbf{0}|T\left[\boldsymbol{\varphi}(x)\exp\left(-i\int d^4yJ(y)\boldsymbol{\varphi}(y)\right)\right]|\mathbf{0}\rangle \tag{2.9}$$

さてこの表示では

$$(\Box_x-m^2)T[\boldsymbol{\varphi}(x)\boldsymbol{AB}\cdots]=T[(\Box_x-m^2)\boldsymbol{\varphi}(x),\boldsymbol{AB}\cdots]+i\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\varphi}(x)}T[\boldsymbol{AB}\cdots] \tag{2.10}$$

この式を (2.9) に代入して，$\boldsymbol{\varphi}$ に対する運動方程式を用いると (2.5) 式が再現される．従って (2.6) も再現される．すなわち，

$$i\frac{\delta}{\delta J(x)}\mathscr{T}[J]=-i\int d^4y\Delta_F(x-y)\left[\frac{g}{3!}\left(i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^3+J(y)\right]\mathscr{T}[J] \tag{2.11}$$

これから分かるように，境界条件さえ同じならば

$$\mathscr{T}[J]=\mathscr{T}^{(0)}[J] \tag{2.12}$$

が期待される．実際この式を J につき n 回微分して $J=0$ と置くと，

$$\begin{aligned}&\langle 0|T[\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]|0\rangle\\&=\langle 0|T[\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)U(\infty,-\infty)]|0\rangle/\langle 0|U(\infty,-\infty)|0\rangle\end{aligned}\tag{2.13}$$

となり，Gell-Mann-Low の関係式そのものになる．従って (2.12) という式は常に成り立つことになる．

グリーン関数を Feynman 図形で表現すると一般にはばらばらの連結していないものになる．そこで n 点が全部線でつながっているような図形のみに注目し，それに対応する寄与を

$$\langle 0|T[\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]|0\rangle_{\mathrm{conn}}\tag{2.14}$$

と書くことにする．conn は connected の略である．それでは連結グリーン関数と元のグリーン関数とはどういう関係にあるであろうか？　それには点 x から出発して x と線でつながっている部分とつながっていない部分に分けると，

$$\begin{aligned}&\langle 0|T[\boldsymbol{\varphi}(x)\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]|0\rangle\\&=\sum_{\mathrm{comb}}\langle 0|T[\boldsymbol{\varphi}(x)\boldsymbol{\varphi}(x_1')\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_k')]|0\rangle_{\mathrm{conn}}\langle 0|T[\boldsymbol{\varphi}(x_{k+1}')\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n')]|0\rangle\end{aligned}\tag{2.15}$$

のような漸化式を得る．ここで和は，$x_1,\cdots,x_n$ を二つのグループ $x_1',\cdots,x_k'$ と $x_{k+1}',\cdots,x_n'$ に分けるすべての組み合わせについてとるものとする．この関係を閉じた形に表わすために連結グリーン関数の母汎関数 $\mathcal{R}[J]$ を導入し，

$$\mathcal{R}[J]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int d^4x_1\cdots\int d^4x_n\langle 0|T[\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]|0\rangle_{\mathrm{conn}}J(x_1)\cdots J(x_n),\tag{2.16}$$

$$\left(i^n\frac{\delta^n}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\mathcal{R}[J]\right)_{J=0}=\langle 0|T[\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)|0\rangle_{\mathrm{conn}}\tag{2.17}$$

とすると，上の漸化式は閉じた形に表わされる．

$$i\frac{\delta}{\delta J(x)}\mathcal{T}[J]=\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\mathcal{R}[J]\right)\mathcal{T}[J]\tag{2.18}$$

この汎関数方程式を次の境界条件の下に解く：

$$\mathcal{R}[0]=0,\qquad \mathcal{T}[0]=1\tag{2.19}$$

しからばその解は

$$\mathcal{T}[J]=\exp\mathcal{R}[J].\tag{2.20}$$

そこで外場 J の存在する時の $\boldsymbol{\varphi}(x)$ の真空期待値を $\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle$ と書くことにすると，

$$\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle=i\frac{\delta}{\delta J(x)}\mathcal{T}[J]/\mathcal{T}[J]=i\frac{\delta}{\delta J(x)}\mathcal{R}[J]\tag{2.21}$$

そこで場合によっては，$J(x)$ の代りに $\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle$ を独立な外場と考えた方が便利なことがあるので，次の Legendre 変換を導入しよう：

$$\mathcal{F}=\mathcal{R}+i\int d^4xJ(x)\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle \tag{2.22}$$

しからば次の関係式を得る：

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{F}&=\delta\mathcal{R}+i\int d^4x(J(x)\delta\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle+\delta J(x)\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle)\\&=-i\int d^4x\delta J(x)\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle+i\int d^4x(J(x)\delta\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle+\delta J(x)\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle)\\&=i\int d^4xJ(x)\delta\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle\end{aligned} \tag{2.23}$$

すなわち $J(x)$ の代りに $\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle$ を自変数と見なせば

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle}=iJ(x). \tag{2.24}$$

このような変数変換は後に述べる対称性の自発的破れに関する議論で重要な役割を演ずる．なお (2.21) を更に微分すると

$$i\frac{\delta\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle}{\delta J(y)}=-\frac{\delta^2\mathcal{R}}{\delta J(x)\delta J(y)}=\Delta_F(x,y) \tag{2.25}$$

これは外場の存在する時のグリーン関数を表わす．(2.24) を微分すると

$$\frac{\delta^2\mathcal{F}}{\delta\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle\delta\langle\boldsymbol{\varphi}(y)\rangle}=i\frac{\delta J(y)}{\delta\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle}=-\Delta_F{}^{-1}(x,y) \tag{2.26}$$

これはグリーン関数の逆となる．

§3 Lagrange 形式における時間的順序付け

前節までに Heisenberg 表示と相互作用表示におけるグリーン関数の表現の間の関係を調べた．本節においては Hamilton 形式と Lagrange 形式における時間的順序付けの差異について述べることにする．

簡単のために質点力学から始める．質点力学において一次元系を考え，

$$p(t)=m\dot{q}(t) \tag{3.1}$$

のような関係が成立するものとしよう．しからば T という演算子の下では $p(t)$ は t という時刻に対応する演算子として一まとめに順序付けをされる．これは Hamilton 形式では，$q(t)$ と $p(t)$ という演算子は独立な力学変数として扱われるので $p(t)$ はこれ以上時間的に分解する必要のない量と考えられるからであ

る．ところが Lagrange 形式では，$q(t)$ のみが独立な量であり，従って $\dot{q}(t)$ は

$$\dot{q}(t)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{q(t+\varepsilon)-q(t)}{\varepsilon}. \tag{3.2}$$

そこで ε を小さいが有限とすると，Lagrange 形式の下では $\dot{q}(t)$ は時間的順序付けに際して二時刻に関係することになる．このような扱いでの時間的順序付けの演算子を T^* と記すことにする．ここで注意すべきことは，径路積分の方法でも (3.2) と同様な分解を用いるということである．従って T^* を用いる方法は径路積分の方法と密接な関係にあるということである．それでは T と T^* とではどのような差異が出るであろうか？ 以下では (3.1) のように $\dot{q}(t)$ が Hamilton 形式では，従って T の下では一時刻量として扱えることを仮定する．まず，

$$\begin{aligned}T^*[\dot{q}(t),q(t')]&=T^*\left[\lim_{\varepsilon\to0}\frac{q(t+\varepsilon)-q(t)}{\varepsilon},q(t')\right]\\&=\lim_{\varepsilon\to0}T\left[\frac{q(t+\varepsilon)-q(t)}{\varepsilon},q(t')\right]\\&=\frac{\partial}{\partial t}T[q(t),q(t')]\end{aligned} \tag{3.3}$$

ただし時間的に分解する場合にも，q が時間について二階の微分方程式に従うならば $\ddot{q}$ は q と独立ではないので，T^* の中には $\dot{q}$ までしか入れない．次の例は

$$T^*[\dot{q}(t),\dot{q}(t')]=\frac{\partial^2}{\partial t\partial t'}T[q(t),q(t')] \tag{3.4}$$

この導き方は前の例と全く同じである．ところが T を用いたものとは差が出る．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}T[q(t),q(t')]&=T[\dot{q}(t),q(t')]+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon(t-t')\right)\cdot[q(t),q(t')]\\&=T[\dot{q}(t),q(t')]+\delta(t-t')[q(t),q(t')]\\&=T[\dot{q}(t),q(t')]\end{aligned} \tag{3.5}$$

従ってこれは (3.3) の T^* と同じである．しかしながら (3.1) を仮定すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}T[q(t),\dot{q}(t')]&=T[\dot{q}(t),\dot{q}(t')]+\delta(t-t')[q(t),\dot{q}(t')]\\&=T[\dot{q}(t),\dot{q}(t')]+\frac{i}{m}\delta(t-t')\end{aligned} \tag{3.6}$$

ところがもともと左辺は (3.4) の右辺に等しい．そこで (3.6) の左辺を (3.4)

の左辺と等しいと置けば,

$$T[\dot{q}(t),\ \dot{q}(t')]=T^*[\dot{q}(t),\ \dot{q}(t')]-\frac{i}{m}\delta(t-t'). \tag{3.7}$$

このようにして T と T^* との差異が明らかになる. このような考察は場の理論にまで拡張することができる. 簡単のために相互作用表示における中性スカラー場を考えてみよう.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\mu}T[\varphi(x),\varphi(y)]&=T[\partial_\mu\varphi(x),\varphi(y)]+\frac{1}{i}\delta_{\mu4}\delta(x_0-y_0)[\varphi(x),\varphi(y)]\\&=T[\partial_\mu\varphi(x),\varphi(y)]\end{aligned} \tag{3.8}$$

これをもう一度微分するために時間方向の単位ベクトル n_μ を導入する. ただし $n_1=n_2=n_3=0$, $n_4=i$ とする.

$$\frac{\partial}{\partial y_\nu}T[\partial_\mu\varphi(x),\varphi(y)]=T[\partial_\mu\varphi(x),\partial_\nu\varphi(y)]+i\delta_{\nu4}\delta(x_0-y_0)[\partial_\mu\varphi(x),\varphi(y)]$$

ところでこの第二項は

$$\delta_{\mu4}\delta_{\nu4}\delta(x_0-y_0)[\dot{\varphi}(x),\varphi(y)]=-i\delta_{\mu4}\delta_{\nu4}\delta^4(x-y)=in_\mu n_\nu\delta^4(x-y)$$

これをまとめて真空期待値をとると

$$\langle 0|T[\partial_\mu\varphi(x),\partial_\nu\varphi(y)]|0\rangle=\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\partial y_\nu}\Delta_F(x-y)-in_\mu n_\nu\delta^4(x-y) \tag{3.9}$$

他方

$$\langle 0|T^*[\partial_\mu\varphi(x),\partial_\nu\varphi(y)]|0\rangle=\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\partial y_\nu}\Delta_F(x-y) \tag{3.10}$$

この差異は (3.7) に対応するものである. 上の二式を比較すると T^* の方が共変的で簡単であることに気が付く. 相互作用項に場の演算子の微分が入る時にはハミルトニアン密度はスカラーでなくて n を含むテンソルになる. この場合にはハミルトニアン密度も縮約関数も n に依存するが, S行列の計算ではこの二種類の n 依存性がお互いに打ち消し合って最終結果は n に依存しなくなる. これを Matthews の定理と呼ぶ.

§4 Matthews の定理

相互作用が場の演算子の微分を含まなければ

$$\mathcal{H}_{\rm int}(x)=-\mathcal{L}_{\rm int}(x). \tag{4.1}$$

この時には次の式が成り立つことは自明である:

$$S=T\exp\left(-i\int d^4x\mathcal{H}_{\text{int}}(x)\right)=T^*\exp\left(i\int d^4x\,\mathcal{L}_{\text{int}}(x)\right) \tag{4.2}$$

この場合には T と T^* の差異は何処にも現れないからである．

ところで微分が含まれる場合にはこの事情はもっと複雑になる．例えば，荷電スカラー場と電磁場が相互作用している場合には，

$$\mathcal{L}=-[(\partial_\mu+ieA_\mu)\varphi^\dagger\cdot(\partial_\mu-ieA_\mu)\varphi+m^2\varphi^\dagger\varphi]+\mathcal{L}_{\text{em}}, \tag{4.3}$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}}=-ieA_\mu(\varphi^\dagger\cdot\partial_\mu\varphi-\partial_\mu\varphi^\dagger\cdot\varphi)-e^2A_\mu{}^2\varphi^\dagger\varphi. \tag{4.4}$$

このように場の演算子の微分が含まれる場合には，$\mathcal{H}_{\text{int}}$ は $-\mathcal{L}_{\text{int}}$ からずれてくることになる．そこでスカラー場の微分が含まれる場合を考えよう．

まずラグランジアン密度を分解する：

$$\mathcal{L}(x)=\mathcal{L}_{\text{f}}(x)+\mathcal{L}_{\text{int}}(x) \tag{4.5}$$

さて φ_α に正準共役な量は自由場に対しては，φ_α を実スカラー場に選ぶと，

$$\pi_\alpha(x)=\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{f}}(x)}{\partial\dot{\varphi}_\alpha(x)}=\dot{\varphi}_\alpha(x) \tag{4.6}$$

また相互作用を考慮すると

$$\pi'_\alpha(x)=\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\dot{\varphi}_\alpha(x)}=\dot{\varphi}_\alpha(x)+\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{int}}(x)}{\partial\dot{\varphi}_\alpha(x)}. \tag{4.7}$$

さて Yang-Feldman の式 (5.2.1) より Heisenberg 表示と相互作用表示の関係は

$$\varphi_\alpha(x)=U(x_0,-\infty)^{-1}\varphi_\alpha^{\text{in}}(x)U(x_0,-\infty), \tag{4.8}$$

$$\pi'_\alpha(x)=U(x_0,-\infty)^{-1}\pi_\alpha^{\text{in}}(x)U(x_0,-\infty) \tag{4.9}$$

π が π' に変わるのは U による変換が正準交換関係を変えないからである．以下において相互作用表示の演算子の上添字 in を落とし，Heisenberg 表示の演算子は太字で表わす．しからばハミルトニアン密度は

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}(x)=\sum_\alpha \boldsymbol{\pi}'_\alpha(x)\dot{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha(x)-\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi}_\alpha(x),\dot{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha(x)) \tag{4.10}$$

ただし空間微分は本質的に $\boldsymbol{\varphi}_\alpha(x)$ の一次結合であるものと見なしておく．すると

$$\mathcal{H}(x)=U(x_0,-\infty)\boldsymbol{\mathcal{H}}(x)U(x_0,-\infty)^{-1}. \tag{4.11}$$

この計算では (4.8) と (4.9) との逆変換を用いることになる．しからば

$$\begin{aligned}U(x_0,-\infty)\dot{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha(x)U(x_0,-\infty)^{-1}&=U(x_0,-\infty)(\boldsymbol{\pi}'_\alpha(x)-\boldsymbol{\sigma}_\alpha(x))U(x_0,-\infty)^{-1}\\&=\pi_\alpha(x)-\sigma_\alpha(x)\end{aligned}$$

$$=\dot{\varphi}_\alpha(x)-\sigma_\alpha(x) \tag{4.12}$$

ただし σ_α は次式で定義されている：

$$\sigma_\alpha(x)=\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(x)}{\partial\dot{\varphi}_\alpha(x)}=-n_\mu\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(x)}{\partial\varphi_{\alpha:\mu}(x)} \tag{4.13}$$

従って

$$\mathscr{H}(x)=\sum_\alpha\pi_\alpha(x)(\pi_\alpha(x)-\sigma_\alpha(x))-\mathscr{L}(\varphi_\alpha(x),\dot{\varphi}_\alpha(x)-\sigma_\alpha(x)) \tag{4.14}$$

この第二項をテイラー展開してやる．その際 $\mathscr{L}$ は $\dot{\varphi}_\alpha$ について二次までとして

$$\frac{\partial^2}{\partial\dot{\varphi}_\alpha\partial\dot{\varphi}_\beta}\mathscr{L}=\delta_{\alpha\beta},\qquad \frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}_\alpha}\mathscr{L}=\pi_\alpha+\sigma_\alpha \tag{4.15}$$

を用いることにすると，σ に関する巾展開は次のようになる：

$$\mathscr{L}(\varphi_\alpha,\dot{\varphi}_\alpha-\sigma_\alpha)=\mathscr{L}(\varphi_\alpha,\dot{\varphi}_\alpha)-\sum_\alpha\sigma_\alpha\pi_\alpha+\frac{1}{2}\sum_\alpha{\sigma_\alpha}^2 \tag{4.16}$$

これを (4.14) に代入すると

$$\mathscr{H}(x)=\sum_\alpha\pi_\alpha^2(x)-\mathscr{L}(\varphi_\alpha(x),\ \dot{\varphi}_\alpha(x))+\frac{1}{2}\sum_\alpha\sigma_\alpha^2(x) \tag{4.17}$$

従って

$$\mathscr{H}_{\mathrm{int}}(x)=-\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(x)+\frac{1}{2}\sum_\alpha n_\mu n_\nu\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(x)}{\partial\varphi_{\alpha:\mu}(x)}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(x)}{\partial\varphi_{\alpha:\nu}(x)} \tag{4.18}$$

この右辺第二項が (4.1) 式からのずれを表わすことになる．そこでこの場合の等式 (4.2)，すなわち Matthews の定理を証明しよう．そのためにはまず簡単な中性スカラー理論に対してT積と正規積との間の関係式を与える．

中性スカラー理論においてT積 $T[AB\cdots Z]$ を正規積に展開し，その際に縮約関数 $\varDelta_F$ を $\lambda\varDelta_F$ で置き換えたものを $T_\lambda[AB\cdots Z]$ と書くことにする．これを λ で微分することは，$\varphi(x)$ と $\varphi(y)$ とを縮約して $\varDelta_F$ を乗ずることになるから

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}T_\lambda[AB\cdots Z]=\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4y\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\varDelta_F(x-y)\frac{\delta}{\delta\varphi(y)}T_\lambda[AB\cdots Z] \tag{4.19}$$

ただし正規積中の φ はc数のように扱ってそれにつき微分している．また特に $\lambda=0$ と置けば，これは縮約を全くしないものと同じであるから

$$T_0[AB\cdots Z]=:AB\cdots Z: \tag{4.20}$$

そこで微分方程式 (4.19) を初期条件 (4.20) の下で解いて $\lambda=1$ と置けば

$$T[AB\cdots Z]=\exp\left(\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4y\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\varDelta_F(x-y)\frac{\delta}{\delta\varphi(y)}\right):AB\cdots Z: \tag{4.21}$$

次にこの式の真空期待値をとる．正規積の真空期待値は0となるから，右辺が生き残るのはすべての場の演算子が縮約された時のみである．従って右辺で縮約されていない演算子φを0としてやればすべての演算子が縮約された時の寄与のみを与えることになる．

$$\begin{aligned}&\langle 0|T[AB\cdots Z]|0\rangle\\&=\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4y\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\Delta_F(x-y)\frac{\delta}{\delta\varphi(y)}\right):AB\cdots Z:\right]_{\varphi=0}\end{aligned}\tag{4.22}$$

さて (4.21) は実は$A, B, \cdots, Z$の中にφの微分が入っていない時のみ正しい．この指数関数の肩に現れる演算子は場の量子化と関係しており，演算子同士を如何に縮約するかを指示するものである．これをDと書くと，φおよびその微分を含む正規積をT積に変える演算は

$$T[AB\cdots Z]=e^D:AB\cdots Z:\tag{4.23}$$

ここに正規積がφとその微分，フェルミ場$\psi, \bar{\psi}$を含む場合には

$$\begin{aligned}D=\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4y\Big[&\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\Delta_F(x-y)\frac{\delta}{\delta\varphi(y)}+2\frac{\delta}{\delta\varphi_{:\mu}(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Delta_F(x-y)\right)\frac{\delta}{\delta\varphi(y)}\\&+\frac{\delta}{\delta\varphi_{:\mu}(x)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\partial y_\nu}\Delta_F(x-y)-in_\mu n_\nu\delta^4(x-y)\right)\frac{\delta}{\delta\varphi_{:\nu}(y)}\Big]\\&+\int d^4x\int d^4y\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_\beta(y)}S_F(x-y)_{\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta\psi_\alpha(x)}\end{aligned}\tag{4.24}$$

ただし縮約関数として (3.9) 式を用いている．Dirac 場に関する汎関数微分については (7.3.45) 式の下の注意を参照のこと．同様にして T* 積に対しては

$$T^*[AB\cdots Z]=e^{D^*}:AB\cdots Z:\tag{4.25}$$

ただしD^*は (4.24) の中でφの微分同士の縮約に (3.10) 式を用いたものであって，明らかに

$$D=D^*+\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4y\frac{\delta}{\delta\varphi_{:\mu}(x)}(-in_\mu n_\nu\delta^4(x-y))\frac{\delta}{\delta\varphi_{:\nu}(y)}\tag{4.26}$$

いずれの場合にも汎関数微分をとる時にφとその微分は独立として扱っている．

そこで今，相互作用ラグランジアン密度を次の形にとる：

$$\mathscr{L}_{\rm int}(x)=-j_\mu(x)\partial_\mu\varphi(x)+\mathscr{L}_{\rm int}^{(0)}(x)\tag{4.27}$$

ただし$\mathscr{L}_{\rm int}^{(0)}$は微分を含まない項である．しからば (4.18) より

$$\mathscr{H}_{\rm int}(x)=-\mathscr{L}_{\rm int}(x)+\frac{1}{2}(n_\mu j_\mu(x))^2\tag{4.28}$$

を得る．そこでS行列を計算するために次の式を考えよう：

$$T\exp\left(-i\int d^4x\mathcal{H}_{\rm int}(x)\right)=e^D:\exp\left(-i\int d^4x\mathcal{H}_{\rm int}(x)\right):$$

$$=e^{D^*}e^{D-D^*}:\exp\left(-i\int d^4x\mathcal{H}_{\rm int}(x)\right): \qquad (4.29)$$

さて $D-D^*$ は (4.26) の右辺第二項であり，これは φ の導関数に関する汎関数微分であり，従って $\mathcal{H}_{\rm int}(x)$ の中で φ の導関数を含む $j_\mu\partial_\mu\varphi$ の部分にのみ作用する．そこで次の計算をすることになる：

$$e^{D-D^*}:\exp\left(-i\int d^4xj_\mu(x)\partial_\mu\varphi(x)\right): \qquad (4.30)$$

この計算をするために次の公式を利用する：

$$\exp\left(\lambda\frac{d^2}{dx^2}\right)e^{ax}=e^{ax+a^2\lambda} \qquad (4.31)$$

この公式を一般化して (4.30) の計算に利用することにすると，(4.30)は 次の形の式に等しいことが分かる：

$$:\exp\left[-i\int d^4x(j_\mu(x)\partial_\mu\varphi(x)-\frac{1}{2}(n_\mu j_\mu(x))^2)\right]: \qquad (4.32)$$

従って (4.29) は次の形に書ける：

$$T\exp\left(-i\int d^4x\mathcal{H}_{\rm int}(x)\right)=e^{D^*}:\exp\left[-i\int d^4x\left(\mathcal{H}_{\rm int}(x)-\frac{1}{2}(n_\mu j_\mu(x))^2\right)\right]:$$

$$=e^{D^*}:\exp\left(i\int d^4x\mathcal{L}_{\rm int}(x)\right):$$

$$=T^*\exp\left(i\int d^4x\mathcal{L}_{\rm int}(x)\right) \qquad (4.33)$$

この両辺を真空期待値で除したものがS行列であるから

$$S=T^*\exp\left(i\int d^4x\mathcal{L}_{\rm int}(x)\right)\Big/\langle 0|T^*\exp\left(i\int d^4x\mathcal{L}_{\rm int}(x)\right)|0\rangle \quad (4.34)$$

この結果を Matthews の定理と呼ぶ．ただしこのような形に書けるのは場の演算子の微分が一次で (4.27) の形に入っている時に限る．

§5 Matthews の定理が変更を受ける例

前節では Matthews の定理が成り立ち，T を T^* に，$\mathcal{H}_{\rm int}$ を $-\mathcal{L}_{\rm int}$ で置き換えられる例を考えたが，一般の場合には $\mathcal{H}_{\rm int}$ を $-\mathcal{L}_{\rm int}$ とは少し異なるもので置き換えなければならなくなる．すなわち，Matthews の定理を一般化して

$$T\exp\left(-i\int d^4x\mathscr{H}_{\rm int}(x)\right)=T^*\exp\left(i\int d^4x\,\mathscr{L}_{\rm eff}(x)\right) \tag{5.1}$$

ここに $\mathscr{L}_{\rm eff}$ は有効相互作用ラグランジアン密度であって，Matthewsの定理が成り立つ時に限り $\mathscr{L}_{\rm int}$ と等しくなる．この定理が成り立たない例として

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}D_{ab}(\boldsymbol{\varphi})\partial_\lambda\boldsymbol{\varphi}_a\cdot\partial_\lambda\boldsymbol{\varphi}_b-V(\boldsymbol{\varphi}) \tag{5.2}$$

というラグランジアン密度を考えてみよう．ここに $\boldsymbol{\varphi}_a(a=1,2,\cdots,N)$ は実スカラー場であり，D_{ab} は $\boldsymbol{\varphi}$ の関数であり，実の正定値行列である．また D も V も $\boldsymbol{\varphi}$ の導関数は含まないものとする．以下本節ではこの理論に対する有効相互作用ラグランジアン密度を求めてみよう．

まず正準交換関係より $x_0=y_0$ に対しては

$$[\boldsymbol{\varphi}_a(x),\boldsymbol{\varphi}_b(y)]=0, \tag{5.3}$$

$$[\boldsymbol{\varphi}_a(x),\dot{\boldsymbol{\varphi}}_b(y)]=iC_{ab}(\boldsymbol{\varphi})\delta^3(x-y) \tag{5.4}$$

ただし C は D の逆行列である．すなわち

$$\sum_b C_{ab}D_{bc}=\sum_b D_{ab}C_{bc}=\delta_{ac}. \tag{5.5}$$

ところで Euler-Lagrange の方程式は，同じ添字について和をとるものとして

$$[\mathscr{L}]_{\boldsymbol{\varphi}_a}=D_{ab}(\Box\boldsymbol{\varphi}_b-\boldsymbol{j}_b)=0, \tag{5.6}$$

$$\boldsymbol{j}_a=C_{ab}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\varphi}_b}C_{cd}-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\varphi}_d}D_{bc}\right)\partial_\lambda\boldsymbol{\varphi}_c\cdot\partial_\lambda\boldsymbol{\varphi}_d+C_{ab}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\varphi}_b}V. \tag{5.7}$$

次にグリーン関数の母汎関数を導入する．

$$\mathscr{T}[J]=\langle 0|T\exp\left(-i\int d^4xJ_a(x)\boldsymbol{\varphi}_a(x)\right)|0\rangle \tag{5.8}$$

しからば方程式（5.6）と同時刻交換関係（5.4）とを組み合わせて

$$\Box_x\langle 0|T[\boldsymbol{\varphi}_a(x),\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots]|0\rangle$$
$$=\langle 0|T[\boldsymbol{j}_a(x),\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots]|0\rangle+i\langle 0|T\left[C_{ab}(\boldsymbol{\varphi}(x))\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\varphi}_b(x)}\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\cdots\right]|0\rangle+\cdots \tag{5.9}$$

この式を母汎関数で表現すると

$$\Box_x i\frac{\delta}{\delta J_a(x)}\mathscr{T}[J]=\Box_x\langle 0|T\left[\boldsymbol{\varphi}_a(x),\exp\left(-i\int d^4yJ_c(y)\boldsymbol{\varphi}_c(y)\right)\right]|0\rangle$$
$$=\langle 0|T\left[\boldsymbol{j}_a(x),\exp\left(-i\int d^4yJ_c(y)\boldsymbol{\varphi}_c(y)\right)\right]|0\rangle$$
$$+J_b(x)\langle 0|T\left[C_{ab}(\boldsymbol{\varphi}(x)),\exp\left(-i\int d^4yJ_c(y)\boldsymbol{\varphi}_c(y)\right)\right]|0\rangle \tag{5.10}$$

この右辺第二項は $\mathcal{T}[J]$ を用いて次のように表現し得る:

$$J_b(x)\,C_{ab}\Big(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\Big)\mathcal{T}[J] \tag{5.11}$$

$\boldsymbol{\varphi}$ の導関数が2個しか含まれないT積を考えると，相互作用表示では

$$\begin{aligned}&T[\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}(x),\partial_\nu\boldsymbol{\varphi}(y),\boldsymbol{\varphi}(z),\cdots]\\&=T^*[\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}(x),\partial_\nu\boldsymbol{\varphi}(y),\boldsymbol{\varphi}(z),\cdots]-in_\mu n_\nu\delta^4(x-y)T[\boldsymbol{\varphi}(z),\cdots]\end{aligned} \tag{5.12}$$

しかしながらこの導出に用いたのは同時刻交換関係のみであって，場の方程式は用いていないことに注意すると，容易に Heisenberg 表示に拡張される.

$$\begin{aligned}&T[\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}_a(x),\partial_\nu\boldsymbol{\varphi}_b(y),\boldsymbol{\varphi}_c(z),\cdots]\\&=T^*[\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}_a(x),\partial_\nu\boldsymbol{\varphi}_b(y),\boldsymbol{\varphi}_c(z),\cdots]-in_\mu n_\nu\delta^4(x-y)T[C_{ab}(\boldsymbol{\varphi}(x)),\boldsymbol{\varphi}_c(z),\cdots]\end{aligned} \tag{5.13}$$

特に $y\to x$, $\mu=\nu=\lambda$ とおけば $n_\lambda n_\lambda=-1$ であるから

$$\begin{aligned}&T[\partial_\lambda\boldsymbol{\varphi}_a(x),\partial_\lambda\boldsymbol{\varphi}_b(x),\boldsymbol{\varphi}_c(z),\cdots]\\&=T^*[\partial_\lambda\boldsymbol{\varphi}_a(x),\partial_\lambda\boldsymbol{\varphi}_b(x),\boldsymbol{\varphi}_c(z),\cdots]+i\delta^4(0)T[C_{ab}(\boldsymbol{\varphi}(x)),\boldsymbol{\varphi}_c(z),\cdots]\end{aligned} \tag{5.14}$$

この結果を用いると (5.10) の右辺の第一項は次の形に書ける:

$$\begin{aligned}&\langle 0|T^*\Big[\boldsymbol{j}_a(x),\exp\Big(-i\int d^4y\,J_c(y)\boldsymbol{\varphi}_c(y)\Big)\Big]|0\rangle\\&+i\delta^4(0)\langle 0|T\Big[C_{ab}(x)\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial D_{cd}(x)}{\partial\boldsymbol{\varphi}_b(x)}-\frac{\partial D_{bc}(x)}{\partial\boldsymbol{\varphi}_d(x)}\Big)C_{cd}(x),\\&\qquad\times\exp\Big(-i\int d^4y\,J_c(y)\boldsymbol{\varphi}_c(y)\Big)\Big]|0\rangle\end{aligned} \tag{5.15}$$

ただし $C_{ab}(x)$ は $C_{ab}(\boldsymbol{\varphi}(x))$ の略であり，$D_{cd}(x)$ についても同様である.

従って $\mathcal{T}[J]$ の満たす方程式は

$$\begin{aligned}\Box_x i\frac{\delta}{\delta J_a(x)}\mathcal{T}[J]=\Big[&j_a\Big(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\Big)+i\delta^4(0)F_a\Big(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\Big)\\&+J_b(x)\,C_{ab}\Big(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\Big)\Big]\mathcal{T}[J]\end{aligned} \tag{5.16}$$

ただし

$$F_a(\boldsymbol{\varphi}(x))=C_{ab}(x)\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial D_{cd}(x)}{\partial\boldsymbol{\varphi}_b(x)}-\frac{\partial D_{bc}(x)}{\partial\boldsymbol{\varphi}_d(x)}\Big)C_{cd}(x) \tag{5.17}$$

ここで注意すべきことはT*積を用いたので j_a という汎関数微分を因子化することができたということである. (5.16) の右辺第三項を書き換えると

$$J_b(x)\,C_{ab}\Big(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\Big)=C_{ab}\Big(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\Big)J_b(x)-i\delta^4(0)\Big(\frac{\partial C_{ab}(x)}{\partial\boldsymbol{\varphi}_b(x)}\Big)_{\boldsymbol{\varphi}\to i\delta/\delta J} \tag{5.18}$$

そこで $i\delta^4(0)$ の係数をまとめると

$$F_a-\frac{\partial C_{ab}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_b}=\frac{1}{2}C_{ab}\frac{\partial D_{cd}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_b}C_{cd}-C_{ab}\left(\frac{\partial D_{bc}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_d}C_{cd}+D_{bc}\frac{\partial C_{cd}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_d}\right)$$

$$=\frac{1}{2}C_{ab}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varphi}_b}\ln(\det D)-C_{ab}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varphi}_d}\delta_{bd}$$

$$=\frac{1}{2}C_{ab}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varphi}_b}\ln(\det D)$$

$$\equiv\frac{1}{2}G_a \tag{5.19}$$

そこで (5.16) は次のように書ける：

$$\Box_x i\frac{\delta}{\delta J_a(x)}\mathcal{T}[J]=\left[j_a\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)+\frac{1}{2}i\delta^4(0)G_a\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right.$$
$$\left.+C_{ab}\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)J_b(x)\right]\mathcal{T}[J] \tag{5.20}$$

この式に左から D を乗ずると

$$D_{ab}\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\Box_x i\frac{\delta}{\delta J_b(x)}\mathcal{T}[J]$$
$$=\left[D_{ab}j_b\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)+J_a(x)+\frac{1}{2}i\delta^4(0)\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varphi}_a(x)}\ln(\det D(x))\right)_{\varphi\to i\delta/\delta J}\right]\mathcal{T}[J] \tag{5.21}$$

これが母関数 $\mathcal{T}[J]$ の満たす式である．

このような理論において Feynman-Dyson 流の公式を出すためには，$\mathcal{T}[J]$ の方程式の解を相互作用表示における φ を用いて表現してやれば良いのである．そこで試みに次のような量を導入してみよう：

$$“\mathcal{T}[J]”=\langle 0|T^*\exp\left[i\int d^4x(\mathcal{L}_{\rm int}(x)-J_a(x)\varphi_a(x))\right]|0\rangle \tag{5.22}$$

ただし

$$\mathcal{L}_{\rm int}=\mathcal{L}+\frac{1}{2}(\partial_\lambda\varphi_a)^2 \tag{5.23}$$

そしてこの “$\mathcal{T}[J]$” の満たす汎関数方程式を求めるために次の式から出発する：

$$“\mathcal{T}[J]”=\exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}_{\rm int}\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]\langle 0|T\exp\left(-i\int d^4x J_b(x)\varphi_b(x)\right)|0\rangle$$
$$=\exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}_{\rm int}\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}\int d^4x \int d^4y J_b(x) \varDelta_F(x-y) J_b(y)\right) \tag{5.24}$$

ただし $\mathcal{L}_{\text{int}}$ の中では φ を $i\delta/\delta J$ で置き換えるものとする．右辺の変形においては (4.22) 式を用いている．しからば

$$\begin{aligned}
&\Box_x i\frac{\delta}{\delta J_a(x)}\text{“}\mathcal{T}[J]\text{”}\\
&=\exp\left[i\int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right] J_a(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4y J_b(x)\varDelta_F(x-y)J_b(y)\right)\\
&=J_a(x)\text{“}\mathcal{T}[J]\text{”}+\left[i\int d^4x' \mathcal{L}_{\text{int}}\left(i\frac{\delta}{\delta J(x')}\right),\ J_a(x)\right]\text{“}\mathcal{T}[J]\text{”}\\
&=J_a(x)\text{“}\mathcal{T}[J]\text{”}-[\mathcal{L}_{\text{int}}]_{\varphi_a}\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\text{“}\mathcal{T}[J]\text{”}\\
&=\left[J_a(x)-D_{ab}\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\left\{\Box_x i\frac{\delta}{\delta J_b(x)}-j_b\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\}+\Box_x i\frac{\delta}{\delta J_a(x)}\right]\text{“}\mathcal{T}[J]\text{”}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

右辺の最後の項は左辺と同じであるから打ち消し合って

$$\begin{aligned}
&D_{ab}\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\Box_x i\frac{\delta}{\delta J_b(x)}\text{“}\mathcal{T}[J]\text{”}\\
&=D_{ab}j_b\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\text{“}\mathcal{T}[J]\text{”}+J_a(x)\text{“}\mathcal{T}[J]\text{”}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

この式において V を次の V' に置き換えれば (5.21) と一致する：

$$V'=V+\frac{i}{2}\delta^4(0)\ln(\det D) \tag{5.27}$$

すなわち $\mathcal{T}[J]$ は “$\mathcal{T}[J]$” において V を V' で置き換え，$J=0$ の時に1に等しくなるように規格化すれば得られることになる．従って，

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}[J]=\langle 0|T^*\exp\left[i\int d^4x(\mathcal{L}_{\text{eff}}(\varphi(x))-J_a(x)\varphi_a(x))\right]|0\rangle\Big/\\
\langle 0|T^*\exp\left(i\int d^4x\,\mathcal{L}_{\text{eff}}(\varphi(x))\right)|0\rangle
\end{aligned} \tag{5.28}$$

ただし

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}=\mathcal{L}_{\text{int}}-\frac{i}{2}\delta^4(0)\ln(\det D) \tag{5.29}$$

すなわちこの例では Matthews の定理は変更を受けていることになる．

さて次に問題となるのは付加項の性質である．この項は第一に虚数であり，また $\delta^4(0)$ という発散を含む．時空座標の δ 関数の表示より，

$$\delta^4(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4ke^{ik\cdot x}\to\delta^4(0)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \tag{5.30}$$

従ってこれは運動量空間において四次の発散を与えることになる．虚数係数は四次の発散と結び付いている．付加項無しで閉じたループの計算をすると，この理論では四次の発散が生ずる．ところで運動量空間で切断 Λ を導入すると，

$$\int d^4k\frac{k^2}{k^2+m^2-i\varepsilon}\sim\frac{\pi^2}{2}\Lambda^4-i\pi^2m^2\Lambda^2 \tag{5.31}$$

このことは二次までの発散は後に述べるように質量とか結合定数に発散する寄与を与えるが，それにしても実数である．ところで四次の発散は上式から分かるように，二次までの発散と比べて虚数であり，このような寄与はいわゆるくりこみによって落とすことはできず，ユニタリー性を破ってしまう．幸いにも上述の付加項は自動的にこの四次の発散を打ち消すことになり，理論の中に自動的に安全装置が導入されたことになる．

また上述の結果は径路積分の方法によっても導き出すことができるが，付加項には上述の解釈とは異なった解釈が与えられる．なお径路積分の方法は上の方法よりも簡単に上の結果を与えるが，それは径路積分の方法が本質的にラグランジアンに基づいており，従ってラグランジアンおよび T* 積を含む結果の導出にはより適切な方法であると言うことができる．

§6　相互作用表示における簡約公式

今までS行列の計算法は相互作用表示において与えられた．そこで第7章§3で導入された簡約公式と Gell-Mann-Low の関係式とを組み合わせて，S行列要素を Heisenberg 表示におけるグリーン関数で表現することを考える．

Dyson の公式ではS行列を表現するのに相互作用のハミルトニアン密度，あるいはラグランジアン密度が出現するが，相互作用の形が陽に現れない式を出すことができるかどうかという問題も同時に議論されることになる．

簡単のために荷電スカラー場を考えて，散乱過程

$$a+b\to b+a \tag{6.1}$$

に対するS行列要素の表現を調べてみる．そのためには $U(\infty,-\infty)$ を Wick の定理により正規積に展開して

$$:\varphi_a^\dagger\varphi_b^\dagger\varphi_a\varphi_b: \tag{6.2}$$

の係数を求めることになる．これは結局 $U(\infty,-\infty)$ から上の正規積を抽き出して残りを縮約することになるから

$$\langle 0|\frac{\delta}{\delta\varphi_a^\dagger(x_1')}\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi_b^\dagger(x_2')}\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi_a(x_1)}\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi_b(x_2)}U(\infty,-\infty)|0\rangle \tag{6.3}$$

を求めることになる．従ってS行列要素は終状態を $|a',b'\rangle$ と書くと

$$\begin{aligned}\langle a',b'|S-1|a,b\rangle=&\int d^4x_1'd^4x_2'd^4x_1d^4x_2\langle a'|\varphi_a^\dagger(x_1')|0\rangle\langle b'|\varphi_b^\dagger(x_2')|0\rangle\\&\times\langle 0|\frac{\delta}{\delta\varphi_a^\dagger(x_1')}\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi_b^\dagger(x_2')}\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi_a(x_1)}\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi_b(x_2)}U(\infty,-\infty)|0\rangle\\&\times\langle 0|\varphi_a(x_1)|a\rangle\langle 0|\varphi_b(x_2)|b\rangle/\langle 0|U(\infty,-\infty|0\rangle\end{aligned} \tag{6.4}$$

で与えられることになる．ところで汎関数微分は簡約公式により

$$(\Box_x-m_a{}^2)T[\varphi_a(x)\cdots]=i\frac{\delta}{\delta\varphi_a^\dagger(x)}T[\cdots] \tag{6.5}$$

左辺の Klein-Gordon 演算子を K_x^a と表わすことにすると，(6.5)により(6.4)は

$$\begin{aligned}\langle a',b'|S-1|a,b\rangle=&\langle 0|U(\infty,-\infty)|0\rangle^{-1}\\&\times\int d^4x_1'd^4x_2'd^4x_1d^4x_2\langle a'|\varphi_a^\dagger(x_1')|0\rangle\langle b'|\varphi_b^\dagger(x_2')|0\rangle\\&\times(-i)^4K_{x_1'}^aK_{x_2'}^bK_{x_1}^aK_{x_2}^b\langle 0|T[\varphi_a(x_1')\varphi_b(x_2')\varphi_a^\dagger(x_1)\varphi_b^\dagger(x_2)U(\infty,-\infty)]|0\rangle\\&\times\langle 0|\varphi_a(x_1)|a\rangle\langle 0|\varphi_b(x_2)|b\rangle\end{aligned} \tag{6.6}$$

さて一体の波動関数とも呼ぶべき $\langle 0|\varphi_a(x)|a\rangle$ は相互作用表示でも Heisenberg 表示でも同じ構造をしており，違うとしても比例係数のみである．さて全体のラグランジアン密度を自由部分と相互作用部分とに分ける方法は自明ではないが，次章で述べるくりこまれた相互作用表示を採用すれば両者は一致する．

$$\langle 0|\varphi_a(x)|a\rangle=\langle \mathbf{0}|\boldsymbol{\varphi}_a(x)|\boldsymbol{a}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2p_0V}}e^{ip\cdot x} \tag{6.7}$$

この時に Gell-Mann-Low の関係式を用いると (6.6) 式は完全に Heisenberg 表示の量のみで表わされることになる．

$$\begin{aligned}\langle a',b'|S-1|a,b\rangle=&\int d^4x_1'd^4x_2'd^4x_1d^4x_2\langle \boldsymbol{a}'|\boldsymbol{\varphi}_a^\dagger(x_1')|\mathbf{0}\rangle\langle \boldsymbol{b}'|\boldsymbol{\varphi}_b^\dagger(x_2')|\mathbf{0}\rangle\\&\times K_{x_1'}^aK_{x_2'}^bK_{x_1}^aK_{x_2}^b\langle \mathbf{0}|T[\boldsymbol{\varphi}_a(x_1')\boldsymbol{\varphi}_b(x_2')\boldsymbol{\varphi}_a^\dagger(x_1)\boldsymbol{\varphi}_b^\dagger(x_2)]|\mathbf{0}\rangle\\&\times\langle \mathbf{0}|\boldsymbol{\varphi}_a(x_1)|\boldsymbol{a}\rangle\langle \mathbf{0}|\boldsymbol{\varphi}_b(x_2)|\boldsymbol{b}\rangle\end{aligned} \tag{6.8}$$

この公式の特徴は Dyson の公式と異なって相互作用の具体的な形が全く現れ

ないことである．従って相互作用表示における如くラグランジアンをどのようにして自由部分と相互作用部分とに分けるかという問題が生じない．しかしながらこの公式の導出の過程において (1.7) 式のような正当化の難しい仮定をしている．実際この結果が正当化されるのは既に上述のくりこまれた相互作用表示から出発した時のみである．そこで上の公式を Heisenberg 表示の枠内で導出するような漸近条件について述べる．

§7 漸近条件

前節で導き出したS行列要素の Heisenberg 表示での表式は多くの仮定に基づいている．そこで同じ結果をもっとすっきりとした仮定から出せないかという疑問が生ずる．実際このような仮定は Lehmann, Symanzik, Zimmermann によって定式化され，漸近条件と呼ばれる．

第5章§3において Yang-Feldman 形式と関連して二種類の漸近場を導入した．実スカラー場 $\boldsymbol{\varphi}$ に対して漸近場 $\boldsymbol{\varphi}^{\text{in}}$ と $\boldsymbol{\varphi}^{\text{out}}$ とを導入すると，

$$(\Box - m^2)\boldsymbol{\varphi}^{\text{in}}(x) = (\Box - m^2)\boldsymbol{\varphi}^{\text{out}}(x) = 0 \tag{7.1}$$

$$[\boldsymbol{\varphi}^{\text{in}}(x), \boldsymbol{\varphi}^{\text{in}}(y)] = [\boldsymbol{\varphi}^{\text{out}}(x), \boldsymbol{\varphi}^{\text{out}}(y)] = i\boldsymbol{\Delta}(x-y) \tag{7.2}$$

この二種類の漸近場は同じスカラー場 $\boldsymbol{\varphi}$ から生まれているので，$\boldsymbol{\varphi}^{\text{in}}$ と $\boldsymbol{\varphi}^{\text{out}}$ とはお互いに独立ではなく，従ってお互いに可換ではない．そして直観的に言えば，Yang-Feldman 形式の時と同様に

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(x) &\longrightarrow \boldsymbol{\varphi}^{\text{in}}(x), \qquad t \to -\infty \\ &\longrightarrow \boldsymbol{\varphi}^{\text{out}}(x), \qquad t \to \infty \end{aligned} \tag{7.3}$$

このように $t \to \pm\infty$ で場は自由場に近付くと考える根拠は，$t \to \pm\infty$ では粒子同士はお互いから離れてしまって他の粒子の影響が無くなり，自由粒子の如く振舞うということである．このことは実は次章で述べるくりこみとも密接に関係しているが，この考えをもっと厳密にするためには粒子の波動関数を平面波ではなくて波束を用いて表現しなければならない．

関数 $f(x)$ が波束に対応して次の条件を満たすものとする：

$$(\Box - m^2) f(x) = 0, \tag{7.4}$$

$$-i\int d^3x \left\{ f \frac{\partial f^*}{\partial x_0} - f^* \frac{\partial f}{\partial x_0} \right\} = 1 \tag{7.5}$$

そしてこの f に対応して次のような演算子を導入する：

$$\boldsymbol{\varphi}_f(t)=-i\int d^3x\left\{\boldsymbol{\varphi}(x)\frac{\partial f^*(x)}{\partial x_0}-f^*(x)\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(x)}{\partial x_0}\right\},\tag{7.6}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_f^\dagger(t)=i\int d^3x\left\{\boldsymbol{\varphi}(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_0}-f(x)\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(x)}{\partial x_0}\right\},\tag{7.7}$$

ただし $t=x_0$ である．そして対応する漸近場 $\varphi_f^{\rm in}$ と $\varphi_f^{\rm out}$ を次式で定義する：

$$\lim_{\tau\to-\infty}(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\varphi}_f(\tau)\boldsymbol{\Psi})=(\boldsymbol{\Phi},\varphi_f^{\rm in}\boldsymbol{\Psi}),\tag{7.8}$$

$$\lim_{\tau\to\infty}(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\varphi}_f(\tau)\boldsymbol{\Psi})=(\boldsymbol{\Phi},\varphi_f^{\rm out}\boldsymbol{\Psi})\tag{7.9}$$

ただし $\boldsymbol{\Phi}$ も $\boldsymbol{\Psi}$ も規格化された状態ベクトルである，$\varphi_f^\dagger(\tau)$ から出発しても同様な漸近場が定義される．そして (7.8) と (7.9) の右辺はもはや時間変数に依存しないことに注意せよ．このような行列要素の意味での演算子の極限は弱収束と呼ばれ，ノルムの意味での極限の強収束と区別される．

次に波動関数の直交系を考える．ただしここで波動関数と呼んでいるものは一体系における場の演算子の真空との間の行列要素を意味する．(7.4) と (7.5) とを満たしかつ次の条件を満たす関数の集合 $\{f_\alpha(x)\}$ を考える：

$$-i\int d^3x\left\{f_\alpha\frac{\partial f_\beta^*}{\partial x_0}-f_\beta^*\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_0}\right\}=\delta_{\alpha\beta}\tag{7.10}$$

この直交関数系に対する完全性の条件は次の式で与えられる：

$$\sum_\alpha f_\alpha(x)f_\alpha^*(y)=i\boldsymbol{\Delta}^{(+)}(x-y)\tag{7.11}$$

次に状態ベクトルの完全系 $\{\boldsymbol{\Phi}^{\rm in}\}$ を導入する．$\boldsymbol{\Phi}_0$ を真空として

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}_0\\ &\boldsymbol{\Phi}_\alpha^{\rm in}=\varphi_\alpha^{\dagger\rm in}\boldsymbol{\Phi}_0\\ &\vdots\\ &\boldsymbol{\Phi}_{\alpha_1\cdots\alpha_k}^{\rm in}=(p_{\alpha_1\cdots\alpha_k})^{-1/2}\varphi_{\alpha_1}^{\dagger\rm in}\cdots\varphi_{\alpha_k}^{\dagger\rm in}\boldsymbol{\Phi}_0\end{aligned}\tag{7.12}$$

ただし $p_{\alpha_1\cdots\alpha_k}=n_1!n_2!\cdots n_r!$ であり，各 n は $(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ の中で同じ一体状態にある粒子の数を表わす．また $\varphi^{\dagger\rm in}$ を $\varphi^{\dagger\rm out}$ で置き換えることにより $\{\boldsymbol{\Phi}^{\rm out}\}$ なる完全系を作ることができる．S行列はこの二組の完全正規直交系の間の変換に対応するユニタリー変換として定義される．この定義が前節で与えたS行列要素を再現することは後に示されるし，また次章で議論される Lippmann-Schwinger 理論におけるS行列の定義とも一致することは次章で明らかにされる．

$$S_{\beta\alpha}=(\boldsymbol{\Phi}_\beta^{\rm out},\boldsymbol{\Phi}_\alpha^{\rm in})\tag{7.13}$$

あるいは同値の定義式は

$$\boldsymbol{\Phi}_\alpha^{\text{in}}=S\boldsymbol{\Phi}_\alpha^{\text{out}}. \tag{7.14}$$

二つの漸近場に対しては定義から明らかなように

$$(\boldsymbol{\Phi}_\beta^{\text{in}},\ \boldsymbol{\varphi}_f^{\text{in}}\boldsymbol{\Phi}_\alpha^{\text{in}})=(\boldsymbol{\Phi}_\beta^{\text{out}},\ \boldsymbol{\varphi}_f^{\text{out}}\boldsymbol{\Phi}_\alpha^{\text{out}}) \tag{7.15}$$

(7.14) と (7.15) とを組み合わせると

$$\boldsymbol{\varphi}_f^{\text{out}}=S^{-1}\boldsymbol{\varphi}_f^{\text{in}}S \tag{7.16}$$

同様にして

$$\boldsymbol{\varphi}_f^{\dagger\text{out}}=S^{-1}\boldsymbol{\varphi}_f^{\dagger\text{in}}S \tag{7.17}$$

これから $\boldsymbol{\varphi}^{\text{in}}(x)$ を次式で導入する．ただし $\boldsymbol{\varphi}^{\text{out}}(x)$ も同様な式で定義すると，

$$\boldsymbol{\varphi}^{\text{in}}(x)=\sum_\alpha\{f_\alpha^*(x)\boldsymbol{\varphi}_\alpha^{\dagger\text{in}}+f_\alpha(x)\boldsymbol{\varphi}_\alpha^{\text{in}}\}, \tag{7.18}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{\text{out}}(x)=S^{-1}\boldsymbol{\varphi}^{\text{in}}(x)S \tag{7.19}$$

後者は (5.1.32) と一致するので今までに与えたS行列と同じものであることが分かる．前節の (6.7) 式と関係して述べたが，この時に Heisenberg 表示の一粒子状態について in を用いるか out を用いるかの区別をしなかった．このことは，**安定な一粒子状態** α に関しては次の等式が成り立つことを意味する：

$$\boldsymbol{\Phi}_\alpha^{\text{in}}=\boldsymbol{\Phi}_\alpha^{\text{out}} \tag{7.20}$$

この式を前節の (6.7) 式と組み合わせると，

$$(\Box-m^2)(\boldsymbol{\Phi}_0,\ \boldsymbol{\varphi}(x)\boldsymbol{\Phi}_\alpha^{\text{in}})=(\Box-m^2)(\boldsymbol{\Phi}_0,\ \boldsymbol{\varphi}(x)\boldsymbol{\Phi}_\alpha^{\text{out}})=0, \tag{7.21}$$

$$(\boldsymbol{\Phi}_0,\ \boldsymbol{\varphi}(x)\boldsymbol{\Phi}_\alpha^{\text{in}})=(\boldsymbol{\Phi}_0,\ \boldsymbol{\varphi}(x)\boldsymbol{\Phi}_\alpha^{\text{out}})=f_\alpha(x) \tag{7.22}$$

このような要請のくりこみ理論における意義については次章で述べる．

さて漸近場の存在を仮定した (7.8) と (7.9) の式を漸近条件と呼ぶ．この条件から出発して Heisenberg 表示における LSZ の簡約公式，あるいは彼らによって魔法の公式 (Zauberformel) と呼ばれた式を導出してみよう．そこで略記法

$$T(x_1,\cdots,x_n)=T[\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)], \tag{7.23}$$

$$\tau(x_1,\cdots,x_n)=(\boldsymbol{\Phi}_0,\ T[\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]\boldsymbol{\Phi}_0) \tag{7.24}$$

$$K_y=\Box_y-m^2,\qquad f\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}}g=f\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}g \tag{7.25}$$

を導入する．そこでまず次式を証明する：

$$(\boldsymbol{\Phi}_0,\ T(x_1,\cdots,x_n)\boldsymbol{\Phi}_\alpha^{\text{in}})=-i\int d^4y f_\alpha(y)K_y\tau(x_1,\cdots,x_n,y) \tag{7.26}$$

さて左辺は

$$(\text{左辺})=\lim_{y_0\to-\infty} i\int d^3y(\boldsymbol{\Phi}_0, T(x_1,\cdots,x_n,y)\boldsymbol{\Phi}_0)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial y_0}}f_\alpha(y)$$

$$=i\lim_{y_0\to-\infty}\int d^3y\tau(x_1,\cdots,x_n,y)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial y_0}}f_\alpha(y) \tag{7.27}$$

次に $\varphi_\alpha^{\mathrm{out}}$ は消滅演算子であることに留意すると，同様にして $y_0\to\infty$ という極限に対して

$$i\lim_{y_0\to\infty}\int d^3y\tau(x_1,\cdots,x_n,y)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial y_0}}f_\alpha(y)$$

$$=(\boldsymbol{\Phi}_0, \varphi_\alpha^{\dagger\mathrm{out}}T(x_1,\cdots,x_n)\boldsymbol{\Phi}_0)$$

$$=(\varphi_\alpha^{\mathrm{out}}\boldsymbol{\Phi}_0, T(x_1,\cdots x_n)\boldsymbol{\Phi}_0)=0 \tag{7.28}$$

上の二式の差をとると

$$(\boldsymbol{\Phi}_0, T(x_1,\cdots,x_n)\boldsymbol{\Phi}_\alpha^{\mathrm{in}})$$

$$=i(\lim_{y_0\to-\infty}-\lim_{y_0\to\infty})\int d^3y\tau(x_1,\cdots,x_n,y)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial y_0}}f_\alpha(y)$$

$$=-i\int d^4y\frac{\partial}{\partial y_0}\left[\tau(x_1,\cdots,x_n,y)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial y_0}}f_\alpha(y)\right]$$

$$=-i\int d^4y\left[\tau(x_1,\cdots,x_n,y)\frac{\partial^2 f_\alpha(y)}{\partial {y_0}^2}-\frac{\partial^2\tau(x_1,\cdots,x_n,y)}{\partial {y_0}^2}f_\alpha(y)\right] \tag{7.29}$$

この式と Green の定理とを組み合わせる．

$$\int_V d^3y[\tau(x_1,\cdots,x_n,y)\varDelta_y f_\alpha(y)-\varDelta_y\tau(x_1,\cdots,x_n,y)\cdot f_\alpha(y)]$$

$$=\int_{S=\partial V}dS_y\left[\tau(x_1,\cdots,x_n,y)\cdot\frac{\partial}{\partial y_n}f_\alpha(y)-\frac{\partial}{\partial y_n}\tau(x_1,\cdots,x_n,y)\cdot f_\alpha(y)\right]$$

$$\to 0,\qquad V\to\infty \tag{7.30}$$

ただし上の極限では $f_\alpha(y)$ が波束であり局所的な波に対応するので遠方では消えるということを用いている．従って (7.29) と (7.30) を組み合わせて

$$(\boldsymbol{\Phi}_0, T(x_1,\cdots,x_n)\boldsymbol{\Phi}_\alpha^{\mathrm{in}})$$

$$=i\int d^4y[\tau(x_1,\cdots,x_n,y)\Box_y f_\alpha(y)-\Box_y\tau(x_1,\cdots,x_n,y)\cdot f_\alpha(y)]$$

$$=-i\int d^4y f_\alpha(y)K_y\tau(x_1,\cdots,x_n,y) \tag{7.31}$$

ただし $K_y f_\alpha(y)=0$ を用いている．この公式の一般化は

$$(\boldsymbol{\Phi}_0, T(x_1,\cdots,x_n)\boldsymbol{\Phi}_{\alpha_1\cdots\alpha_k}^{\mathrm{in}})$$

$$=(-i)^k\int d^4y_1\cdots d^4y_k f_{\alpha_1}(y_1)\cdots f_{\alpha_k}(y_k)K_{y_1}\cdots K_{y_k}\tau(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_k) \tag{7.31}$$

この式を更に一般化すると

$$\begin{aligned}&(\Phi_\alpha^{\text{out}},T(x_1,\cdots,x_n)\Phi_\beta^{\text{in}})\\&=-i\int d^4\eta f_{\beta_l}(\eta)K_\eta(\Phi_\alpha^{\text{out}},T(x_1,\cdots,x_n,\eta)\Phi^{\text{in}}_{\beta_1\cdots\beta_{l-1}})\\&=-i\int d^4\zeta f^*_{\alpha_k}(\zeta)K_\zeta(\Phi^{\text{out}}_{\alpha_1\cdots\alpha_{k-1}},T(x_1,\cdots,x_n,\zeta)\Phi_\beta^{\text{in}})\end{aligned} \tag{7.32}$$

ただし $\alpha=\alpha_1\cdots\alpha_k$, $\beta=\beta_1\cdots\beta_l$ であり，α と β の間には共通の一粒子状態は無いものとしている．同様な仮定の下でS行列要素は

$$\begin{aligned}S_{\alpha\beta}&=(\Phi_\alpha^{\text{out}},\Phi_\beta^{\text{in}})\\&=(-i)^{k+l}\int d^4\zeta_1\cdots d^4\zeta_k d^4\eta_1\cdots d^4\eta_l f^*_{\alpha_1}(\zeta_1)\cdots f^*_{\alpha_k}(\zeta_k)f_{\beta_1}(\eta_1)\cdots f_{\beta_l}(\eta_l)\\&\quad\times K_{\zeta_1}\cdots K_{\zeta_k}K_{\eta_1}\cdots K_{\eta_l}\tau(\zeta_1\cdots\zeta_k\eta_1\cdots\eta_l)\end{aligned} \tag{7.33}$$

この式を見て分かることは，$k=l=2$ の時の上の表式は本質的に (6.8) 式と同じだということである．

上の導出では行列要素を考えたが，この導出法は演算子のままでも成り立つことが分かる．すなわち，

$$-i\int d^4y f_\alpha(y)K_yT(x_1,\cdots,x_n,y)=T(x_1,\cdots,x_n)\varphi_\alpha^{+\text{in}}-\varphi_\alpha^{+\text{out}}T(x_1,\cdots,x_n), \tag{7.34}$$

$$i\int d^4y f^*_\alpha(y)K_yT(x_1,\cdots,x_n,y)=T(x_1,\cdots,x_n)\varphi_\alpha^{\text{in}}-\varphi_\alpha^{\text{out}}T(x_1,\cdots,x_n) \tag{7.35}$$

そこで (7.11) と (3.2.5) とを組み合わせると

$$\int d^4y\Delta(y-x)K_yT(x_1,\cdots,x_n,y)=T(x_1,\cdots,x_n)\varphi^{\text{in}}(x)-\varphi^{\text{out}}(x)T(x_1,\cdots,x_n) \tag{7.36}$$

これが LSZ の簡約公式の演算子形であり，(6.5) に対応するものである．さて

$$S\varphi^{\text{out}}(x)=\varphi^{\text{in}}(x)S \tag{7.37}$$

という式と (7.36) とを組み合わせると

$$\int d^4y\Delta(y-x)K_yST(x_1,\cdots,x_n,y)=[ST(x_1,\cdots,x_n),\varphi^{\text{in}}(x)], \tag{7.38}$$

$$\int d^4y\Delta(x-y)K_yST(x_1,\cdots,x_n,y)=[\varphi^{\text{in}}(x),ST(x_1,\cdots,x_n)] \tag{7.38'}$$

そこで上の式を繰り返して用いると

$$\int d^4y_1\cdots d^4y_l\Delta(z_1-y_1)\cdots\Delta(z_l-y_l)K_{y_1}\cdots K_{y_l}ST(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_l)$$

$$=[\varphi^{\text{in}}(z_1),[\varphi^{\text{in}}(z_2),[\cdots[\varphi^{\text{in}}(z_l),ST(x_1,\cdots,x_n)]\cdots] \qquad (7.39)$$

この真空期待値をとり，かつ次章に述べるくりこみ条件の一つ

$$S\Phi_0=\Phi_0 \qquad (7.40)$$

を用いると

$$\int d^4y_1\cdots d^4y_l\Delta(z_1-y_1)\cdots\Delta(z_l-y_l)K_{y_1}\cdots K_{y_l}\tau(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_l)$$

$$=(\Phi_0,[\varphi^{\text{in}}(z_1),[\varphi^{\text{in}}(z_2),[\cdots[\varphi^{\text{in}}(z_l),ST(x_1,\cdots,x_n)]\cdots]\Phi_0), \qquad (7.41)$$

$n=0$：

$$\int d^4y_1\cdots d^4y_l\Delta(z_1-y_1)\cdots\Delta(z_l-y_l)K_{y_1}\cdots K_{y_l}\tau(y_1,\cdots,y_l)$$

$$=(\Phi_0,[\varphi^{\text{in}}(z_1),[\varphi^{\text{in}}(z_2),[\cdots[\varphi^{\text{in}}(z_l),S]\cdots]\Phi_0) \qquad (7.42)$$

この (7.42) 式によってS行列の演算子形が定まる．S行列を Wick の定理により正規積に展開したとして次の形に書くことにする:

$$S=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\int d^4y_1\cdots d^4y_l c(y_1,\cdots,y_l):\varphi^{\text{in}}(y_1)\cdots\varphi^{\text{in}}(y_l): \qquad (7.43)$$

ただし c は $y_1,y_2,\cdots,y_l$ について対称であるとする．さて (7.43) を (7.42) に代入した時に右辺で生き残るのは l 個の演算子の正規積の項のみであるから

$$(\Phi_0,[\varphi^{\text{in}}(z_1),[\cdots[\varphi^{\text{in}}(z_l),S]\cdots]\Phi_0)$$

$$=i^l\int d^4y_1\cdots d^4y_l\Delta(z_1-y_1)\cdots\Delta(z_l-y_l)c(y_1,\cdots,y_l)$$

$$=\int d^4y_1\cdots d^4y_l\Delta(z_1-y_1)\cdots\Delta(z_l-y_l)K_{y_1}\cdots K_{y_l}\tau(y_1,\cdots,y_l) \qquad (7.44)$$

そこで c は少なくとも質量殻上では，すなわち Einstein の関係式を満たしているようなフーリエ成分に対しては，(7.44) から一意的に定まってしまう．そしてまた (7.43) に寄与するのは c の質量殻上の値のみであるから

$$c(y_1,\cdots,y_l)=(-i)^lK_{y_1}\cdots K_{y_l}\tau(y_1,\cdots,y_l) \qquad (7.45)$$

これを (7.43) に代入すれば

$$S=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-i)^l}{l!}\int d^4y_1\cdots d^4y_lK_{y_1}\cdots K_{y_l}\tau(y_1,\cdots,y_l):\varphi^{\text{in}}(y_1)\cdots\varphi^{\text{in}}(y_l): \qquad (7.46)$$

ただし $l=0$ に対応する項は1に等しいとする．これがS行列の演算子形であ

る．また (7.41) に戻れば

$$ST(x_1, \cdots, x_n)$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-i)^l}{l!}\int d^4y_1\cdots d^4y_l K_{y_1}\cdots K_{y_l}\tau(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_l):\varphi^{\text{in}}(y_1)\cdots\varphi^{\text{in}}(y_l): \tag{7.47}$$

このように漸近条件から出発すると多くの簡約公式が得られる．後者の公式は実は場の量子化法を規定する内容を持っている．

§8　グリーン関数に対するユニタリー性条件

S行列のユニタリー性は，二組の完全正規直交系 $\{\Phi^{\text{in}}\}$, $\{\Phi^{\text{out}}\}$ の間の変換行列としてS行列要素が (7.13) で定義される限り明らかである．このような漸近状態が完全系を張るということを漸近完全性(asymptotic completeness) と呼ぶ．

この節ではS行列に対するユニタリー性，すなわち質量殻上のユニタリー性を質量殻外のユニタリー性に拡張する．そしてこれはグリーン関数に対するユニタリー性条件として表現される．

まず次の演算子を考える：

$$T\ \exp\left[-i\int d^4xJ(x)\boldsymbol{\varphi}(x)\right] \tag{8.1}$$

この演算子はユニタリーであり，逆順の時間的順序付けの演算子を $\tilde{T}$ とすると

$$T\ \exp\left[-i\int d^4xJ(x)\boldsymbol{\varphi}(x)\right]\cdot\tilde{T}\ \exp\left[i\int d^4y\,J(y)\boldsymbol{\varphi}(y)\right]=1 \tag{8.2}$$

この式を J について n 回汎関数微分してから $J=0$ と置くと，

$$\sum_{\text{comb}}(-i)^k i^{n-k}T(x_1', \cdots, x_k')\,\tilde{T}(x_{k+1}', \cdots, x_n')=0 \tag{8.3}$$

ただし $(x_1', \cdots, x_n')$ は $(x_1, \cdots, x_n)$ の置換であり，n 変数を二組に分けるあらゆる組み合わせについて和をとるものとする．この式の真空期待値をとり，T と $\tilde{T}$ との間に完全系 $\{\Phi^{\text{in}}\}$ を挿入して次の式を用いる：

$$(\Phi_0, T(x_1, \cdots, x_k)\Phi^{\text{in}}_{\alpha_1\cdots\alpha_l})$$
$$=(-i)^l\int d^4u_1\cdots d^4u_l f_{\alpha_1}(u_1)\cdots f_{\alpha_l}(u_l)K_{u_1}\cdots K_{u_l}\tau(x_1, \cdots, x_k, u_1, \cdots, u_l) \tag{8.4}$$

およびその複素共役をとり，

$$(\Phi^{\text{in}}_{\alpha_1\cdots\alpha_l}, \tilde{T}(x_{k+1}, \cdots, x_n)\Phi_0)$$

$$=i^l\int d^4v_1\cdots d^4v_l f^*_{\alpha_1}(v_1)\cdots f^*_{\alpha_l}(v_l)K_{v_1}\cdots K_{v_l}\tau^*(x_{k+1},\cdots,x_n,v_1,\cdots,v_l) \quad (8.5)$$

そして (7.11) を用いて中間状態についての和をとる．その際に次の記法を使う：

$$\bar{\tau}(x_1,\cdots,x_n)=(-i)^nK_{x_1}\cdots K_{x_n}\tau(x_1,\cdots,x_n) \quad (8.6)$$

$\bar{\tau}$ のフーリエ変換は，すべての運動量が質量殻上にあればS行列要素そのものである．そこで (8.3) の真空期待値を書き直すと，

$$\bar{\tau}(x_1,\cdots,x_n)+\bar{\tau}^*(x_1,\cdots,x_n)$$
$$+\sum_{\text{comb}}{}'\sum_{l=0}^{\infty}\frac{i^l}{l!}\int d^4u_1\cdots d^4u_ld^4v_1\cdots d^4v_l\bar{\tau}(x_1',\cdots,x_k',u_1,\cdots,u_l)$$
$$\times\varDelta^{(+)}(u_1-v_1)\cdots\varDelta^{(+)}(u_l-v_l)\bar{\tau}^*(x_{k+1}',\cdots,x_n',v_1,\cdots,v_l)=0 \quad (8.7)$$

ただし分母の $l!$ は同じ状態を繰り返して数えることを避けるための因子であり，$\sum'$ は $k=0$ と $k=n$ とを除くことを意味する．この式のフーリエ変換で，すべての運動量を質量殻上に制限すればS行列のユニタリー性の条件になる．しかし質量殻外ではその一般化になっているので，(8.7) を一般化されたユニタリー性の条件と呼ぶ．実際 (8.7) が質量殻上でS行列のユニタリー性の条件を表わしていることは次の議論から明らかであろう．

$$S=1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\int d^4x_1\cdots d^4x_l\bar{\tau}(x_1,\cdots,x_l):\varphi^{\text{in}}(x_1)\cdots\varphi^{\text{in}}(x_l):, \quad (8.8)$$

$$S^\dagger=1+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\int d^4x_1\cdots d^4x_l\bar{\tau}^*(x_1,\cdots,x_l):\varphi^{\text{in}}(x_1)\cdots\varphi^{\text{in}}(x_l): \quad (8.9)$$

を用いて $SS^\dagger$ を正規積の和に展開してやる．その時に

$$:\varphi^{\text{in}}(x_1)\cdots\varphi^{\text{in}}(x_l)::\varphi^{\text{in}}(y_1)\cdots\varphi^{\text{in}}(y_m):=:\varphi^{\text{in}}(x_1)\cdots\varphi^{\text{in}}(x_l)\varphi^{\text{in}}(y_1)\cdots\varphi^{\text{in}}(y_m):$$
$$+\sum_{\text{comb}}i\varDelta^{(+)}(x_1'-y_1'):\varphi^{\text{in}}(x_2')\cdots\varphi^{\text{in}}(x_l')\varphi^{\text{in}}(y_2')\cdots\varphi^{\text{in}}(y_m'):$$
$$+(\text{二回以上の縮約}) \quad (8.10)$$

しからば一つの正規積

$$:\varphi^{\text{in}}(x_1)\cdots\varphi^{\text{in}}(x_n):$$

の係数を集めたものがちょうど (8.7) 式の左辺になっていることが分かる．従って

$$SS^\dagger=1. \quad (8.11)$$

同様にして

$$S^\dagger S=1. \quad (8.12)$$

ただし (8.12) を出すには (8.7) において τ と τ^* とを入替えた式を用いなければならない．このようにS行列に対するユニタリー性もグリーン関数に対するユニタリー性もみな漸近完全性の結果である．

以上においては Heisenberg 演算子のT積を考えたが，次に第5章§2で導入した遅延積に基づいたグリーン関数を導入しよう．

§9　遅延グリーン関数

$\boldsymbol{A}(x)$ を局所場としてその遅延積は次式で定義される：

$$R[\boldsymbol{A}(x):\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]$$
$$=(-i)^n\sum_P \theta(x-x_1')\cdots\theta(x_{n-1}'-x_n')[\cdots[\boldsymbol{A}(x),\boldsymbol{\varphi}(x_1')]\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n')] \quad (9.1)$$

ただし $\theta(x)$ は $\theta(x_0)$ を意味し，$x_1',\cdots,x_n'$ は $x_1,\cdots,x_n$ の置換であり，すべての置換について和をとる．結局寄与するのは時間変数について $x_1'>x_2'>\cdots>x_n'$ となるような置換のみである．再び (8.1) のユニタリーな演算子を導入し，U と記す．

$$U=T\exp\left[-i\int d^4x\, J(x)\boldsymbol{\varphi}(x)\right] \quad (9.2)$$

しからば

$$U^{-1}=U^{\dagger}=\tilde{T}\exp\left[i\int d^4x\, J(x)\boldsymbol{\varphi}(x)\right] \quad (9.3)$$

そこで次の母汎関数を導入する：

$$A_R[x,J]=U^{\dagger}T[U\boldsymbol{A}(x)] \quad (9.4)$$

しからば上記のR積は次のように表現されることは容易に検証される．

$$R[\boldsymbol{A}(x):\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]=\left(\frac{\delta^n A_R[x,J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\right)_{J=0} \quad (9.5)$$

定義より直ちに

$$\frac{\delta}{\delta J(y)}A_R[x,J]=-i\theta(x-y)[A_R[x,J],\varphi_R[y,J]] \quad (9.6)$$

特に $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\varphi}$ と置けば，

$$\frac{\delta}{\delta J(y)}\varphi_R[x,J]-\frac{\delta}{\delta J(x)}\varphi_R[y,J]+i[\varphi_R[x,J],\varphi_R[y,J]]=0 \quad (9.7)$$

この式をユニタリー性条件と呼ぶ．T積の時の (8.3) 式に相当するものである．また A_R を J について n 回汎関数微分すると

$$R[A(x):\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)]$$
$$=\sum_{\mathrm{comb}} i^k \tilde{T}[\varphi(x_1')\cdots\varphi(x_k')](-i)^{n-k}T[\varphi(x_{k+1}')\cdots\varphi(x_n')] \tag{9.8}$$

さてT積に対する簡約公式

$$\int d^4y\Delta(x-y)K_y ST(x_1,\cdots,x_n,y)=[\varphi^{\mathrm{in}}(x),ST(x_1,\cdots,x_n)] \tag{9.9}$$

のエルミート共役をとると

$$\int d^4y\Delta(x-y)K_y \tilde{T}(x_1,\cdots,x_n,y)S^\dagger=-[\varphi^{\mathrm{in}}(x),\tilde{T}(x_1,\cdots,x_n)S^\dagger] \tag{9.10}$$

上の三式を組み合わせると

$$\int d^4y\Delta(x-y)K_y R(w:x_1,\cdots,x_n,y)=-i[\varphi^{\mathrm{in}}(x),R(w:x_1,\cdots,x_n)] \tag{9.11}$$

ただし

$$R(w:x_1,\cdots,x_n)=R[A(w):\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)] \tag{9.12}$$

そこで (9.11) を繰り返して用いると

$$\int d^4y_1\cdots d^4y_l\Delta(z_1-y_1)\cdots\Delta(z_l-y_l)K_{y_1}\cdots K_{y_l}R(w:x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_l)$$
$$=(-i)^l[\varphi^{\mathrm{in}}(z_1),[\cdots[\varphi^{\mathrm{in}}(z_l),R(w:x_1,\cdots,x_n)]\cdots] \tag{9.13}$$

そこで次に R を正規積の和に展開してみよう．

$$R(w:x_1,\cdots,x_n)$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\int d^4y_1\cdots d^4y_l f(w:x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_l):\varphi^{\mathrm{in}}(y_1)\cdots\varphi^{\mathrm{in}}(y_l): \tag{9.14}$$

ただし f は，$y_1,\cdots,y_l$ につき対称な関数であるとする．この式を (9.13) に代入して真空期待値をとると，

$$(-i)^l(\Phi_0,[\varphi^{\mathrm{in}}(z_1),[\cdots[\varphi^{\mathrm{in}}(z_l),R(w:x_1,\cdots,x_n)]\cdots]\Phi_0)$$
$$=\int d^4y_1\cdots d^4y_l\Delta(z_1-y_1)\cdots\Delta(z_l-y_l)f(w:x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_l) \tag{9.15}$$

ところが (9.13) によればこの式は次の表式に等しい：

$$=\int d^4y_1\cdots d^4y_l\Delta(z_1-y_1)\cdots\Delta(z_l-y_l)r(w:x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_l) \tag{9.16}$$

ただし

$$r(w:x_1,\cdots,x_n)=K_{x_1}\cdots K_{x_n}(\Phi_0,R(w:x_1,\cdots,x_n)\Phi_0) \tag{9.17}$$

従って $y_1,\cdots,y_l$ に対応する運動量が質量殻上にあれば，

$$f(w:x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_l)=r(w:x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_l) \tag{9.18}$$

そして実際には質量殻上しか効かないので

$$R(w:x_1,\cdots,x_n)$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\int d^4y_1\cdots d^4y_l r(w:x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_l)$$
$$\times:\varphi^{\rm in}(y_1)\cdots\varphi^{\rm in}(y_l): \tag{9.19}$$

特に $n=0$ と置くと，

$$A(w)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\int d^4y_1\cdots d^4y_l r(w:y_1,\cdots,y_l):\varphi^{\rm in}(y_1)\cdots\varphi^{\rm in}(y_l): \tag{9.20}$$

また $A=\varphi$ と置けば，$(\Phi_0,\varphi(x)\Phi_0)=0$ とした時に

$$\varphi(x)=\varphi^{\rm in}(x)+\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{l!}\int d^4y_1\cdots d^4y_l r(x:y_1,\cdots,y_l):\varphi^{\rm in}(y_1)\cdots\varphi^{\rm in}(y_l): \tag{9.21}$$

これは第5章§3で導入した Yang-Feldman 方程式の形式的解を与えるものである．また (9.7) 式より

$$R(x:y,x_1,\cdots,x_n)-R(y:x,x_1,\cdots,x_n)$$
$$+i\sum_{\rm comb}[R(x:x_1',\cdots,x_k'),R(y:x_{k+1}',\cdots,x_n')]=0 \tag{9.22}$$

この式の真空期待値をとり，中間に完全系 $\{\Phi^{\rm in}\}$ を挿入して簡約公式を用いると，これは $(\Phi_0,R(x:x_1,\cdots,x_n)\Phi_0)$ という関数系に対する非線形方程式となる．これも一般化されたユニタリー性条件の一つである．

T積に対する簡約公式では in と out と両方出てきたが，R積の場合には in だけしか出てこない．

第11章　くりこみ理論

今までは摂動論の最低次の計算のみを示してきたが，高次補正を計算すると必ず発散を生ずる．この発散に対して適当な解釈をすることにより有限な結果を抽き出す方法をくりこみ理論と呼ぶ．この理論の基礎となるのは実は今まで何度か述べてきたが，ラグランジアン密度を自由部分と相互作用の部分に分けるのにはどうしたら良いかという問題である．この分け方は相互作用表示の定義と関連しており，正しい分け方によって定義された相互作用表示をくりこまれた相互作用表示と呼ぶ．前章において議論したグリーン関数に対する種々の性質はくりこまれた相互作用表示において成り立ち，他の相互作用表示では必ずしも成り立たない．

この章においては，ラグランジアン，あるいはハミルトニアンの分け方が必ずしも自明ではないことを示すために，まず非相対論的量子力学における散乱理論について復習する．ここで議論される形式論は前章で与えた簡約公式に基づくS行列理論と多くの類似点を持っている．

§1　Lippmann-Schwinger の方程式

この節では通常の量子力学系に対する散乱の形式論を導入する．この理論は多くの点でグリーン関数の理論と共通点を持っている．散乱問題で大切なことはいかにして境界条件を定式化するかということである．この問題は，拙著「相対論的量子力学」において詳しく議論されているが，ここではその内容を多少順序を変えて再現する．

この節では散乱問題を Stueckelberg の因果律に基づいて定式化する．

ポテンシャルを時間の関数 $V(t)$ と見なした時に，$t<T$ において $V(t)=0$ ならば，$t<T$ においては散乱波は存在しない．

上述の原理は既に第3章§3における自由場の量子化および第5章§3における Yang-Feldman の方程式の導出において用いられているが，ここでは非

相対論的な定式化に適用する．まず次の Schrödinger 方程式を考える：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t)=\{H_0+V(t)\}\psi(t) \tag{1.1}$$

ただし簡単のために空間座標を省略してあり，$V(t)$ は次式で定義されている：

$$V(t)=\begin{cases}V, & t>T\\ 0, & t<T\end{cases} \tag{1.2}$$

$t<T$ に対しては

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t)=H_0\psi(t) \tag{1.3}$$

これは入射波に対する方程式であるので，この解を次のように書く：

$$\psi(t)=\psi_{\rm in}(t), \qquad H_0\psi_{\rm in}(t)=E\psi_{\rm in}(t) \tag{1.4}$$

しからば一般の時刻では散乱波が現れ，その方程式は

$$\psi(t)=\psi_{\rm in}(t)+\psi_{\rm scatt}(t) \tag{1.5}$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}-H_0\right)\psi_{\rm scatt}(t)=V(t)\psi(t). \tag{1.6}$$

この方程式を解くために次のグリーン関数を導入する：

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}-H_0\right)K_{\rm ret}(t,\boldsymbol{x}:t',\boldsymbol{x}')=\delta(t-t')\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \tag{1.7}$$

$$K_{\rm ret}(t,\boldsymbol{x}:t',\boldsymbol{x}')=0, \qquad t<t'. \tag{1.8}$$

しからば因果律を満たす（1.6）の解は

$$\psi_{\rm scatt}(t,\boldsymbol{x})=\int dt'd^3x'\,K_{\rm ret}(t,\boldsymbol{x}:t',\boldsymbol{x}')V(t',\boldsymbol{x}')\psi(t',\boldsymbol{x}') \tag{1.9}$$

ここで $T\to-\infty$ という極限をとれば，V の t 依存性は無くなるから

$$\psi_{\rm scatt}(t,\boldsymbol{x})=\int dt'd^3x'K_{\rm ret}(t,\boldsymbol{x}:t',\boldsymbol{x}')V(\boldsymbol{x}')\psi(t',\boldsymbol{x}'). \tag{1.10}$$

さてもし H_0 が陽に時空座標に依存しなければ

$$K_{\rm ret}(t,\boldsymbol{x}:t',\boldsymbol{x}')=K_{\rm ret}(t-t',\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{1.11}$$

従って

$$\psi(t,\boldsymbol{x})=\psi_{\rm in}(t,\boldsymbol{x})+\int dt'd^3x'K_{\rm ret}(t-t',\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')V(\boldsymbol{x}')\psi(t',\boldsymbol{x}') \tag{1.12}$$

これが散乱を支配する積分方程式であり，Yang-Feldman 方程式に相当する．そこで時間変数を消去するために

$$\psi_{\rm in}(t,\boldsymbol{x})=e^{-iEt}\psi_{\rm in}(\boldsymbol{x}), \qquad \psi(t,\boldsymbol{x})=e^{-iEt}\psi(\boldsymbol{x}) \tag{1.13}$$

と置くと，次の方程式が得られる：

$$\psi(x)=\psi_{in}(x)+\int d^3x'G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}':E)V(\boldsymbol{x}')\psi(\boldsymbol{x}') \tag{1.14}$$

ただし

$$G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}':E)=\int dt'e^{iE(t-t')}K_{ret}(t-t',\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{1.15}$$

そこで遅延グリーン関数のフーリエ表示を導入する．

$$K_{ret}(t,\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^4}\int dEd^3pe^{ipx-iEt}K(E,\boldsymbol{p}) \tag{1.16}$$

更に H_0 を次の形に制限する：

$$H_0=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \tag{1.17}$$

しからば $K(E,\boldsymbol{p})$ に対する方程式（1.7）は次の形に書ける：

$$\left(E-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right)K(E,\boldsymbol{p})=1 \tag{1.18}$$

この方程式の解で境界条件（1.8）を満たすものは後で示されるように

$$K(E,\boldsymbol{p})=\left(E-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+i\varepsilon\right)^{-1} \tag{1.19}$$

ただし ε は正の無限小の数である．$E=k^2/2m$ と置くと，(1.15)，(1.16) より

$$G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}':E)=-\left(\frac{m}{2\pi}\right)\frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{1.20}$$

従って（1.14）は次の形に書ける：

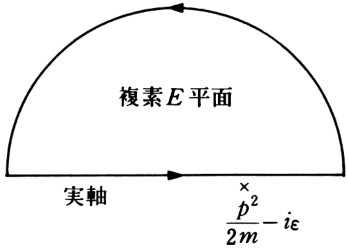
$$\psi(\boldsymbol{x})=\psi_{in}(\boldsymbol{x})-\frac{m}{2\pi}\int d^3x'\frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}V(\boldsymbol{x}')\psi(\boldsymbol{x}') \tag{1.21}$$

この式は，因果律の結果として散乱波は外向きの球面波となることを示している．さて $t-t'<0$ の時には

$$K_{ret}(t-t',\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3p\, e^{ip(x-x')}\int dE\,\frac{e^{-iE(t-t')}}{E-\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+i\varepsilon} \tag{1.22}$$

さて $-iE(t-t')=iE|t-t'|$ であるから，$\mathrm{Im}E>0$ ならばこの指数関数は $\mathrm{Im}E$ と共に指数関数的に減少するから，次の第5図のような積分径路を選べば，極の位置が半円の外側にあることを考慮して Cauchy の定理により 0 となる．従って $t-t'<0$ ならば，$K_{ret}=0$ となり，(1.8)は満たされていることが分かる．

第5図 (1.22) 式における E 積分の経路



さて方程式 (1.12) は (1.22) を用いると $\Psi=\psi$, $\Phi=\psi_{\text{in}}$ として形式的に次のように書けることは明らかであろう：

$$\Psi=\Phi+\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}V\Psi \qquad (E>0) \tag{1.23}$$

実際遅延グリーン関数のフーリエ表示 (1.22) を見れば，これが上式でエネルギー分母を与える演算子に対応していることが分かるであろう．(1.23), (1.3) より

$$(E-H_0)\Psi=V\Psi, \qquad (E-H_0)\Phi=0 \tag{1.24}$$

また束縛状態 ($E<0$) に対しては ($E-H_0$) の逆が一意的に定義されるから

$$\Psi=\frac{1}{E-H_0}V\Psi \qquad (E<0) \tag{1.25}$$

という斉次方程式が得られる．(1.23), (1.25) を Lippmann-Schwinger の方程式と総称する．(1.23) の解は入射波と外向きの球面波よりなり，それを

$$\Psi_a^{(+)}=\Phi_a+\frac{1}{E_a-H_0+i\varepsilon}V\Psi_a^{(+)} \tag{1.26}$$

と書く．数学的には入射波と内向きの球面波よりなる解を考えると便利であり，そのような状態の方程式は上の方程式で $i\varepsilon$ を $-i\varepsilon$ に置き換えて得られる．

$$\Psi_a^{(-)}=\Phi_a+\frac{1}{E_a-H_0-i\varepsilon}V\Psi_a^{(-)} \tag{1.27}$$

いずれの場合にも同じ Schrödinger 方程式の異なる境界条件の下での解である．

$$(E_a-H_0)\Psi_a^{(\pm)}=V\Psi_a^{(\pm)} \tag{1.28}$$

従って $\{\Psi_a^{(+)}\}$ と $\{\Psi_a^{(-)}\}$ とは別々に完全系をなす．(1.26) を逐次的に解くと

$$\Psi_a^{(+)}=\Phi_a+\frac{1}{E_a-H_0+i\varepsilon}\left(1+V\frac{1}{E_a-H_0+i\varepsilon}+\cdots\right)V\Phi_a$$

$$=\Phi_a+\frac{1}{E_a-H_0+i\varepsilon}\left(1-V\frac{1}{E_a-H_0+i\varepsilon}\right)^{-1}V\Phi_a \tag{1.29}$$

そこで $A^{-1}B^{-1}=(BA)^{-1}$ を用いると

$$\Psi_a^{(+)}=\Phi_a+\frac{1}{E_a-H+i\varepsilon}V\Phi_a \qquad (H=H_0+V) \tag{1.30}$$

これを Chew-Goldberger の形式解と呼ぶ．もう一つの解は

$$\Psi_a^{(-)}=\Phi_a+\frac{1}{E_a-H-i\varepsilon}V\Phi_a \tag{1.31}$$

この形式解は，実際問題を解くのには役に立たないが，S行列の一般的性質を導き出すのに大変有用であり，以下にその応用を示す．

入射波の状態が適当に規格化されているとする．すなわち，

$$(\Phi_b, \Phi_a)=\delta_{ba} \tag{1.32}$$

しからば LS 方程式と CG 形式解とを組み合わせて

$$\begin{aligned}(\Psi_b^{(+)}, \Psi_a^{(+)})&=\left(\Phi_b+\frac{1}{E_b-H+i\varepsilon}V\Phi_b, \Psi_a^{(+)}\right)\\ &=(\Phi_b, \Psi_a^{(+)})+\left(\Phi_b, V\frac{1}{E_b-H-i\varepsilon}\Psi_a^{(+)}\right)\\ &=\left(\Phi_b, \Phi_a+\frac{1}{E_a-H_0+i\varepsilon}V\Psi_a^{(+)}\right)+\left(\Phi_b,\ V\frac{1}{E_b-H-i\varepsilon}\Psi_a^{(+)}\right)\\ &=(\Phi_b, \Phi_a)+\left(\frac{1}{E_a-E_b+i\varepsilon}+\frac{1}{E_b-E_a-i\varepsilon}\right)(\Phi_b, V\Psi_a^{(+)})\\ &=(\Phi_b, \Phi_a)\end{aligned} \tag{1.33}$$

すなわち $\{\Psi^{(+)}\}$ は $\{\Phi\}$ と同様に規格直交系をなしていることが分かる．$\{\Psi^{(-)}\}$ についても同様である．従ってこの二組の完全規格直交系の間の変換行列

$$S_{ba}=(\Psi_b^{(-)}, \Psi_a^{(+)}) \tag{1.34}$$

はユニタリーである．第10章の (7.13) 式と比較すると，$\Psi^{(+)}, \Psi^{(-)}$ はそれぞれが $\Phi^{\rm in}, \Phi^{\rm out}$ に対応していることが分かる．さてユニタリー性条件は

$$S^\dagger S=SS^\dagger=1. \tag{1.35}$$

上のS行列は定義から出発して変形してゆくと次のように書ける：

$$\begin{aligned}S_{ba}&=\left(\Phi_b+\frac{1}{E_b-H-i\varepsilon}V\Phi_b, \Psi_a^{(+)}\right)\\ &=(\Phi_b, \Psi_a^{(+)})+\left(\Phi_b, V\frac{1}{E_b-H+i\varepsilon}\Psi_a^{(+)}\right)\end{aligned}$$

$$=(\Phi_b, \Phi_a)+\left(\Phi_b, \frac{1}{E_a-H_0+i\varepsilon}V\Psi_a^{(+)}\right)+\left(\Phi_b, V\frac{1}{E_b-H+i\varepsilon}\Psi_a^{(+)}\right)$$

$$=\delta_{ba}+\left(\frac{1}{E_a-E_b+i\varepsilon}+\frac{1}{E_b-E_a+i\varepsilon}\right)(\Phi_b, V\Psi_a^{(+)})$$

$$=\delta_{ba}-2\pi i\delta(E_b-E_a)(\Phi_b, V\Psi_a^{(+)}) \tag{1.36}$$

上の変形では $\Psi^{(-)}$ を Φ で表現したが，逆に $\Psi^{(+)}$ を Φ で表現すると

$$S_{ba}=\delta_{ba}-2\pi i\delta(E_b-E_a)(\Psi_b^{(-)}, V\Phi_a) \tag{1.37}$$

従って $E_b=E_a$ ならば遷移振幅 T_{ba} は次式のように対称的な形に書かれる：

$$T_{ba}=(\Phi_b, V\Psi_a^{(+)})=(\Psi_b^{(-)}, V\Phi_a) \tag{1.38}$$

次にS行列のユニタリー性を T を用いて表現してみよう．上述の T を用いて

$$T_{ba}^{+}=T_{ab}^{*}=(\Phi_a, V\Psi_b^{(+)})^{*}=(\Psi_b^{(+)}, V\Phi_a),$$

$$\begin{aligned}T_{ba}^{+}-T_{ba}&=(\Psi_a^{(+)}, V\Phi_b)-(\Phi_b, V\Psi_a^{(+)})\\&=(\Phi_b, V\Phi_a)+\left(\frac{1}{E_b-H+i\varepsilon}V\Phi_b, V\Phi_a\right)\\&\quad-(\Phi_b, V\Phi_a)-\left(\Phi_b, V\frac{1}{E_a-H+i\varepsilon}V\Phi_a\right)\\&=\left(V\Phi_b, \left(\frac{1}{E_b-H-i\varepsilon}-\frac{1}{E_b-H+i\varepsilon}\right)V\Phi_a\right)\\&=2\pi i(V\Phi_b, \delta(E_b-H)V\Phi_a)\end{aligned} \tag{1.39}$$

そこで完全系 $\{\Psi^{(-)}\}$ を上式に挿入して，

$$\begin{aligned}&=2\pi i\sum_n (V\Phi_b, \Psi_n^{(-)})\delta(E_b-E_n)(\Psi_n^{(-)}, V\Phi_a)\\&=2\pi i\sum_n T_{bn}^{+}\delta(E_b-E_n)T_{na},\end{aligned} \tag{1.40}$$

ただし

$$T_{bn}^{+}=T_{nb}^{*}=(\Psi_n^{(-)}, V\Phi_b)^{*}=(V\Phi_b, \Psi_n^{(-)}).$$

もしも $\{\Psi^{(-)}\}$ の代りに他の完全系 $\{\Psi^{(+)}\}$ を挿入したとすれば，(1.40) の代りに

$$2\pi i\sum_n T_{bn}\delta(E_b-E_n)T_{na}^{+} \tag{1.41}$$

従ってユニタリー性条件は次のように書ける：

$$\begin{aligned}T_{ba}^{+}-T_{ba}&=2\pi i\sum_n T_{bn}^{+}\delta(E_b-E_n)T_{na}\\&=2\pi i\sum_n T_{bn}\delta(E_b-E_n)T_{an}^{+}\end{aligned} \tag{1.42}$$

このユニタリー性の条件を用いると第8章§4で既に議論した光学定理を再現することができる．内容は全く同じであるが，この節で用いられた記号によ

って表現してみよう．

$a \to b$ という遷移に対する単位時間当りの確率は

$$w_{ba}=2\pi\delta(E_b-E_a)|T_{ba}|^2 \tag{1.43}$$

であるが，可能なすべての終状態について和をとると，(1.42) より

$$w_a=\sum_b w_{ba}=2\pi\sum_b \delta(E_b-E_a)|T_{ba}|^2=\frac{1}{i}(T_{aa}^{+}-T_{aa})=-2\,\mathrm{Im}\,T_{aa} \tag{1.44}$$

ところで二粒子状態 a から出発して全断面積を求めると

$$\sigma_a=\frac{\Omega}{v_{\mathrm{rel}}}w_a \tag{1.45}$$

ただし Ω は量子化の体積であり，v_{rel} は二粒子間の相対速度である．しからば (1.44) より

$$\sigma_a=-\frac{2\Omega}{v_{\mathrm{rel}}}\mathrm{Im}\,T_{aa}. \tag{1.46}$$

さて最終結果は Ω に依存しないので，$\Omega=1$ とおいてやると，ポテンシャル散乱では散乱振幅 $f(\theta)$ は次式で与えられる：

$$\begin{aligned}f(\theta)&=-\frac{m}{2\pi}\int d^3x\, e^{-ik_f x}\,V(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})\\&=-\frac{m}{2\pi}(\Phi_f,\, V\Psi_i^{(+)})\end{aligned} \tag{1.47}$$

そこで w_{fi}/v_{rel} を計算すると，一定の立体角に散乱される断面積は

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega}&=\frac{2\pi}{v}\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\int k_f{}^2dk_f\delta\left(\frac{k_f{}^2}{2m}-\frac{k_i{}^2}{2m}\right)|T_{fi}|^2 \qquad \left(v=\frac{k}{m}\right)\\&=\left(\frac{m}{2\pi}\right)^2|T_{fi}|^2\\&=|f(\theta)|^2\end{aligned} \tag{1.48}$$

となって良く知られた結果が再現される．ただし $T_{fi}=(\Phi_f,\, V\Psi_i^{(+)})$ である．また全断面積は (1.46) より

$$\sigma=-\frac{2}{v}\mathrm{Im}\,T_{aa}=-\frac{2}{v}\left(-\frac{2\pi}{m}\right)\mathrm{Im}\,f(0)=\frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}\,f(0) \tag{1.49}$$

となり，良く知られた形の光学定理を再現する．

ポテンシャル散乱の場合には波動関数の漸近形は容易に求められたが，抽象的な Lippmann-Schwinger の状態ベクトル $\Psi^{(+)}$ の漸近形は次の式により与

えられることになる：

$$\Psi_a^{(+)} \sim S\Phi_a = \Phi_a - 2\pi i\delta(E_a - H_0)V\Psi_a^{(+)} \tag{1.50}$$

この漸近形を $\Psi_a^{(+)}$ 自身と比較してみよう．

$$\Psi_a^{(+)} = \Phi_a + \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon}V\Psi_a^{(+)}$$

これから分かることは，散乱波に対して次の置換えをしてやれば漸近形が出る：

$$\frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} \to -2\pi i\delta(E_a - H_0) \tag{1.51}$$

あるいは

$$\Psi_a^{(+)} \sim \Phi_a - 2\pi i\delta(E_a - H_0)\{(E_a - H_0)\Psi_a^{(+)}\} \tag{1.52}$$

ただし $(E_a - H_0)$ を乗じてから $\delta(E_a - H_0)$ を乗ずる．この演算は前章§7における Lehmann-Symanzik-Zimmermann の漸近条件を思い出させる．(10.7.36) 式における K_y が $(E_a - H_0)$ に対応し，$\Delta(y-x)$ が $\delta(E_a - H_0)$ に対応する．また漸近形は自由粒子の方程式を満たす．

$$(E_a - H_0)S\Phi_a = 0 \tag{1.53}$$

この式は (10.7.1) 式に対応する．

(1.52) 式は簡約公式に相当し，以下で論ずる組替反応の議論で重要な役割を果たす．今までハミルトニアンを自由部分と相互作用部分とに分ける方法は一意的であると仮定してきたが，一般に束縛状態が現れると一意性が失われる．そしてこの分け方が始状態と終状態とで異なるのが組替反応である．例えば，

$$\mathrm{n} + \mathrm{d} \to \mathrm{n} + \mathrm{n}' + \mathrm{p} \tag{1.54}$$

なる反応を考えてみよう．d は重陽子を表わし，n′ はもう一つの中性子 n と区別するためにダッシュを付けてある．全ハミルトニアンは

$$H = T_\mathrm{p} + T_\mathrm{n} + T_{\mathrm{n}'} + V_\mathrm{np} + V_{\mathrm{n}'\mathrm{p}} + V_{\mathrm{nn}'} \tag{1.55}$$

ただし T は運動のエネルギー，V は二体力を表わす．始状態に対応するハミルトニアンの分解は，

$$H_0 = T_\mathrm{p} + T_\mathrm{n} + T_{\mathrm{n}'} + V_{\mathrm{n}'\mathrm{p}}, \qquad V = V_\mathrm{np} + V_{\mathrm{nn}'} \tag{1.56}$$

ここで $V_{n'p}$ を H_0 に入れなければ d が作れないからである．これに対して終状態での分解は，

$$H_0' = T_\mathrm{p} + T_\mathrm{n} + T_{\mathrm{n}'}, \qquad V' = V_\mathrm{np} + V_{\mathrm{n}'\mathrm{p}} + V_{\mathrm{nn}'} \tag{1.57}$$

そこで一般に始状態と終状態に対応して二通りの分解を導入する.

$$H=H_a+V_a=H_b+V_b \tag{1.58}$$

それぞれの分解に対応する自由な状態ベクトルは

$$(E_a-H_a)\Phi_a=(E_b-H_b)\Phi_b=0 \tag{1.59}$$

勿論 $a\to b$ なる遷移が可能となるためには $E_b=E_a$ でなければならない. この場合の遷移振幅 T_{ba} を求めてみよう. まず始状態に対応して

$$\Psi_a^{(+)}=\Phi_a+\frac{1}{E_a-H+i\varepsilon}V_a\Phi_a \tag{1.60}$$

そこで終状態に対応する漸近形を作るために次の公式を用いる:

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{1}{B}(B-A)\frac{1}{A} \tag{1.61}$$

しからば

$$\frac{1}{E_a-H+i\varepsilon}-\frac{1}{E_a-H_b+i\varepsilon}=\frac{1}{E_a-H_b+i\varepsilon}V_b\frac{1}{E_a-H+i\varepsilon} \tag{1.62}$$

すなわち

$$\Psi_a^{(+)}=\Phi_a+\frac{1}{E_a-H_b+i\varepsilon}\left(1+V_b\frac{1}{E_a-H+i\varepsilon}\right)V_a\Phi_a \tag{1.63}$$

以下 $E_a=E_b=E$ と書き, (1.51) に対応する置き換え,

$$\frac{1}{E-H_b+i\varepsilon}\to -2\pi i\delta(E-H_b) \tag{1.64}$$

をしてやると, 終状態に対応する漸近形は

$$\Psi_a^{(+)}\sim -2\pi i\left(1+V_b\frac{1}{E-H+i\varepsilon}\right)V_a\Phi_a \tag{1.65}$$

従って T_{ba} はこの漸近形と Φ_b との積で与えられる.

$$\begin{aligned}T_{ba}&=\left(\Phi_b,\left(1+V_b\frac{1}{E-H+i\varepsilon}\right)V_a\Phi_a\right)\\&=\left(\left(1+\frac{1}{E-H-i\varepsilon}V_b\right)\Phi_b,\ V_a\Phi_a\right)\\&=(\Psi_b^{(-)},\ V_a\Phi_a)\end{aligned} \tag{1.66}$$

ところで (1.38) に対応してこの場合にも T_{ba} に対して二通りの表現法がある. $\Psi_b^{(-)}$ の代りに $\Psi_a^{(+)}$ を用いて

$$T_{ba}=(\Psi_b^{(-)},\ V_a\Phi_a)=(\Phi_b,\ V_b\Psi_a^{(+)}). \tag{1.67}$$

何となれば両者の差をとると,

$$(\Psi_b^{(-)}, V_a\Phi_a)-(\Phi_b, V_b\Psi_a^{(+)})$$

$$=(\Phi_b, V_a\Phi_a)-(\Phi_b, V_b\Phi_a)$$

$$+\left(\Phi_b,\ V_b\frac{1}{E-H+i\varepsilon}V_a\Phi_a\right)-\left(\Phi_b,\ V_b\frac{1}{E-H+i\varepsilon}V_a\Phi_a\right)$$

$$=(\Phi_b, (V_a-V_b)\Phi_a)$$

$$=(\Phi_b, (H_b-H_a)\Phi_a)$$

$$=(E_b-E_a)(\Phi_b, \Phi_a)=0$$

従って (1.67) の二通りの表現は等しいことが分かる.

§2　くりこまれた相互作用表示

第7章において相互作用表示におけるS行列の共変的摂動論による計算法を与えた. 相互作用表示を定義するためには, ハミルトニアン, あるいはラグランジアンを自由部分と相互作用部分とに分解しなければならない. 我々はこの分解法は自明なことと考えてきたが, 前節の組替反応の議論から明らかなようにこの分解は一意的ではない. 摂動論の最低次ではあまり問題にはならなかったが, この分解法の違いは高次補正を計算する時に重要な意義を持つことになる. そこでこの分解法を確定するためには幾つかの条件を設定する. これらの条件をくりこみ条件と呼び, この条件を満たす分解により定義された相互作用表示をくりこまれた相互作用表示と呼ぶ. 今まではっきり述べていなかったが, 第10章で導いた Gell-Mann-Low の関係式やそれと関連している漸近条件等が成立するのは, 実はこのくりこまれた相互作用表示においてである. くりこみのもう一つの面, そして通常はこの面のみが強調されるのであるが, それは高次補正に現れる発散をうまく消去しうるということである. それにより戦後 QED の大発展があった. このような方法で発散を除去しうる理論はくりこみ可能であると呼ぶが, このくりこみ可能性という性質は一つの指導原理に昇格し, 最近のゲージ理論発展の重要な動機となった.

ここでは再びハミルトニアンの分解の問題に戻る.

1)　全ハミルトニアンの固有状態として次のような二組の完全規格直交系が存在する:

$$\{\Psi_a^{(+)}\}\quad および\quad \{\Psi_a^{(-)}\} \tag{2.1}$$

相対論的量子力学では更に四元運動量の固有状態であって

$$P_\mu \Psi_a^{(\pm)} = (p_\mu)_a \Psi_a^{(\pm)} \tag{2.2}$$

そしてS行列要素は次式で与えられる：

$$S_{ba} = (\Psi_b^{(-)}, \Psi_a^{(+)}) \tag{2.3}$$

このS行列要素の表式から明らかなように，この二組の完全系は

$$\{\Phi_a^{\text{in}}\} \quad および \quad \{\Phi_a^{\text{out}}\} \tag{2.4}$$

と同じものであると考えて良い．

2) 場の理論においては，真空状態 Φ_0 と安定な一粒子状態 Φ_α とは条件

$$\Phi_0^{\text{in}} = \Phi_0^{\text{out}}, \qquad \Phi_\alpha^{\text{in}} = \Phi_\alpha^{\text{out}} \tag{2.5}$$

とを満たす．この条件をS行列で表わせば，

$$S\Phi_0 = \Phi_0, \qquad S\Phi_\alpha = \Phi_\alpha \tag{2.6}$$

ただし，Φ_0 と Φ_α とは (2.5) により in と out とを区別しないで記しており，上の (2.5) あるいは (2.6) がくりこみ条件と呼ばれる．

さて真空に対する条件は第7章の (4.11) 式により満たされるから，すべての泡グラフを落としてS行列を定義することを意味する．このような条件を満たすように相互作用表示を定義することになるが，これは結果として次の二種類のくりこみによって種々の物理量の再解釈を導入することを必要とする．

質量のくりこみ

場の理論ではすべての素粒子は裸の状態にはなく，常に自己場を伴っている．例えば，古典論の範囲内でも荷電粒子はその周囲にクーロン場を伴っている．従って電子を考えた場合に，(2.6) の条件は自己場を伴った電子に対して成り立つべきで，裸の電子に対して成り立つのではない．そして自己場の存在のために電子の質量は，いわゆる自己エネルギー δm だけ増加する．従って観測にかかる電子質量は初めに与えられた質量 m から $m+\delta m$ に変更される．m を力学的質量，$m+\delta m=m_{\text{obs}}$ を観測質量と呼ぶことにする．そこで一電子状態は m_{obs} という質量を持った状態であると解釈し，(2.6) 式より自己エネルギー δm を決めることにする．すなわち，m を与えられた質量と考えずに m_{obs} を与えられた質量と考えることにする．δm を質量の中にとり入れているという意味で，この再解釈を質量のくりこみと呼ぶ．

荷電のくりこみ

第7章で述べたように真空偏極という現象の存在により真空は場の理論においては電媒質のように振舞う．従って真空の電媒定数を ε とすると，二電荷 e_1 と e_2 との間のクーロン・ポテンシャルは，r が十分大きい時に

$$V=\frac{e_1e_2}{\varepsilon}\left(\frac{1}{4\pi r}\right) \tag{2.7}$$

で与えられる．しかしながら通常真空の電媒定数は1となるように規格化しているので，

$$V=(e_1)_{\mathrm{obs}}(e_2)_{\mathrm{obs}}\left(\frac{1}{4\pi r}\right) \tag{2.8}$$

の如く与えられる．(2.7) と (2.8) とを比較すると

$$(e_1)_{\mathrm{obs}}=\frac{e_1}{\sqrt{\varepsilon}},\qquad (e_2)_{\mathrm{obs}}=\frac{e_2}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{2.9}$$

$e)_{\mathrm{obs}}$ が実験値である． 従って裸の荷電 e ではなくて $(e)_{\mathrm{ob\ \varepsilon}}$ を与えられた荷電と再解釈しなければならない．このように荷電の定義には真空の電媒定数 ε がとり入れられているので，これを荷電のくりこみと呼ぶ．

くりこみには質量のような加法的くりこみと荷電のような乗法的くりこみとがある．また自己エネルギー δm や電媒定数 ε を QED で計算すると発散する．

以上で述べたのは自己エネルギーとか電媒定数のような具体的な量と関係したくりこみであったが，もう少し抽象的なくりこみ条件として場の演算子のくりこみという操作が存在する．これは既に第10章で要請されたことであり，方程式 (10.7.22) で表わされているが，一体の波動関数が相互作用の導入によって変化しない，すなわち規格化が変わらないという条件がある．この条件の意味するところについては後の節で詳しく説明する．

§3 質量のくりこみ

一電子状態に始まり一電子状態に終る Feynman 図形を自己エネルギー・グラフと呼ぶ．特に電子線を一本切ることにより二つの非連結図形に分けられないものを既約自己エネルギー・グラフと呼ぶ．しからざるものを可約と呼ぶ．そこで四元運動量 p の電子が入り，同じ状態の電子が出てゆく場合のS行列要素を考えると，



既約自己エネルギー・グラフ　　可約自己エネルギー・グラフ

$$\langle p|S|p\rangle=\langle p|p\rangle+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\langle p|T[\mathscr{H}_{\rm int}(x_1)\cdots\mathscr{H}_{\rm int}(x_n)]|p\rangle_{\rm conn} \tag{3.1}$$

ただしここでは泡グラフの寄与を落とすために第二項以下では，泡グラフを落とした連結部分の寄与のみを残すことにする．添字 conn は，$x_1,\cdots,x_n$ のいずれの点ともつながっていない泡グラフを落とすことを意味する．条件 (2.6) は，上の (3.1) の右辺第二項以下は消えることを要求する．さて質量として $m_{\rm obs}$ を自由部分に採用するとすれば，m との差 δm は相互作用部分に入れられるから，まず質量のくりこみだけを考えるという近似では

$$\mathscr{H}_{\rm int}=-ie\overline{\psi}\gamma_\mu\psi\cdot A_\mu-\delta m\overline{\psi}\psi \tag{3.2}$$

と書くことができる．そこで e^2 の次数でS行列要素を計算するが，δm は e^2 の次数であると考えると，Feynman-Dyson の規則により

$$\langle p'|S^{(2)}|p\rangle=\int d^4x\langle p'|\overline{\psi}(x)|0\rangle\Big(i\delta m^{(2)}+e^2\int d^4y\gamma_\mu S_F(y)\gamma_\mu D_F(y)e^{-ip\cdot y}\Big)\langle 0|\psi(x)|p\rangle \tag{3.3}$$

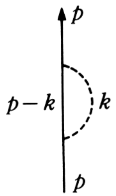
ただしここでは上に示した既約自己エネルギー・グラフの中で最初の二つを考慮している．三番目のものは e^4 の次数になるからである．そこで

$$\Sigma^{*(2)}(p)=ie^2\int d^4y\gamma_\mu S_F(y)\gamma_\mu D_F(y)e^{-ip\cdot y} \tag{3.4}$$

を導入する．ただし上の計算では $\alpha=1$ に対応する Fermi-Feynman のゲージで計算をしている．一般にすべての既約自己エネルギー・グラフからの寄与の和を本義自己エネルギー演算子，あるいは質量演算子と呼ぶ．しからば

$$\langle p'|S^{(2)}|p\rangle=i\int d^4x\langle p'|\overline{\psi}(x)|0\rangle(\delta m^{(2)}-\Sigma^{*(2)}(p))\langle 0|\overline{\psi}(x)|p\rangle. \tag{3.5}$$

くりこみ条件は上の表式が消えることを要求する．**以下 $m_{\rm obs}$ を単に m と書くと**



$$\Sigma^{*(2)}(p)=\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\gamma_\mu\frac{i(p-k)\cdot\gamma-m}{(p-k)^2+m^2-i\varepsilon}\gamma_\mu\frac{1}{k^2-i\varepsilon}$$
$$=\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{-2i(p-k)\cdot\gamma-4m}{(p-k)^2+m^2-i\varepsilon}\cdot\frac{1}{k^2-i\varepsilon}$$
$$=\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\int_0^1 dx\frac{-2i(p-k)\cdot\gamma-4m}{(k^2+xp^2-2xp\cdot k+xm^2-i\varepsilon)^2} \tag{3.6}$$

ただし $\gamma_\mu\cdot\gamma_\mu=4$, $\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\mu=-2\gamma_\lambda$ を用いている．ここで変数変換

$$k\to k'=k-xp \tag{3.7}$$

を導入して，(3.6) を書き直し，k' につき奇数次の項を落とすと，

$$\Sigma^{*(2)}(p)=\frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\int d^4k'\frac{2i(1-x)p\cdot\gamma+4m}{(k'^2+x(1-x)p^2+xm^2-i\varepsilon)^2} \tag{3.8}$$

さて $p^2=-(ip\cdot\gamma)^2$ であるから，$\Sigma^*(p)$ は $ip\cdot\gamma$ の関数と見なせるのでこれを $(ip\cdot\gamma+m)$ の巾級数に展開して，

$$\Sigma^{*(2)}(p)=A+B(ip\cdot\gamma+m)+C(p) \tag{3.9}$$

と書く．ただし $C(p)$ は $(ip\cdot\gamma+m)$ の二次以上を全部加えたものである．従って A は，$\Sigma^{*(2)}(p)$ において $ip\cdot\gamma=-m$ と置けば得られる．すなわち，

$$A=\frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\,2m(1+x)\int d^4k'\frac{1}{(k'^2+x^2m^2-i\varepsilon)^2} \tag{3.10}$$

この k' 積分を実行するために

$$\frac{1}{(k'^2+x^2m^2-i\varepsilon)^2}=2\lim_{\Lambda\to\infty}\int_{m^2}^{\Lambda^2}\frac{x^2dM^2}{(k'^2+x^2M^2-i\varepsilon)^3} \tag{3.11}$$

と置き，これを (3.10) に代入して k' 積分を実行すると，

$$A=\frac{2\pi^2e^2m}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx(1+x)\int_{m^2}^{\Lambda^2}\frac{dM^2}{M^2}$$
$$=\frac{3}{2\pi}\alpha m\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)\qquad\left(\alpha=\frac{e^2}{4\pi}\right) \tag{3.12}$$

さて (3.5) に戻り (2.8.25), (2.8.26) の波動関数を用いると

$$\langle p'|S^{(2)}|p\rangle=\frac{i(2\pi)^4}{V}\delta^4(p'-p)\bar{u}(p')(\delta m^{(2)}-\Sigma^{*(2)}(p))u(p) \tag{3.13}$$

$u(p)$ に対する Dirac 方程式により上式で $ip\cdot\gamma$ を $-m$ で置き換えることができる．従って (3.13) が消えるという条件は次のように書くことができる．

$$\delta m^{(2)}=A \tag{3.14}$$

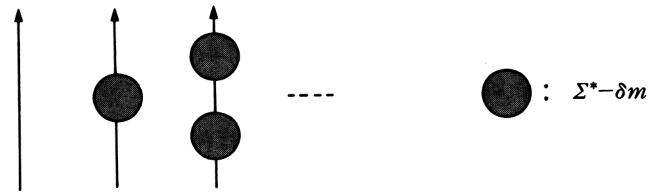
これが e^2 の次数での電子の自己エネルギーを表わし，(3.12) から明らかなように $\Lambda\to\infty$ の極限で対数的に発散している．しかしここで強調したいことは，くりこみ条件 (2.6) は (3.2) のような形の相互作用部分の選択を要求することである．

§4 場の演算子のくりこみ

前節で導入した展開 (3.9) の A については (3.14) でその意味が分かったが，B についてはどうであろうか？ そこで一体の波動関数の規格化が相互作用の導入により変化しないという条件を書き下してみよう．

$$\langle 0|T[\psi(x)U(\infty,-\infty)]_{\rm conn}|p\rangle=\langle 0|\psi(x)|p\rangle \tag{4.1}$$

この左辺に対応する Feynman 図形は次に与えられる．



ここに Σ^* は δm 以外のすべての既約自己エネルギー・グラフの寄与である．さて (4.1) の左辺の寄与は次のような級数によって与えられることは上の図から明らかであろう：

$$\Big(1-(\Sigma^*(p)-\delta m)\frac{1}{ip\cdot\gamma+m}+(\Sigma^*(p)-\delta m)\frac{1}{ip\cdot\gamma+m}(\Sigma^*(p)-\delta m)\frac{1}{ip\cdot\gamma+m}+\cdots\Big)u(p)$$
$$=\Big(\frac{ip\cdot\gamma+m}{ip\cdot\gamma+m+\Sigma^*(p)-\delta m}\Big)u(p) \tag{4.2}$$

さてここまでの議論は，相互作用部分が (3.2) の形で与えられるという仮定に基づいている．そこで Σ^* を (3.9) のように展開したとすると，上の (4.2) 式では $u(p)$ があるために $ip\cdot\gamma=-m$ と置くことができるので

$$\lim_{ip\cdot\gamma+m\to 0}\frac{ip\cdot\gamma+m}{ip\cdot\gamma+m+\sum^*(p)-\delta m}=\frac{1}{1+B} \tag{4.3}$$

これは $B=0$ でない限り1に等しくなく，従って (4.1) を満たすことはできな

い．そこで規格化が変わらないという条件がどこから出てきたかを考えてみると，もともと Heisenberg 表示での演算子に対する漸近条件(10.7.3)から出てきたものであり，この時に用いた演算子が初めにあった演算子そのものであるということはどこにも仮定されていない．そこで漸近条件を満たすHeisenberg 演算子はラグランジアンに現れる元の Heisenberg 演算子とは規格化が異なっていると考えることができる．漸近条件を満たす演算子をくりこまれた場の演算子と呼び，添字 r を付けることにして，次の乗法的くりこみを仮定する．

$$\boldsymbol{\psi}(x)=Z_2^{1/2}\boldsymbol{\psi}(x)_r,\quad \overline{\boldsymbol{\psi}}(x)=Z_2^{1/2}\overline{\boldsymbol{\psi}}(x)_r,\quad \boldsymbol{A}_\mu(x)=Z_3^{1/2}\boldsymbol{A}_\mu(x)_r \tag{4.4}$$

このような乗法的くりこみは既に荷電のくりこみに現れており，実は上述の演算子のくりこみと密接な関係があることが後に明らかにされる．

そこで一般のゲージに戻り，全ラグランジアンをくりこまれた演算子によって表現してみよう．この際に本来演算子は Heisenberg 演算子なので太字を用いるべきであるが，細字を用いても混乱はないであろう．

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-Z_2\overline{\psi}_r[\gamma_\mu\cdot(\partial_\mu-ieZ_3^{1/2}A_{\mu r})+m-\delta m]\psi_r\\&-\frac{1}{4}Z_3F_{\mu\nu r}F_{\mu\nu r}-\frac{1}{2\alpha}Z_3(\partial_\mu A_{\mu r})^2\end{aligned} \tag{4.5}$$

また $m-\delta m$ は本来は $m_{\text{obs}}-\delta m$ と書くべきであるが，既に述べたように m_{obs} を簡単のために m と書いているのである．そして (4.5) を次のように自由部分と相互作用部分とに分ける．

$$\mathscr{L}_{\text{f}}=-\overline{\psi}_r(\gamma_\mu\cdot\partial_\mu+m)\psi_r-\frac{1}{4}F_{\mu\nu r}F_{\mu\nu r}-\frac{1}{2\alpha_r}(\partial_\mu A_{\mu r})^2, \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{int}}=&(1-Z_2)\overline{\psi}_r(\gamma_\mu\cdot\partial_\mu+m)\psi_r+(1-Z_3)\frac{1}{4}F_{\mu\nu r}F_{\mu\nu r}\\&+ieZ_2Z_3^{1/2}A_{\mu r}\cdot\overline{\psi}_r\gamma_\mu\psi_r+Z_2\delta m\overline{\psi}_r\psi_r\end{aligned} \tag{4.7}$$

ただし α_r はくりこまれたゲージ・パラメターであり，ゲージはくりこみという操作により変わってしまうことになる．上の分割に対応する相互作用表示が**くりこまれた相互作用表示**である．ただしくりこまれた α_r は次式で定義される：

$$\alpha_r=\alpha Z_3^{-1} \tag{4.8}$$

以下の議論ではくりこまれた相互作用表示しか使わないので簡単のために添字 r を落とすことにする．摂動論では種々のくりこみ定数が e^2 の巾級数に展開されると考えているので，次の展開を仮定する：

$$\delta m=\delta m^{(2)}+\delta m^{(4)}+\cdots, \tag{4.9}$$

$$Z_2=1+Z_2^{(2)}+\cdots, \tag{4.10}$$

$$Z_3=1+Z_3^{(2)}+\cdots \tag{4.11}$$

この相互作用表示では相互作用が場の演算子の微分を含むので Matthews の定理を援用することにして，S行列を次式で与える．

$$S=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n T^*[\mathscr{L}_{\rm int}(x_1)\cdots\mathscr{L}_{\rm int}(x_n)]_{\rm conn} \tag{4.12}$$

この新しい相互作用表示で前節の議論をやり直してみよう．

$$\langle p'|S^{(2)}|p\rangle=\int d^4x\langle p'|\overline{\psi}(x)|0\rangle\mathscr{S}(p)\langle 0|\psi(x)|p\rangle \tag{4.13}$$

この $\mathscr{S}(p)$ は (3.5) における $i(\delta m^{(2)}-\Sigma^{*(2)}(p))$ に相当する量で次式で与えられる:

$$\mathscr{S}(p)=iZ_2\delta m+i(1-Z_2)(ip\cdot\gamma+m)-i\Sigma^*(p) \tag{4.14}$$

ただし最低次の近似では Σ^* は

$$\Sigma^*(p)=ie^2Z_2^2Z_3\int d^4y\gamma_\mu S_F(y)\gamma_\mu D_F(y)e^{-ip\cdot y} \tag{4.15}$$

であり，Z_2, Z_3 を1で置き換えれば前節で与えたものと一致する．そこで一般に，

$$\Sigma^*(p)=A+B(ip\cdot\gamma+m)+C(p) \tag{4.16}$$

と展開すれば，(4.13)が消え，一粒子波動関数の規格化が変わらないことから

$$Z_2\delta m=A, \qquad 1-Z_2=B \tag{4.17}$$

このくりこみ条件によって $\delta m, Z_2$ が決められることになる．その結果として

$$\mathscr{S}(p)=-iC(p)\equiv -i\Sigma^*_{\rm ren}(p) \tag{4.18}$$

この式がくりこまれた質量演算子 $\Sigma^*_{\rm ren}$ を定義する．$A^{(2)}$ と $B^{(2)}$ とは対数的に発散するが，$C^{(2)}(p)$ は有限である．

§5　くりこまれた伝播関数

電子の伝播関数はくりこまれた相互作用表示にて

$$S_F(x-y)=\langle 0|T[\psi(x)\overline{\psi}(y)]|0\rangle=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{ip\cdot(x-y)}S_F(p),$$

$$S_F(p)=\frac{1}{ip\cdot\gamma+m} \tag{5.1}$$

で定義される．高次補正の入った伝播関数はくりこまれた Heisenberg 表示で

$$S'_F(x-y)=\langle 0|T[\psi(x)\bar{\psi}(y)]|0\rangle$$
$$=\frac{\langle 0|T^*[\psi(x),\bar{\psi}(y),U(\infty,-\infty)]|0\rangle}{\langle 0|U(\infty,-\infty)|0\rangle} \tag{5.2}$$

ただし再びくりこまれた相互作用表示において

$$U(\infty,-\infty)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n T^*[\mathscr{L}_{\rm int}(x_1)\cdots\mathscr{L}_{\rm int}(x_n)]. \tag{5.3}$$

さて S'_F のフーリエ変換は，Feynman 図形に関する考察から

$$S'_F(p)=S_F(p)-S_F(p)\Sigma^*_{\rm ren}(p)S_F(p)+\cdots$$
$$=S_F(p)-S_F(p)\Sigma^*_{\rm ren}(p)S'_F(p) \tag{5.4}$$

この関係式を Dyson の方程式と呼び，その解は

$$S'_F(p)=S_F(p)[1+\Sigma^*_{\rm ren}(p)S_F(p)]^{-1}=[ip\cdot\gamma+m+\Sigma^*_{\rm ren}(p)]^{-1}. \tag{5.5}$$

ところで $\Sigma^*_{\rm ren}(p)$ は $(ip\cdot\gamma+m)$ の二次以上の項の和であるから

$$ip\cdot\gamma+m\to 0 \quad \text{に対して} \quad (ip\cdot\gamma+m)S'_F(p)\to 1 \tag{5.6}$$

これはくりこまれた伝播関数の大切な性質である．さて§3の計算，持に(3.8)において Feynman のパラメター x から

$$m^2=(1-x)M^2 \tag{5.7}$$

へ変数変換をしてやると，e^2 の次数での $S'_F(p)$ は次の形に書かれる：

$$S'_F(p)=S_F(p)-S_F(p)\Sigma^{*(2)}_{\rm ren}(p)S_F(p)$$
$$=\frac{1}{ip\cdot\gamma+m}+\frac{e^2}{16\pi^2}\int_m^{\infty}\frac{dM}{M^3(M^2-m^2)}\left[\frac{(M+m)^2(M^2+m^2-4mM)}{ip\cdot\gamma+M-i\varepsilon}\right.$$
$$\left.+\frac{(M-m)^2(M^2+m^2+4mM)}{ip\cdot\gamma-M+i\varepsilon}\right] \tag{5.8}$$

この積分は $M=m$ で発散する．このような時には適当な方法で質量殻の近くでの近似を改良しなければならない．これについては第19章のくりこみ群の方法の所で議論する．しかしいわゆる紫外発散は完全に無くなっている．

次に電磁場の伝播関数について調べてみよう．ここではくりこまれた Fermi-Feynman のゲージ $\alpha_r=1$ を考える．相互作用表示では

$$\delta_{\mu\nu}D_F(x-y)=\langle 0|T[A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle=\frac{-i}{(2\pi)^4}\delta_{\mu\nu}\int d^4k\, e^{ik\cdot(x-y)}D_F(k) \tag{5.9}$$

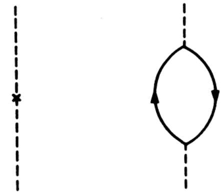
高次補正を入れてくりこまれた Heisenberg 表示で考えると $\delta_{\mu\nu}$ には比例しな

い.

$$D'_{F\mu\nu}(x-y)=\langle 0|T[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle$$

$$=\frac{\langle 0|T^*[A_\mu(x)A_\nu(y)U(\infty,-\infty)]|0\rangle}{\langle 0|U(\infty,-\infty)|0\rangle} \tag{5.10}$$

そこでまず e^2 までの補正を計算してみよう．この時，考慮すべき図形は



相互作用ラグランジアンの中でこの計算に必要な項は

$$\frac{1}{4}(1-Z_3)F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+ieZ_2Z_3^{1/2}A_\mu\cdot\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$$

であり，第一項が第一の図形に，第二項の繰り返しが第二の図形に寄与する．しかしながら e^2 の次数では第二項の Z_2, Z_3 は1に等しいとして良い．

$$\begin{aligned}D'_{F\mu\nu}(x-y)=&\delta_{\mu\nu}D_F(x-y)\\&-e^2\int d^4x'd^4x''D_F(x-x')D_F(x''-y)\\&\times\mathrm{Tr}[\gamma_\mu S_F(x'-x'')\gamma_\nu S_F(x''-x')]\\&+\frac{i}{2}(1-Z_3)\int d^4x'\left(\delta_{\mu\sigma}\frac{\partial}{\partial x'_\rho}-\delta_{\mu\rho}\frac{\partial}{\partial x'_\sigma}\right)D_F(x-x')\\&\times\left(\delta_{\nu\sigma}\frac{\partial}{\partial x'_\rho}-\delta_{\nu\rho}\frac{\partial}{\partial x'_\sigma}\right)D_F(y-x')\end{aligned} \tag{5.11}$$

この式をフーリエ変換すると

$$\begin{aligned}D'_{F\mu\nu}(k)=&\frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2-i\varepsilon}-\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{(k^2-i\varepsilon)^2}\\&\times\int d^4p\,\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\frac{1}{ip\cdot\gamma+m-i\varepsilon}\gamma_\nu\frac{1}{i(p-k)\cdot\gamma+m-i\varepsilon}\right]\\&+(1-Z_3)\frac{1}{k^2-i\varepsilon}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-i\varepsilon}\right)\end{aligned} \tag{5.12}$$

この第二項は次の表式のフーリエ変換である：

$$\langle 0|T^*[j_\mu(x),j_\nu(y)]|0\rangle$$

そしてこの式は形式的に次の条件を満たす：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle 0|T^*[j_\mu(x), j_\nu(y)]|0\rangle = 0 \tag{5.13}$$

この条件は運動量空間では次式で与えられる：

$$k_\mu \int d^4p\, \mathrm{Tr}[\cdots] = 0 \tag{5.14}$$

そこでこの積分を $f_{\mu\nu}(k)$ と書くことにすれば，その一般形は

$$f_{\mu\nu}(k) = \delta_{\mu\nu} f(k^2) - k_\mu k_\nu g(k^2) \tag{5.15}$$

そして (5.14) という条件から

$$k_\mu f_{\mu\nu}(k) = k_\nu[f(k^2) - k^2 g(k^2)] = 0 \tag{5.16}$$

従って

$$f_{\mu\nu}(k) = (k^2\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) g(k^2) \tag{5.17}$$

次にトレースを計算すると

$$\mathrm{Tr} = \frac{4[\delta_{\mu\nu}(p^2 - p\cdot k + m^2) - 2p_\mu p_\nu + p_\mu k_\nu + p_\nu k_\mu]}{(p^2 + m^2 - i\varepsilon)[(p-k)^2 + m^2 - i\varepsilon]}$$

従って

$$f_{\mu\nu}(k) = 4\int d^4p \frac{\delta_{\mu\nu}(p^2 - p\cdot k + m^2) - 2p_\mu p_\nu + p_\mu k_\nu + p_\nu k_\mu}{(p^2 + m^2 - i\varepsilon)[(p-k)^2 + m^2 - i\varepsilon]}$$

$$= 4\int_0^1 dx \int d^4p \frac{\delta_{\mu\nu}(p^2 - p\cdot k + m^2) - 2p_\mu p_\nu + p_\mu k_\nu + p_\nu k_\mu}{[p^2 + m^2 + x(k^2 - 2p\cdot k) - i\varepsilon]^2}$$

そこで次の変数変換を導入する：

$$p \to p' = p - xk \tag{5.18}$$

しからば

$$f_{\mu\nu}(k) = 4\int_0^1 dx \int d^4p' \frac{N}{[p'^2 + m^2 + x(1-x)k^2 - i\varepsilon]^2}, \tag{5.19}$$

$$N = \delta_{\mu\nu}p'^2 - 2p'_\mu p'_\nu + \delta_{\mu\nu}[m^2 + x(1-x)k^2] - 2x(1-x)(\delta_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu) \tag{5.20}$$

この中で最後の項以外は $\delta_{\mu\nu}$ に比例する項しか出さないので，(5.17)と一致するためには最後の項のみが生き残ると考えざるを得ない．従って，

$$f_{\mu\nu}(k) = -8(\delta_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)\int_0^1 dx\, x(1-x) \int \frac{d^4p}{[p^2 + m^2 + x(1-x)k^2 - i\varepsilon]^2}, \tag{5.21}$$

$$\frac{1}{[p^2 + m^2 + x(1-x)k^2 - i\varepsilon]^2}$$

$$=\frac{1}{(p^2+m^2-i\varepsilon)^2}+\left(\frac{1}{[p^2+m^2+x(1-x)k^2-i\varepsilon]^2}-\frac{1}{(p^2+m^2-i\varepsilon)^2}\right)$$

従って $D'_{F\mu\nu}$ は

$$D'_{F\mu\nu}(k)=\frac{1}{k^2-i\varepsilon}+\frac{8ie^2}{(2\pi)^4}\cdot\frac{k^2\delta_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu}{(k^2-i\varepsilon)^2}\int_0^1 x(1-x)\,dx$$
$$\times\int d^4p\left(\frac{1}{[p^2+m^2+x(1-x)k^2-i\varepsilon]^2}-\frac{1}{(p^2+m^2-i\varepsilon)^2}\right)$$
$$+\frac{k^2\delta_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu}{(k^2-i\varepsilon)^2}\left[1-Z_3+\frac{8ie^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 x(1-x)\,dx\int\frac{d^4p}{(p^2+m^2-i\varepsilon)^2}\right] \tag{5.22}$$

さて Z_3 を決めるために電子の場合の (5.6), あるいは

$$S_F(p)\Sigma^*_{\rm ren}(p)u(p)=0 \tag{5.23}$$

に対応して次の条件を置く．ただし e_ν は横波光子の偏極ベクトルである．

$$D_F(k)\Pi^*_{\rm ren}(k)_{\mu\nu}e_\nu=0 \tag{5.24}$$

Π^* は光子の本義自己エネルギー演算子，あるいは偏極演算子と呼ばれ，電子の場合の Σ^* に対応する．従って Π^* は，電子の場合の Σ^* に対する Dyson の方程式 (5.4) と同様に次の式によって定義される:

$$D'_{F\mu\nu}(k)=\delta_{\mu\nu}D_F(k)-D_F(k)\Pi^*_{\rm ren}(k)_{\mu\nu}D_F(k)+\cdots$$
$$=\delta_{\mu\nu}D_F(k)-D_F(k)\Pi^*_{\rm ren}(k)_{\mu\lambda}D'_{F\lambda\nu}(k) \tag{5.25}$$

e^2 の次数では

$$\Pi^*_{\rm ren}(k)_{\mu\nu}=-\frac{8ie^2}{(2\pi)^4}(\delta_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu)\int_0^1 x(1-x)dx$$
$$\times\int d^4p\left(\frac{1}{[p^2+m^2+x(1-x)k^2-i\varepsilon]^2}-\frac{1}{(p^2+m^2-i\varepsilon)^2}\right)$$
$$+\frac{8ie^2}{(2\pi)^4}(\delta_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu)$$
$$\times\left[1-Z_3+\frac{8ie^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 x(1-x)\,dx\int\frac{d^4p}{(p^2+m^2-i\varepsilon)^2}\right] \tag{5.26}$$

さて一光子状態では $k^2=0$, $k\cdot e=0$ を考慮すると，(5.24) の条件は，$(\delta_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu)$ の係数が，$k^2=0$ で 0 となることを要求する．(5.26)の第一項はこの条件を満たすから，この条件は第二項が 0 となることを意味する．すなわち，

$$Z_3=1+\frac{8ie^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 x(1-x)\,dx\int\frac{d^4p}{(p^2+m^2-i\varepsilon)^2} \tag{5.27}$$

しからば Feynman 積分を遂行すると

$$\Pi^*_{\mathrm{ren}}(k)_{\mu\nu}=\frac{e^2}{2\pi^2}(\delta_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu)\int_0^1 x(1-x)\ln\left(\frac{m^2}{m^2+x(1-x)k^2-i\varepsilon}\right)dx \quad (5.28)$$

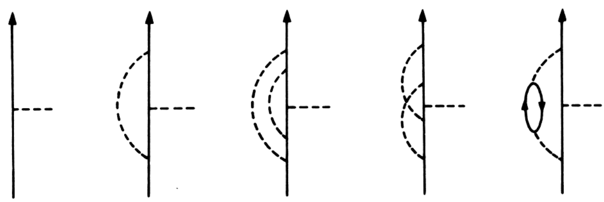
特に $|k^2|\ll m^2$ の時には

$$\Pi^*_{\mathrm{ren}}(k)_{\mu\nu}\approx\frac{e^2}{60\pi^2}(\delta_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu)\left(-\frac{k^2}{m^2}\right) \quad (5.29)$$

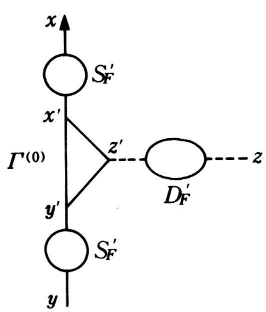
ここで見たように，くりこみ条件 (5.24) により Z_3 が (5.27) のように一意的に定まり，かつ D'_F は発散無しに与えられることになる．

§6　頂点関数のくりこみ

伝播関数についてはくりこまれた表示では有限になることが分かった．しかしながらもう一つ乗法的くりこみをしなければ有限にならないものが残っている．これが頂点関数であり，そのくりこみについて考えることにする．今まで本義自己エネルギー・グラフについて調べたが，これはみな二点関数，あるいは伝播関数に関係していた．そこで次のような頂点 γ_μ の補正について考える．



これは三点関数に対応する Feynman 図形から自己エネルギー・グラフを包含した伝播関数を除いた図形で頂点関数の補正を表わす図形である．この補正により頂点 γ_μ が頂点関数 $\Gamma^{(0)}_\mu$ で置き換えられる．この事情は S_F, D_F が S'_F,



$D'_{F\mu\nu}$ で置き換えられたのと同じ事情である．従って完全な三点関数に対応する Feynman 図形は前ページのように書くことができる．すなわち一般の三点関数は3個の伝播関数と1個の頂点関数との積として表わすことができる．この図形に対応して

$$\begin{aligned}&\langle 0|T^*[\psi(x),\overline{\psi}(y),A_\nu(z)]|0\rangle\\&=\frac{\langle 0|T^*[\psi(x),\overline{\psi}(y),A_\nu(z),U(\infty,-\infty)]|0\rangle}{\langle 0|U(\infty,-\infty)|0\rangle}\\&=-eZ_2Z_3^{1/2}\int d^4x'd^4y'd^4z'S'_F(x-x')\Gamma^{(0)}_\mu(x',y'\,;z')S'_F(y'-y)D'_{F\mu\nu}(z'-z)\end{aligned}\tag{6.1}$$

という表式を書き下すことができる．ここに Heisenberg 演算子はくりこまれたものであり，相互作用表示もくりこまれたものである．くりこまれた相互作用表示では伝播関数は自動的にくりこまれたものになったが，頂点関数についてはそうはなっていない．さて最低次では

$$\Gamma^{(0)}_\mu(x,y\,;z)=\gamma_\mu\delta^4(x-z)\delta^4(y-z)\tag{6.2}$$

となる．一般に $\Gamma^{(0)}_\mu$ は，$(x-z)$ と $(y-z)$ との関数になるのでそのフーリエ表示を

$$\Gamma^{(0)}_\mu(x,y;z)=\frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4pd^4q\,e^{ip\cdot(x-z)+iq\cdot(z-y)}\Gamma^{(0)}_\mu(p,q)\tag{6.3}$$

のように定義する．しからば (6.2) に対応して最低次では

$$\Gamma^{(0)}_\mu(p,q)=\gamma_\mu\tag{6.4}$$

そこで高次補正の入った頂点関数を次式により再規格化する：

$$\Gamma_\mu(p,q)=Z_1\Gamma^{(0)}_\mu(p,q),\tag{6.5}$$

$$\overline{u}(p)\Gamma_\mu(p,p)u(p)=\overline{u}(p)\gamma_\mu u(p)\tag{6.6}$$

ただし勿論 (6.6) では p は電子の質量殻上にあるものとする．そこで (6.1) 式右辺の $\Gamma^{(0)}_\mu$ を Γ_μ に置き換えると，(6.1) 式右辺の積分の前の係数は

$$e_{\rm obs}=eZ_1^{-1}Z_2Z_3^{1/2}\tag{6.7}$$

という組み合わせで与えられることになる．実はこの組み合わせが，実験で観測される荷電に相当することは，QED における種々の低エネルギー定理と呼ばれる性質から明らかにされる．さて (6.7) と (2.9) とを比較すると真空の電媒定数は

$$\sqrt{\varepsilon}=Z_1Z_2^{-1}Z_3^{-1/2}. \tag{6.8}$$

くりこまれた相互作用表示の定義は変わらないが，相互作用項における e を e_{obs} で書き直した方が便利である．そこで

$$\begin{aligned} eZ_2Z_3^{1/2}&=eZ_1^{-1}Z_2Z_3^{1/2}-(1-Z_1)eZ_1^{-1}Z_2Z_3^{1/2} \\ &=e_{\text{obs}}-(1-Z_1)e_{\text{obs}} \\ &\equiv e_{\text{obs}}-\delta e \end{aligned} \tag{6.9}$$

と書くことにする．従って相互作用部分のラグランジアン密度において

$$ieZ_2Z_3^{1/2}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\cdot A_\mu=i(e_{\text{obs}}-\delta e)\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\cdot A_\mu \tag{6.10}$$

という書換えを行う．従って今後摂動論は e の巾ではなくて e_{obs} の巾で行う．

$$\delta e=(1-Z_1)e_{\text{obs}}=\mathcal{O}(e_{\text{obs}}^3) \tag{6.11}$$

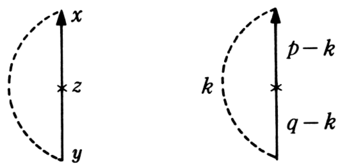
となるが，Γ_μ と $\Gamma_\mu^{(0)}$ との関係は

$$(e_{\text{obs}}-\delta e)\Gamma_\mu^{(0)}(x,y\,;z)=e_{\text{obs}}\Gamma_\mu(x,y\,;z) \tag{6.12}$$

この左辺を e_{obs}^3 まで計算すると

$$\begin{aligned} e_{\text{obs}}\Gamma_\mu(x,y\,;z)=&(e_{\text{obs}}-\delta e)\gamma_\mu\delta^4(x-z)\delta^4(y-z) \\ &+e_{\text{obs}}^3\gamma_\lambda S_F(x-z)\gamma_\mu S_F(z-y)\gamma_\lambda D_F(x-y) \end{aligned} \tag{6.13}$$

この右辺第二項に対応する Feynman 図形は x 空間および p 空間で次の如し：



(6.13) 式をフーリエ変換すると，

$$\begin{aligned} e_{\text{obs}}\Gamma_\mu(p,q)=&(e_{\text{obs}}-\delta e)\gamma_\mu \\ &+\frac{(-i)^3}{(2\pi)^4}e_{\text{obs}}^3\int d^4k\,\gamma_\lambda\frac{1}{i(p-k)\cdot\gamma+m-i\varepsilon}\gamma_\mu\frac{1}{i(q-k)\cdot\gamma+m-i\varepsilon}\gamma_\lambda\frac{1}{k^2-i\varepsilon} \end{aligned} \tag{6.14}$$

δe を決めるには (6.6) 式を用いる．(6.14) の分母を有理化すると分子は

$$N=\gamma_\lambda[i(p-k)\cdot\gamma+m]\gamma_\mu[i(q-k)\cdot\gamma+m]\gamma_\lambda \tag{6.15}$$

ここで λ について和をとり，γ 行列について整理をする．その際に次の公式を用いることになる：

(1) $\gamma_\lambda\gamma_a\gamma_\lambda=-2\gamma_a$,

(2) $\gamma_\lambda\gamma_a\gamma_b\gamma_\lambda=4\delta_{ab}$,

(3) $\gamma_\lambda\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_\lambda=-2\gamma_c\gamma_b\gamma_a$,

従って分子は次のように書ける：

$$N=-2i(q-k)\cdot\gamma\,\gamma_\mu i(p-k)\cdot\gamma+4im((p-k)_\mu+(q-k)_\mu)-2m^2\gamma_\mu \tag{6.16}$$

(6.14) 式は次のようになる：

$$e_{\text{obs}}\Gamma_\mu(p,q)=(e_{\text{obs}}-\delta e)\gamma_\mu + \frac{(-ie_{\text{obs}})^3}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{N}{[(p-k)^2+m^2-i\varepsilon][(q-k)^2+m^2-i\varepsilon](k^2-i\varepsilon)} \tag{6.17}$$

この k 積分を実行するために次に掲げる公式，および変数変換を導入することにする：

$$\frac{1}{abc}=2\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\int_0^1 dx_3\delta(1-\sum x_i)\frac{1}{(x_1a+x_2b+x_3c)^3}, \tag{6.18}$$

$$P=\frac{1}{2}(p+q), \qquad \Delta=p-q \tag{6.19}$$

しからば (6.17) 式の積分内の分母の部分は，因子 2 を除いて次のように書ける：

$$\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\int_0^1 dx_3\delta(1-\sum x_i)f(x_1,x_2)=\int_D dx_1dx_2f(x_1,x_2) \tag{6.20}$$

ただし

$$f(x_1,x_2)=\left[\left(P^2+\frac{\Delta^2}{4}+m^2\right)(x_1+x_2)+(P-k)\cdot\Delta(x_1-x_2) -2k\cdot P(x_1+x_2)+k^2-i\varepsilon\right]^{-3} \tag{6.21}$$

また積分領域 D，および次に現れる D' は第6図において定義される．(6.20) 式において更に次の変数変換を行うと，u,v に関する積分領域は D' で与えられる：

$$x_1+x_2=u, \qquad x_1-x_2=2v. \tag{6.22}$$

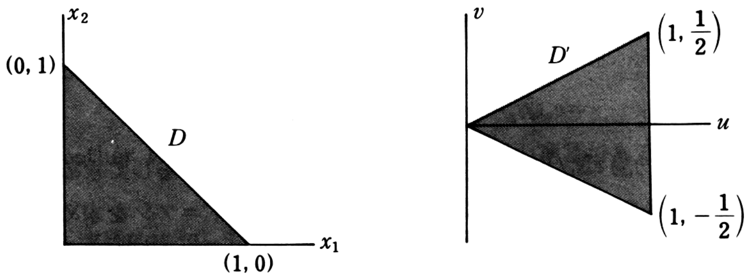
さて積分変数を k から k' に移す．

$$k'=k-uP-v\Delta \tag{6.23}$$

しからば (6.18) に対応する部分は

$$2\int_{D'}du\,dv\left[k'^2+\left(P^2+\frac{\Delta^2}{4}+m^2\right)u+2P\cdot\Delta v-(uP+v\Delta)^2-i\varepsilon\right]^{-3} \tag{6.24}$$

第6図 積分領域 D および D'



そこで分子も k' で表わし，k' について一次の項を落とす．それは k' 積分をすれば落ちるからである．それでも複雑なので p と q とを質量殻上に置き，$\bar{u}(p)$ と $u(q)$ とではさむことにする．そして次の関係式を用いる：

$$\bar{u}(p)(ip\cdot\gamma+m)=\bar{u}(p)\left(iP\cdot\gamma+\frac{1}{2}i\varDelta\cdot\gamma+m\right)=0,$$

$$(iq\cdot\gamma+m)u(q)=\left(iP\cdot\gamma-\frac{1}{2}i\varDelta\cdot\gamma+m\right)=0$$

そして $\bar{u}(p)Au(q)=\bar{u}(p)Bu(q)$ の時に $A\sim B$ と書くことにする．質量殻の条件より

$$p^2+m^2=q^2+m^2=P^2+\frac{\varDelta^2}{4}+m^2=0, \qquad P\cdot\varDelta=0 \tag{6.25}$$

従って (6.24) 式の括弧内の式は次のように簡単化される：

$$k'^2+m^2u^2+\varDelta^2\left(\frac{u^2}{4}-v^2\right)-i\varepsilon \tag{6.26}$$

更に $\varDelta$ は小さいとして，分母分子で $\varDelta$ の一次の項まで残し，$\varDelta^2$ を省略する．しからば公式

$$2iP_\mu\sim-\sigma_{\mu\nu}\varDelta_\nu-2m\gamma_\mu \tag{6.27}$$

を用いることにより次の式を得る：

$$e_{\rm obs}\varGamma_\mu(p,q)\sim(e_{\rm obs}-\delta e)\gamma_\mu$$
$$-4\frac{ie_{\rm obs}^3}{(2\pi)^4}\int_{D'}du\,dv\int d^4k'\frac{N'}{(k'^2+m^2u^2-i\varepsilon)^3}+\mathcal{O}(\varDelta^2), \tag{6.28}$$

$$N'=-u(1-u)m\sigma_{\mu\nu}\varDelta_\nu+m^2\gamma_\mu[(1-u)^2-4(1-u)+1]+\frac{1}{2}\gamma_\mu k'^2 \tag{6.29}$$

さて $\varDelta\to0$ の極限では，右辺は $e_{\rm obs}\gamma_\mu$ に等しいはずであるから，従って

$$\delta e=-\frac{4ie_{\rm obs}^3}{(2\pi)^4}\int_{D'}du\,dv\int d^4k'\frac{m^2(u^2+2u-2)+\frac{1}{2}k'^2}{(k'^2+m^2u^2-i\varepsilon)^3} \tag{6.30}$$

この右辺は対数的に発散することになる．(6.30) を (6.28) に代入すると，

$$e_{\rm obs}\Gamma_\mu(p,q)\sim e_{\rm obs}\gamma_\mu + 4\frac{ie_{\rm obs}^3}{(2\pi)^4}\int_{D'}du\,dv\int d^4k'\frac{u(1-u)m\sigma_{\mu\nu}\Delta_\nu}{(k'^2+m^2u^2-i\varepsilon)^3}+\mathcal{O}(\Delta^2)$$
$$=e_{\rm obs}\gamma_\mu-\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)\left(\frac{e_{\rm obs}}{2m}\right)\sigma_{\mu\nu}\Delta_\nu+\mathcal{O}(\Delta^2) \tag{6.31}$$

ここで α は勿論 $e_{\rm obs}^2/4\pi$ に等しい．この式は三次の摂動として求められたものであるが，Δ の一次まで同じ結果を出す有効ハミルトニアンを求めると，

$$\mathcal{H}_{\rm eff}=-\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)\left(\frac{e_{\rm obs}}{4m}\right)\overline{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi\cdot F_{\mu\nu} \tag{6.32}$$

このような項は，それ自身でゲージ不変となっており，Pauli 項と呼ばれる．ここで磁場しか無い時に非相対論的近似をすると，

$$\mathcal{H}_{\rm eff}=-\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)\frac{e_{\rm obs}}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H} \tag{6.33}$$

この式は電子が Dirac 理論で与えられる $e_{\rm obs}/2m$ に加えて更に磁気能率が加わったことを意味し，この増加分を異常磁気能率と呼ぶ．その結果電子の磁気能率はこの次数まででは次式で与えられる：

$$\frac{e_{\rm obs}}{2m}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right) \tag{6.34}$$

この結果は Schwinger や朝永らにより得られ，実験値と良く一致しており，くりこみ理論の成果と考えられている．くりこみ理論は更に水素原子におけるいわゆる Lamb shift の説明にも成功し，戦後の場の理論発展の基礎となった．

さて乗法的くりこみ定数として Z_1, Z_2, Z_3 を導入したが，Z_1 は(6.11)，(6.30)より次式で与えられる：

$$Z_1=1+\frac{4ie_{\rm obs}^2}{(2\pi)^4}\int_{D'}du\,dv\int d^4k'\frac{m^2(u^2+2u-2)+\frac{1}{2}k'^2}{(k'^2+m^2u^2-i\varepsilon)^3} \tag{6.35}$$

前に Z_2 は具体的な計算を示さなかったが，(4.17) で与えられ，この次数で計算すると Z_1 と一致する．この等式については次節で議論する．

§7 Ward-高橋の恒等式

裸の荷電 e と観測される荷電 $e_{\rm obs}$ との間の関係式 (5.7) についてもっと詳しく調べてみよう．今まで電子のみを考えたが，多種類の荷電粒子 $a, b, \cdots$ が存

在する場合を考えてみよう．しからば

$$(e_a)_{\mathrm{obs}}=Z_{1a}^{-1}Z_{2a}Z_3^{1/2}e_a, \cdots \tag{7.1}$$

そこで次のような反応を考えてみよう：

$$a+b\rightarrow c+d \tag{7.2}$$

この時に Noether の定理によって保存されるのは裸の荷電である．

$$e_a+e_b=e_c+e_d \tag{7.3}$$

しかしながら実験的に知られている荷電の保存則は，当然のことながらくりこまれた荷電に対して成り立つ．

$$(e_a)_{\mathrm{obs}}+(e_b)_{\mathrm{obs}}=(e_c)_{\mathrm{obs}}+(e_d)_{\mathrm{obs}} \tag{7.4}$$

この二種類の保存則が同時に成り立つためには $Z_1^{-1}Z_2$ が荷電粒子の種類に依らないことが必要である．すなわち，

$$Z_{1a}^{-1}Z_{2a}=Z_{1b}^{-1}Z_{2b}=Z_{1c}^{-1}Z_{2c}=Z_{1d}^{-1}Z_{2d}, \quad \cdots \tag{7.5}$$

Ward はこの等式が更に強い次の等式で置き換えられることを見出した：

$$Z_{1a}=Z_{2a}, \quad \cdots \tag{7.6}$$

そこで $Z_1=Z_2$ という式を Ward の恒等式と呼ぶ．以下にその証明を与える．

まず $\psi^{(0)}, \bar{\psi}^{(0)}$ をくりこまれていない電子場の演算子とする．そして

$$J_\mu=i\bar{\psi}^{(0)}\gamma_\mu\psi^{(0)}=iZ_2\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \tag{7.7}$$

と置くと，くりこまれていない Heisenberg 演算子は正準交換関係を満たすので，$x_0=y_0$ に対して

$$[J_0(x), \psi^{(0)}(y)]=-\psi^{(0)}(y)\delta^3(x-y), \quad [J_0(x), \bar{\psi}^{(0)}(y)]=\bar{\psi}^{(0)}(y)\delta^3(x-y) \tag{7.8}$$

従って T 積の中に J_μ が入っていると，$\partial_\mu J_\mu=0$ を用いて次のような式を得る：

$$\begin{aligned}&\partial_\mu T[J_\mu(z), \psi^{(0)}(x), \bar{\psi}^{(0)}(y)]\\ &=T[[J_0(z), \psi^{(0)}(x)]\delta(z_0-x_0), \bar{\psi}^{(0)}(y)]+T[\psi^{(0)}(x), [J_0(z), \bar{\psi}^{(0)}(y)]\delta(z_0-y_0)]\\ &=(\delta^4(z-y)-\delta^4(z-x))T[\psi^{(0)}(x), \bar{\psi}^{(0)}(y)]\end{aligned} \tag{7.9}$$

T 積の中の 2 時間変数の順序が入替わる点で時間の δ 関数が生ずるのは既に見たところである．後に (7.9) の一般化を用いる．

さてくりこまれた相互作用表示は (4.6) と (4.7) により定義されるが，(7.9) をくりこまれた演算子で表現すると，

$$\begin{aligned}&\partial_\mu T[J_\mu(z), \psi(x), \overline{\psi}(y)]\\&=(\delta^4(z-y)-\delta^4(z-x))T[\psi(x), \overline{\psi}(y)]\\&=-\left(\psi(z)\frac{\delta}{\delta\psi(z)}-\overline{\psi}(z)\frac{\delta}{\delta\overline{\psi}(z)}\right)T[\psi(x), \overline{\psi}(y)]\end{aligned} \tag{7.10}$$

後にこの公式をやや一般化して用いることにする.

電磁場に対する簡約公式を適用するために次の微分演算子を導入する:

$$D_{\mu\nu}(\partial)=\delta_{\mu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\nu+\frac{1}{\alpha}\partial_\mu\partial_\nu \tag{7.11}$$

次にくりこまれた相互作用表示におけるグリーン関数に対して簡約公式を利用して次の量を計算する:

$$\begin{aligned}&D_{\mu\nu}(\partial)T^*[A_\nu(x)\cdots, U(\infty, -\infty)]\\&=T^*\left[i\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\cdots, U(\infty, -\infty)\right]-T^*[\cdots[\mathscr{L}_{\rm int}(x)]_{A_\mu}, U(\infty, -\infty)]\end{aligned} \tag{7.12}$$

ただし Euler 微分の具体的な形は

$$[\mathscr{L}_{\rm int}(x)]_{A_\mu}=eZ_3^{1/2}J_\mu-(1-Z_3)(\delta_{\mu\sigma}\Box-\partial_\mu\partial_\sigma)A_\sigma(x) \tag{7.13}$$

この式を(7.12)に代入するが, (7.13)の第二項の微分は T^* の外側に出すと,

$$\begin{aligned}&D_{\mu\nu}(\partial)T^*[A_\nu(x)\cdots, U(\infty, -\infty)]\\&=T^*\left[i\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\cdots, U(\infty, -\infty)\right]\\&\quad-eZ_3^{1/2}T^*[J_\mu(x), \cdots, U(\infty, -\infty)]\\&\quad+(1-Z_3)(\delta_{\mu\sigma}\Box-\partial_\mu\partial_\sigma)T^*[A_\sigma(x), \cdots, U(\infty, -\infty)]\end{aligned} \tag{7.14}$$

ここで次の関係式を使うことにする:

$$eZ_3^{1/2}=e(Z_1^{-1}Z_2Z_3^{1/2})Z_1Z_2^{-1}=e_{\rm obs}Z_1Z_2^{-1} \tag{7.15}$$

次に(7.14)式を x_μ について微分し, (7.10)を用いる. 最後の項は消えるので

$$\begin{aligned}&\partial_\mu D_{\mu\nu}(\partial)T^*[A_\nu(x), \cdots, U(\infty, -\infty)]\\&=\partial_\mu T^*\left[i\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\cdots, U(\infty, -\infty)\right]\\&\quad+e_{\rm obs}Z_1Z_2^{-1}T^*\left[\left(\psi(x)\frac{\delta}{\delta\psi(x)}-\overline{\psi}(x)\frac{\delta}{\delta\overline{\psi}(x)}\right)\cdots, U(\infty, -\infty)\right]\end{aligned} \tag{7.16}$$

上式の真空期待値をとり, Gell-Mann-Low の関係を用いると, くりこまれた Heisenberg 演算子を含むグリーン関数間の関係式が得られる.

$$\begin{aligned}&\partial_\mu D_{\mu\nu}(\partial)\langle 0|T^*[A_\nu(x)\cdots]|0\rangle\\&=\partial_\mu\langle 0|i\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}T^*[\cdots]|0\rangle\end{aligned}$$

$$+e_{\mathrm{obs}}Z_1Z_2^{-1}\langle 0|T^*\left[\left(\boldsymbol{\psi}(x)\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\psi}(x)}-\overline{\boldsymbol{\psi}}(x)\frac{\delta}{\delta\overline{\boldsymbol{\psi}}(x)}\right)\cdots\right]|0\rangle \tag{7.17}$$

上式において … は Heisenberg 演算子の適当な積を表わす.

この式の特徴はくりこまれた場の演算子のみが現れることである．後に示すように $Z_1Z_2^{-1}=1$ であるのでそれを使うと **Ward-高橋の恒等式**を得る:

$$\partial_\mu D_{\mu\nu}(\partial)\langle 0|T^*[\boldsymbol{A}_\nu(x)\cdots]|0\rangle$$

$$=\partial_\mu\langle 0|i\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}T^*[\cdots]|0\rangle$$

$$+e_{\mathrm{obs}}\langle 0|T^*\left[\left(\boldsymbol{\psi}(x)\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\psi}(x)}-\overline{\boldsymbol{\psi}}(x)\frac{\delta}{\delta\overline{\boldsymbol{\psi}}(x)}\right)\cdots\right]|0\rangle \tag{7.18}$$

(7.17) 式の具体的意義を知るために，まず … に $A_\sigma(y)$ を代入すると，

$$\partial_\mu D_{\mu\nu}(\partial_x)\langle 0|T^*[\boldsymbol{A}_\nu(x),\boldsymbol{A}_\sigma(y)]|0\rangle=i\partial_\sigma\delta^4(x-y) \tag{7.19}$$

この式を運動量空間で表わすと，

$$\partial_\mu D_{\mu\nu}(\partial)=\frac{1}{\alpha}\square\partial_\nu \tag{7.20}$$

を考慮に入れて次のように書ける:

$$\frac{1}{\alpha}k^2k_\nu D'_{F\nu\sigma}(k)=k_\sigma \tag{7.21}$$

そこで D'_F に対する Dyson の方程式を任意のゲージで書いてみると，

$$D'_{F\nu\sigma}(k)=D_{F\nu\sigma}(k)-D_{F\nu\lambda}(k)\Pi^*_{\lambda\mu}(k)D'_{F\mu\sigma}(k) \tag{7.22}$$

ただし

$$D_{F\nu\sigma}(k)=\left(\delta_{\nu\sigma}-\frac{k_\nu k_\sigma}{k^2-i\varepsilon}\right)\frac{1}{k^2-i\varepsilon}+\alpha\frac{k_\nu k_\sigma}{(k^2-i\varepsilon)^2}, \tag{7.23}$$

$$\Pi^*_{\lambda\mu}(k)=\Pi^*_{\mathrm{ren}}(k)_{\lambda\mu}=(k_\lambda k_\mu-\delta_{\lambda\mu}k^2)\Pi^*(-k^2) \tag{7.24}$$

これから (7.22) の解を求めると

$$D'_{F\nu\sigma}(k)=\left(\delta_{\nu\sigma}-\frac{k_\nu k_\sigma}{k^2-i\varepsilon}\right)\frac{1}{k^2-i\varepsilon}\cdot\frac{1}{1-\Pi^*(-k^2)}+\alpha\frac{k_\nu k_\sigma}{(k^2-i\varepsilon)^2} \tag{7.25}$$

この式は確かに (7.21) 式を満たしている.

次の例は

$$\partial_\mu D_{\mu\nu}(\partial_z)\langle 0|T^*[\boldsymbol{\psi}(x),\overline{\boldsymbol{\psi}}(y),\boldsymbol{A}_\nu(z)]|0\rangle$$

$$=-e_{\mathrm{obs}}Z_1Z_2^{-1}\{\delta^4(y-z)-\delta^4(x-z)\}\langle 0|T^*[\boldsymbol{\psi}(x),\overline{\boldsymbol{\psi}}(y)]|0\rangle \tag{7.26}$$

(7.19) 式とこの式とを次の式と組み合わせてみよう:

$$\langle 0|T^*[\boldsymbol{\psi}(x),\overline{\boldsymbol{\psi}}(y),\boldsymbol{A}_\nu(z)]|0\rangle$$

$$=-e_{\text{obs}}\int d^4x'd^4y'd^4z'S'_F(x-x')\Gamma_\mu(x',y'\,;\,z')S'_F(y'-y)D'_{F\mu\nu}(z'-z) \tag{7.27}$$

(7.27) の右辺を (7.26) の左辺に代入して, (7.19) を用いて D'_F を消去すると, 運動量空間で次式を得る:

$$-i(p-q)_\nu S'_F(p)\Gamma_\nu(p,q)S'_F(q)=Z_1Z_2^{-1}(S'_F(p)-S'_F(q)) \tag{7.28}$$

あるいは両辺を p_μ で微分して, $q=p$ と置けば

$$\Gamma_\mu(p,p)=-iZ_1Z_2^{-1}\frac{\partial}{\partial p_\mu}S'_F(p)^{-1} \tag{7.29}$$

この式を $\bar{u}(p)$ と $u(p)$ とではさみ, 次の関係を用いる:

$$S'_F(p)^{-1}=ip\cdot\gamma+m+\mathcal{O}((ip\cdot\gamma+m)^2),$$

$$\bar{u}(p)(ip\cdot\gamma+m)=(ip\cdot\gamma+m)u(p)=0$$

しからば結局次の関係式を得る:

$$\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p)=Z_1Z_2^{-1}\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p) \tag{7.30}$$

すなわち

$$Z_1=Z_2 \tag{7.31}$$

という Ward の恒等式を得る. 従って Ward-高橋の恒等式(7.17)において, $Z_1Z_2^{-1}$ は1で置き換えることができて, 結局 (7.18) で与えられるような Ward-高橋の恒等式が得られることになる. 一般に保存する流れを含むグリーン関数の発散をとって得られる式を Ward-高橋の恒等式と称する.

なお (7.31) および (7.29) は Ward によって見出され, (7.28) は高橋によって導出された. グリーン関数に対する (7.18) 式は初め筆者により Fermi ゲージで証明されたが, 後に任意のゲージに対して拡張し得ることがだんだん明らかになってきた.

§8 伝播関数の積分表示

高次補正の入った伝播関数は一般に異なる質量に対する自由場の伝播関数の重畳としてある種の積分表示で表現することができる. このことは梅沢, 亀淵, Källén, Lehmann 等多くの人々による1950年代初期の研究で明らかにされた.

積分表示

中性スカラー場を考え, 次のような一般的な仮定をする:

1) エネルギー・運動量を表わす四元ベクトル P_μ という演算子が存在し，

$$[P_\mu, P_\nu]=0, \tag{8.1}$$

$$[\boldsymbol{\varphi}(x), P_\mu]=\frac{1}{i}\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}(x). \tag{8.2}$$

2) P_μ の固有状態で完全系をなす $\{\boldsymbol{\Phi}_{k,\alpha}\}$ が存在する．ただし k_μ は P_μ の固有値であり，α はそれ以外の状態指定量である．

$$P_\mu\boldsymbol{\Phi}_{k,\alpha}=k_\mu\boldsymbol{\Phi}_{k,\alpha} \tag{8.3}$$

勿論 $\{\boldsymbol{\Phi}\}$ としては $\{\boldsymbol{\Phi}^{\rm in}\}$，あるいは $\{\boldsymbol{\Phi}^{\rm out}\}$ を選ぶことができる．以下では真空の存在を仮定し，$|0\rangle$ と書く．相互作用のある時の不変関数にはダッシュを付けると，

$$\begin{aligned}\langle 0|\boldsymbol{\varphi}(x)\boldsymbol{\varphi}(y)|0\rangle&=i\Delta^{(+)\prime}(x-y),\\ \langle 0|[\boldsymbol{\varphi}(x),\boldsymbol{\varphi}(y)]|0\rangle&=i\Delta'(x-y),\\ \langle 0|T[\boldsymbol{\varphi}(x)\boldsymbol{\varphi}(y)]|0\rangle&=\Delta'_F(x-y).\end{aligned} \tag{8.4}$$

そこでフーリエ展開をするために次の行列要素を導入する：

$$\langle 0|\boldsymbol{\varphi}(x)|\boldsymbol{k},\boldsymbol{\alpha}\rangle=a_{k\alpha}e^{ik\cdot x} \tag{8.5}$$

しからば

$$\begin{aligned}\langle 0|\boldsymbol{\varphi}(x)\boldsymbol{\varphi}(y)|0\rangle&=\sum_{k,\alpha}\langle 0|\boldsymbol{\varphi}(x)|\boldsymbol{k},\boldsymbol{\alpha}\rangle\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\varphi}(y)|0\rangle\\ &=\sum_{k,\alpha}|a_{k\alpha}|^2e^{ik\cdot(x-y)}\end{aligned} \tag{8.6}$$

そこでローレンツ不変性に基づき，次の不変関数を導入する：

$$\rho(-p^2)=(2\pi)^3\sum_{k,\alpha}|a_{k\alpha}|^2\delta^4(p-k)\geqq 0 \tag{8.7}$$

この式を (8.6) に代入すると，時間的な四元運動量 p に対して

$$\begin{aligned}i\Delta^{(+)\prime}(x-y)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4p\theta(p_0)\rho(-p^2)e^{ip\cdot(x-y)}\qquad(-p^2\geqq 0)\\ &=\int_0^\infty d\kappa^2\rho(\kappa^2)\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4p\theta(p_0)\delta(p^2+\kappa^2)e^{ip\cdot(x-y)}\\ &=\int_0^\infty d\kappa^2\rho(\kappa^2)i\Delta^{(+)}(x-y\,;\,\kappa^2)\end{aligned} \tag{8.8}$$

この式を一般化すれば，任意の不変関数に対して

$$\Delta^{(\ )\prime}(x)=\int_0^\infty d\kappa^2\rho(\kappa^2)\Delta^{(\ )}(x\,;\,\kappa^2) \tag{8.9}$$

すなわち，相互作用の存在する時の不変二点関数は，異なる質量の自由場に対

する不変二点関数の重ね合わせたものとして積分表示で表現される．

質量 m の自由場に対するスペクトル関数 $\rho(\kappa^2)$ は，

$$\rho(\kappa^2)=\delta(\kappa^2-m^2). \tag{8.10}$$

相互作用が導入されると，一粒子中間状態と多粒子中間状態の寄与は分解し，

$$\rho(\kappa^2)=c\delta(\kappa^2-m^2)+\sigma(\kappa^2) \tag{8.11}$$

ただし，σ は二粒子系の最低不変質量 $2m$ 以下では消える．すなわち

$$\sigma(\kappa^2)=\theta(\kappa^2-4m^2)\sigma(\kappa^2). \tag{8.12}$$

ところで一粒子状態では波動関数の規格化が，自由場の時と同じになるというくりこみ条件を用いると，(8.11) 式の中の c は1に等しくなる．すなわち，

$$\rho(\kappa^2)=\delta(\kappa^2-m^2)+\sigma(\kappa^2). \tag{8.13}$$

次に伝播関数のフーリエ表示を導入する．

$$\Delta_F'(x)=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{ik\cdot x}\Delta_F'(-k^2) \tag{8.14}$$

しからば，

$$\Delta_F'(-k^2)=\frac{1}{k^2+m^2-i\varepsilon}+\int_{4m^2}^{\infty}d\kappa^2\frac{\sigma(\kappa^2)}{k^2+\kappa^2-i\varepsilon} \tag{8.15}$$

そこでくりこみ定数 Z_φ を次式で導入する．ただし電子場では $Z_\psi=Z_2$，電磁場では $Z_A=Z_3$ と書いたものである．くりこまれていないものに添字 (0) を付けて，

$$\boldsymbol{\varphi}^{(0)}(x)=Z_\varphi^{1/2}\boldsymbol{\varphi}(x) \tag{8.16}$$

しからば

$$\langle 0|[\boldsymbol{\varphi}^{(0)}(x),\boldsymbol{\varphi}^{(0)}(y)]|0\rangle=Z_\varphi\int d\kappa^2\rho(\kappa^2)i\Delta(x-y\,;\,\kappa^2) \tag{8.17}$$

そこでこの式の両辺を x_0 で微分し，その後で $x_0=y_0$ と置くと，左辺は正準交換関係により $-i\delta^3(x-y)$ となる．また右辺では，(3.1.13) 式により

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_0}\Delta(x-y\,;\,\kappa^2)\right]_{x_0=y_0}=-\delta^3(x-y) \tag{8.18}$$

になるから，

$$-i\delta^3(x-y)=-i\delta^3(x-y)Z_\varphi\int d\kappa^2\rho(\kappa^2) \tag{8.19}$$

これから直ちにくりこみ定数に対する積分表示が得られる．

$$Z_\varphi^{-1}=\int d\kappa^2\rho(\kappa^2)=1+\int d\kappa^2\sigma(\kappa^2)\geqq 1 \tag{8.20}$$

この不等号は，スカラー場に対して仮定された正定値計量に由来する．従って

$$1\geqq Z_\varphi\geqq 0. \tag{8.21}$$

自己エネルギー

上述の如く，くりこみ定数はスペクトル関数により積分表示されるが，自己エネルギーについてはどうであろうか？　この問題を考えるために次のような簡単な模型を考える．

$$\mathscr{L}=-(\partial_\lambda\boldsymbol{\Phi}^\dagger\cdot\partial_\lambda\boldsymbol{\Phi}+M_0{}^2\boldsymbol{\Phi}^\dagger\boldsymbol{\Phi})-\frac{1}{2}[(\partial_\lambda\boldsymbol{\varphi})^2+m_0{}^2\boldsymbol{\varphi}^2]-g_0\boldsymbol{\Phi}^\dagger\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\varphi} \tag{8.22}$$

ここに $\boldsymbol{\varphi}$ は中性スカラー場，$\boldsymbol{\Phi}$ と $\boldsymbol{\Phi}^\dagger$ とは荷電スカラー場を表わし，m_0, M_0 はそれぞれの場の裸の質量を表わし，観測質量 m, M とは次式で結ばれている：

$$M^2=M_0{}^2+\delta M^2,\qquad m^2=m_0{}^2+\delta m^2 \tag{8.23}$$

また乗法的くりこみを次式で導入する：

$$\boldsymbol{\Phi}^{(0)}=Z_2^{1/2}\boldsymbol{\Phi},\qquad \boldsymbol{\varphi}^{(0)}=Z_3^{1/2}\boldsymbol{\varphi},\qquad g_0=Z_1Z_2^{-1}Z_3^{-1/2}g \tag{8.24}$$

くりこまれた場の方程式は

$$(\Box-m^2)\boldsymbol{\varphi}=Z_1Z_3^{-1}g\boldsymbol{\Phi}^\dagger\boldsymbol{\Phi}-\delta m^2\boldsymbol{\varphi}, \tag{8.25}$$

$$(\Box-M^2)\boldsymbol{\Phi}=Z_1Z_2^{-1}g\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\varphi}-\delta M^2\boldsymbol{\Phi} \tag{8.26}$$

ここでは (8.25) を用いて δm^2 の積分表示を求める．δM^2 に対しては (8.26) を用いれば同様な計算ができる．(8.25) を再び m_0 を用いて表わすと，

$$(\Box_x-m_0{}^2)\langle\mathbf{0}|[\boldsymbol{\varphi}(x),\boldsymbol{\varphi}(y)]|\mathbf{0}\rangle=Z_1Z_3^{-1}g[\mathbf{0}|\boldsymbol{\Phi}^\dagger(x)\boldsymbol{\Phi}(x),\boldsymbol{\varphi}(y)]|\mathbf{0}\rangle \tag{8.27}$$

この式を y_0 で微分し，$y_0=x_0$ と置くと，右辺は

$$\langle\mathbf{0}|[\boldsymbol{\Phi}^\dagger(x)\boldsymbol{\Phi}(x),\dot{\boldsymbol{\varphi}}(y)]|\mathbf{0}\rangle=0\qquad(x_0=y_0) \tag{8.28}$$

従って左辺も消えることになる．左辺は積分表示をしておいて上述の演算を施せばやはり消えるはずである．

$$(\Box^2-m_0{}^2)\langle\mathbf{0}|[\boldsymbol{\varphi}(x),\boldsymbol{\varphi}(y)]|\mathbf{0}\rangle=i\int d\kappa^2\rho_\varphi(\kappa^2)(\kappa^2-m_0{}^2)\Delta(x-y\,;\,\kappa^2)$$

この式を y_0 で微分し，$y_0=x_0$ と置き，0に等しいとすると，(8.18)式により

$$i\delta^3(x-y)\int d\kappa^2(\kappa^2-m_0{}^2)\rho_\varphi(\kappa^2)=0$$

すなわち，

$$\int d\kappa^2(\kappa^2-m^2)\rho_\varphi(\kappa^2)=-\delta m^2\int d\kappa^2\rho_\varphi(\kappa^2)=-Z_3^{-1}\delta m^2 \tag{8.29}$$

従って，

$$\delta m^2=-Z_3\int d\kappa^2(\kappa^2-m^2)\rho_\varphi(\kappa^2)=-Z_3\int d\kappa^2(\kappa^2-m^2)\sigma(\kappa^2)<0 \tag{8.30}$$

この式は δm^2 が常に負であることを意味する．(8.23) 式において，m^2 は正で有限，$m_0{}^2$ は正で無限大であるとすれば，δm^2 は負で無限大になる以外はないことから当然予期された結果である．

電磁場の伝播関数に対する積分表示

今までスカラー場に対してなされた議論を電磁場に適用する．まず電磁場に対する伝播関数を導入する．

$$\langle 0|T^*[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{ik\cdot(x-y)}D'_{F\mu\nu}(k) \tag{8.31}$$

自由な電磁場に対しては，$D_{F\mu\nu}$ は (7.23) 式で与えられる．更に (7.25) から明らかなように相互作用の効果は横波部分のみに現れる．そこで

$$D_{\mu\nu}(\partial)A_\nu=-j_\mu, \tag{8.32}$$

$$j_\mu=-ie_{\rm obs}Z_2\bar{\psi}\gamma_\mu\psi-(1-Z_3)(\delta_{\mu\sigma}\Box-\partial_\mu\partial_\sigma)A_\sigma \tag{8.33}$$

により j_μ という流れを導入し，次の関数を定義する：

$$\langle 0|T^*[j_\mu(x)j_\nu(y)]|0\rangle=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{ik\cdot(x-y)}\Pi_{\mu\nu}(k) \tag{8.34}$$

しからば

$$k^4\,{\rm Im}\,D'_{F\mu\nu}(k)={\rm Im}\,\Pi_{\mu\nu}(k) \tag{8.35}$$

そこでまず $\Pi_{\mu\nu}$ の積分表示を求めよう．まずローレンツ共変性から

$$\langle 0|j_\mu(x)j_\nu(y)|0\rangle=i\delta_{\mu\nu}\int d\kappa^2\sigma_1(\kappa^2)\Delta^{(+)}(x-y;\kappa^2)+i\partial_\mu\partial_\nu\int d\kappa^2\sigma_2(\kappa^2)\Delta^{(+)}(x-y;\kappa^2) \tag{8.36}$$

ところで $\partial_\mu j_\mu=0$ であるから，このことから

$$\sigma_1(\kappa^2)+\kappa^2\sigma_2(\kappa^2)=0 \tag{8.37}$$

従って，次のように書くことができる：

$$\sigma_1(\kappa^2)=\kappa^2\sigma(\kappa^2),\qquad \sigma_2(\kappa^2)=-\sigma(\kappa^2), \tag{8.38}$$

$$\langle 0|j_\mu(x)j_\nu(y)|0\rangle=i\int d\kappa^2\sigma(\kappa^2)(\delta_{\mu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\nu)\Delta^{(+)}(x-y\,;\,\kappa^2) \tag{8.39}$$

ここで $\mu=\nu=4$ と置くと，

$$-\langle \mathbf{0}|\,\boldsymbol{j}_0(x)\boldsymbol{j}_0(y)\,|\mathbf{0}\rangle = i\int d\kappa^2\sigma(\kappa^2)\nabla^2\Delta^{(+)}(x-y\,;\,\kappa^2) \tag{8.40}$$

ここで $\boldsymbol{j}_\mu$ がゲージ不変であることから，左辺には不定計量は入り込めず，

$$(2\pi)^3\sum_n |\langle \boldsymbol{n}|\,\boldsymbol{j}_0(0)\,|\mathbf{0}\rangle|^2\delta^4(p_n-k) = \boldsymbol{k}^2\sigma(-k^2) \geqq 0 \tag{8.41}$$

すなわち $\sigma(\kappa^2)$ はスカラー場の時と同じく正定値となる．

$$\sigma(\kappa^2) \geqq 0 \tag{8.42}$$

この結果を $\Pi_{\mu\nu}$ の積分表示に用いると，

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu}k^2)\Pi(-k^2), \tag{8.43}$$

$$\Pi(-k^2) = \int d\kappa^2 \frac{\sigma(\kappa^2)}{k^2+\kappa^2-i\varepsilon} + \text{const.} \tag{8.44}$$

ところでくりこみ条件は $\Pi(0)$ が 0 となることを要求するので

$$\Pi(-k^2) = \Pi(-k^2) - \Pi(0) = -k^2\int \frac{d\kappa^2}{\kappa^2}\cdot\frac{\sigma(\kappa^2)}{k^2+\kappa^2-i\varepsilon} \tag{8.45}$$

摂動論の最低次では

$$\sigma(\kappa^2) = \frac{e_{\text{obs}}^2}{12\pi^2}\left(1+\frac{2m^2}{\kappa^2}\right)\sqrt{1-\frac{4m^2}{\kappa^2}}\,\theta(\kappa^2-4m^2) \tag{8.46}$$

そして電磁場の伝播関数の積分表示は，

$$D'_{F\mu\nu}(k) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2-i\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{k^2-i\varepsilon} + \int \frac{d\kappa^2}{\kappa^2}\cdot\frac{\sigma(\kappa^2)}{k^2+\kappa^2-i\varepsilon}\right) + \alpha\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-i\varepsilon)^2}. \tag{8.47}$$

後藤-今村-Schwinger 項

$\boldsymbol{j}_\mu$ と $\boldsymbol{j}_\nu$ との交換子の真空期待値の積分表示は

$$\langle \mathbf{0}|\,[\boldsymbol{j}_\mu(x),\,\boldsymbol{j}_\nu(y)]\,|\mathbf{0}\rangle = i\int d\kappa^2\sigma(\kappa^2)(\delta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)\Delta(x-y\,;\,\kappa^2) \tag{8.48}$$

この結果を出すのに用いたことは $\partial_\mu \boldsymbol{j}_\mu = 0$ と $\boldsymbol{j}_0$ のゲージ不変性だけである．

さて $\mu=4$, $\nu=k$ (1, 3, 3) とし，$x_0=y_0$ と置くと，

$$\begin{aligned} i\langle \mathbf{0}|\,[\boldsymbol{j}_0(x),\,\boldsymbol{j}_k(y)]\,|\mathbf{0}\rangle &= -\int d\kappa^2\sigma(\kappa^2)[\partial_0\partial_k\Delta(x-y\,;\,\kappa^2)]_{y_0=x_0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k}\delta^3(x-y)\int d\kappa^2\sigma(\kappa^2) \end{aligned} \tag{8.49}$$

$\sigma(\kappa^2)\geqq 0$ であるから右辺は 0 とならない．最低次では $j_\mu = -ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ となるので，正準交換関係の結果と矛盾する．すなわち，正準交換関係を用いると

$$[j_0(x), j_k(y)] = 0 \qquad (x_0=y_0). \tag{8.50}$$

(8.49) 式の右辺の生き残る項を後藤-今村-Schwinger 項と呼ぶ．そこで相互作用表示において $\partial_\mu j_\mu=0$ を用いて次の計算をする：

$$\partial_\mu T[j_\mu(x), j_\nu(y)]=\delta(x_0-y_0)[j_0(x), j_\nu(y)]\neq 0 \tag{8.51}$$

(5.13) において消えたのはT積でなくてT* 積を用いたからである．すなわち，

$$\langle 0|T^*[\boldsymbol{j}_\mu(x), \boldsymbol{j}_\nu(y)]|0\rangle=\int d\kappa^2\sigma(\kappa^2)(\delta_{\mu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\nu)\Delta_F(x-y\,;\,\kappa^2) \tag{8.52}$$

この場合には明らかに (5.13) 式が成り立っていることになる．このように同じ点における場の演算子の積を含む表現は屢々特異性を持ち，単純な計算とは合わない結果を得ることが良くある．

似たような例として中性ベクトル場を考え，質量が0でないとすると，上と同じく $\partial_\mu\varphi_\mu=0$ であるから，

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\varphi}_\mu(x), \boldsymbol{\varphi}_\nu(y)]&=i\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\right)\Delta(x-y\,;\,m^2)\\ &=i\int d\kappa^2\frac{\delta(\kappa^2-m^2)}{m^2}(\delta_{\mu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\nu)\Delta(x-y\,;\,\kappa^2)\end{aligned} \tag{8.53}$$

故に

$$\sigma(\kappa^2)=\frac{1}{m^2}\delta(\kappa^2-m^2), \tag{8.54}$$

$$i\langle 0|[\boldsymbol{\varphi}_0(x), \boldsymbol{\varphi}_k(y)]|0\rangle=\frac{\partial}{\partial x_k}\delta^3(x-y)\cdot\frac{1}{m^2} \tag{8.55}$$

この導出法も上の後藤-今村-Schwinger 項と全く同じである．

この章ではくりこみの概念をどのようにして自由部分と相互作用部分とに分けるかという立場から議論した．そして最低次の次の次数で発散が消えること，あるいは消えるようにくりこみ定数を選べることを示した．くりこみ理論では，観測されるパラメターを有限な実験値で置き換え，直接観測にかからない裸のパラメターは発散量でもかまわないと考える立場をとっている．さて更に高次の補正を計算しても発散が出ないであろうか？ この問題は多くの人々によって議論されているが，ここでは立ち入らない．この問題については最後の章で少し違う立場から考察することにする．

第12章　ハドロンの分類と模型

第11章までに場の量子論の一般的な枠組を与えた．そして主としてQEDに関する事項について述べてきた．しかしながら序章で述べた如く素粒子論の重要な対象はハドロン，およびその強い相互作用である．またそのハドロンの分類および構造，あるいはその模型が問題となる．従ってこの章ではこのような問題についてやや現象論的な議論を行う．この章で取り扱われる事項は，ハドロンの群論的な分類，クォーク模型，パートン模型等である．

§1　ユニタリー群

この節では簡単な群論の復習から始める．

元 $a, b, \cdots$ などからなる集合 G において積 ab が定義されており，a, b が G の元である時に積 ab もやはり G の元となる．この積が次の四公理を満たす時に G を群と呼ぶ．

1)　$a, b \in G$ ならば，ab なる積が一意的に定義されて，$ab \in G$ である．

2)　単位元 e が G の中にただ一つ存在して，G の任意の元 a に対して
$$ae = ea = a.$$

3)　G の任意の元 a に対してその逆元 a^{-1} がただ一つ存在して
$$aa^{-1} = a^{-1}a = e.$$

4)　積については結合法則が成り立ち，G の任意の元 a, b, c に対して
$$a(bc) = (ab)c.$$

群の表現

G の任意の元 a に対応して行列 $D(a)$ が存在して
$$D(a)D(b) = D(ab), \tag{1.1}$$
$$D(a^{-1}) = D(a)^{-1} \tag{1.2}$$
$$D(e) = E \quad (\text{単位行列}) \tag{1.3}$$
である時に，この行列の集合を群 G の表現と呼ぶ．この行列演算の作用する

ベクトル空間を表現空間，その次元を表現の次元と呼ぶ．

n 次元表現でのベクトルの変換は

$$\xi_a \to \xi'_a = D_a{}^b \xi_b \qquad (a, b=1, 2, \cdots, n) \tag{1.4}$$

また ξ_a に対する反変表現 $\bar{\xi}^a$ を導入して，その変換を次式で定める：

$$\bar{\xi}^a \to \bar{\xi}^{a\prime} = \bar{\xi}^b (D^{-1})_b{}^a \tag{1.5}$$

しからば次の量は不変量となる：

$$\bar{\xi}^a \xi_a \qquad (a \text{ について和をとる}) \tag{1.6}$$

また二つの表現 D_1 と D_2 とで，G の任意の元 a に対して

$$D_2(a) = U D_1(a) U^{-1} \tag{1.7}$$

を満たすような行列 U が存在する時に，二表現は同値であると言う．

また任意の元 a に対して，行列 $D(a)$ が次のように対角化し得るとする：

$$D(a) = \left(\begin{array}{c|c|c} D_1(a) & 0 & 0 \\ \hline 0 & D_2(a) & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots \end{array}\right) \tag{1.8}$$

この時に，この表現は可約であると言い，次のように書く：

$$D = D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots \oplus D_k \tag{1.9}$$

このような分解を許さない表現を既約であると言う．

直積表現

二つの表現 D^α, D^β があり，それぞれ α 次元，β 次元とする．この時にそれぞれの表現空間の基底 $\xi^\alpha(i), \xi^\beta(j)$ から

$$\xi^{\alpha\beta}(ij) = \xi^\alpha(i) \xi^\beta(j) \tag{1.10}$$

を作れば，$\alpha\beta$ 次元表現が得られる．これを直積表現と呼び，

$$D^{\alpha\beta} = D^\alpha \otimes D^\beta \tag{1.11}$$

と書く．直積表現は一般に可約である．

Lie 群

n 個の連続変数により指定されるような変換群を Lie 群と呼び，n をその群の次数と呼ぶ．

例 1　直交群 O(n)

n 個の変数 $x_1, \cdots, x_n$ に対して次の二次形式

$$\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 = x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2 \tag{1.12}$$

を不変にするような x_i の間の一次変換群を O(n) と名付ける.

例 2　ユニタリー群 U(n)

同様にして

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 = |\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2 \tag{1.13}$$

を不変にするような ξ_i の間の一次変換群を U(n) と名付ける. これは n 次元のユニタリー行列の作る群である. このような行列の一つを U とすると,

$$U^\dagger U = UU^\dagger = E, \qquad U^{-1} = U^\dagger \tag{1.14}$$

この群の次数 N は n^2 に等しい. この群の中で, 本義ローレンツ変換のように, 無限小変換の重ね合わせにより生成されるものを考えると,

$$U = \exp(i\varepsilon^a F_a) \qquad (a = 1, 2, \cdots, N) \tag{1.15}$$

のように書ける. ただし a については和をとるものとする. しからば, F_a はエルミート行列となり,

$$F_a^\dagger = F_a \tag{1.16}$$

また無限小変換は, ε^a を無限小パラメターとして,

$$U = 1 + i\varepsilon^a F_a \tag{1.17}$$

の形に書ける. このようなユニタリー行列で, 行列式が 1 となるようなもの,

$$\det U = 1 \tag{1.18}$$

を満たす行列の作る群を SU(n), special unitary group. と呼ぶ. (1.15) の形に書けるものに限って考えれば, (1.18) の条件は次式で表現される:

$$\mathrm{Tr}\, F_a = 0 \tag{1.19}$$

このような独立な F の数は, $N = n^2 - 1$ となる. F_a を生成元と呼ぶ. あるいは生成演算子とも呼ぶ. このような生成元の集合は

$$[F_i, F_j] = i f_{ijk} F_k \tag{1.20}$$

の形の交換関係を満たす. このような F の集合は Lie 代数を形成する. また f を構造定数と呼ぶ. このような交換子は次の二条件を満たす:

反対称性　:　$[F_i, F_j] = -[F_j, F_i]$　(1.21)

Jacobi の恒等式:　$[F_i, [F_j, F_k]] + [F_j [F_k, F_i]] + [F_k, [F_i, F_j]] = 0$　(1.22)

また $F_1, F_2, \cdots, F_N$ の中で——量子力学の意味で——同時に対角化し得るものの最大個数をこの代数の階数（rank）と呼ぶ．例えば SU(2) では，F として3個のパウリ行列 $\sigma_i/2$ $(i=1, 2, 3)$ を選べば，$J_i=\sigma_i/2$ として

$$[J_i, J_j]=i\varepsilon_{ijk}J_k \tag{1.23}$$

となり，通常 J_3 のみを対角化するので階数は1である．

さて U(n) では (1.4) に対応して

$$\xi_a'=U_a{}^b\xi_b \tag{1.24}$$

となるが，この複素共役をとると，U がユニタリーであるから，

$$\xi_a^{*\prime}=\xi_b^*(U_a{}^b)^*=\xi_b^*(U^{-1})_b{}^a$$

従って (1.5) と比較して次のように反変ベクトルを選ぶことができる：

$$\xi_a^*=\bar{\xi}^a. \tag{1.25}$$

SU(2)

U(2) の2次元表現は次式で与えられる：

$$U=e^{i\varepsilon_0}e^{i\hat{\varepsilon}\hat{\tau}/2} \tag{1.26}$$

第一の因子は位相を表わし，第二の因子は荷電空間における回転を表わす．従って U(2) から SU(2) に移れば一般形は

$$U=\exp(i\hat{\varepsilon}\hat{\tau}/2) \tag{1.27}$$

となり，これは核子に対するアイソ・スピン群の表現となる．この場合にアイソ・スピンを表わす量子化された演算子の3成分を I_1, I_2, I_3 とすれば，

$$[I_i, I_j]=i\varepsilon_{ijk}I_k \tag{1.28}$$

を満たし，$\tau_i/2$ は I_i の2次元表現である．この群は三次元空間における回転群と同型であるから，直積表現に対して次の分解が成り立つ：

$$D_I\otimes D_{I'}=D_{I+I'}\oplus D_{I+I'-1}\oplus\cdots\oplus D_{|I-I'|} \tag{1.29}$$

SU(2) は物理学の多くの分野に現れ，基本的重要性を持つが，次にこれを拡張した SU(3) について述べる．

§2　SU(3) 群

SU(2) 群はアイソ・スピンと関連して導入され，p と n とを基底に選ぶ基本表現から出発してすべての表現が求められた．さてハドロンの量子数として I_3 のみを考えれば，階数1の SU(2) によりハドロンの分類が行われるが，序章で

触れた奇妙さも含めると階数2の群が必要となる．そこで SU(3) の登場となった．

SU(3) の生成元は $3^2-1=8$ 個あり，それを $F_1, F_2, \cdots, F_8$ と書くことにする．トレースが0となる3次元対角行列には2個しか独立なものが無いから，この群の階数は2である．そこで p と n の時と同様に3成分の基底を考える．

$$\text{坂田模型} \quad : \quad \mathrm{p}, \mathrm{n}, \Lambda \tag{2.1}$$

$$\text{Gell-Mann のクォーク模型} : \quad \mathrm{u}, \mathrm{d}, \mathrm{s} \tag{2.2}$$

坂田模型とクォーク模型については序章で触れたが，以下ではクォーク模型を用いることにする．u と d とは，p と n と同様にアイソ・スピンの up, down の状態に対応し，s は奇妙さ (strangeness) を持ったクォークに対応する．ハドロンの荷電 Q は，そのアイソ・スピンの第3成分と次の関係で結ばれている：

$$Q=e\left(I_3+\frac{Y}{2}\right), \tag{2.3}$$

$$Y=B+S \tag{2.4}$$

ここに Y は超荷電 (hypercharge) と呼ばれ，一つのアイソ・スピン多重項に固有の整数であり，B は重粒子数 (baryon number)，S は奇妙さと呼ばれる．重粒子数は，核子に対して1，反核子に対して -1 であり，π 中間子，あるいは光子などを出して核子に崩壊する $\Lambda^0, \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-, \Xi^0, \Xi^-$ などに対しても1である．

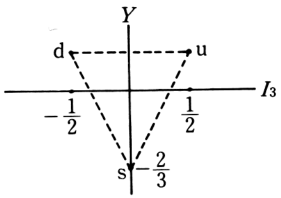
強い相互作用，電磁的相互作用に対して I_3 と S とは保存するが，弱い崩壊相互作用に対しては保存されず，1だけ変化することができる．u, d, s などのクォークを総括的に q と書いた時に，クォーク模型における中間子は $\mathrm{q}\bar{\mathrm{q}}$ という束縛状態，重粒子は qqq という束縛状態に対応すると考えられている．そこでこのような模型ではクォークの荷電や重粒子数は整数にならず，1/3の倍数の分数になってしまう．その値を表4に示す．

表 4 種々のクォークの量子数

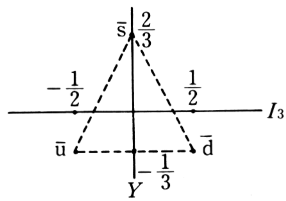
	B	I_3	S	Q/e
u	1/3	1/2	0	2/3
d	1/3	−1/2	0	−1/3
s	1/3	0	−1	−1/3

さてクォークや反クォーク，およびその束縛状態は多重項を形成するが，一つの多重項のメンバーは，I_3 と Y とで区別される．そこで多重項の構造が見易いように I_3-Y 平面上にいわゆるウエイト図を画いてみよう．

第7図　クォークのウエイト図



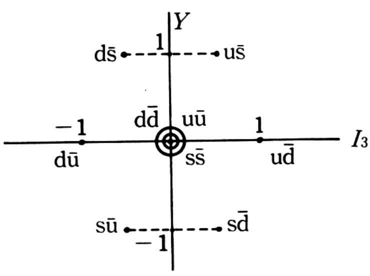
第8図　反クォークのウエイト図



ところでアイソ・スピンは横方向のメンバー u と d とを結び付ける．これを簡単に I スピンと呼ぶ．これに対して d と s，s と u とを結び付けるものとして U スピン，V スピンなどを導入することがある．これについては後に質量公式と関連して述べよう．

二つの表現の直積から生ずる表現のウエイト図は，一つのウエイト図の各粒子点に他のウエイト図の中心を重ねてやれば作られる．例えば q と q̄ との直積からは第9図のウエイト図が生ずる．この中心は三重点となる．

第9図　クォーク・反クォーク系のウエイト図



これを代数的には，$q_i\bar{q}^j$ を行列で表現して

$$D=(q_i\bar{q}^j)=\begin{pmatrix} u\bar{u} & u\bar{d} & u\bar{s} \\ d\bar{u} & d\bar{d} & d\bar{s} \\ s\bar{u} & s\bar{d} & s\bar{s} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

この直積を次のように分解する：

$$D_i{}^j = \frac{1}{3}\delta_i{}^j D_k{}^k + \left(D_i{}^j - \frac{1}{3}\delta_i{}^j D_k{}^k\right) \tag{2.6}$$

第一項はスカラーの一重項になり，第二項はトレースのないテンソルで八重項となる．この第一項の $\delta_i{}^j$ の係数は

$$\frac{1}{3}(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s}}{\sqrt{3}}\right) \tag{2.7}$$

これはSU(3)の1次元表現に属し，この中間子を 0^- の場合について考えると，$\eta'(958)$ と呼ばれる粒子に対応する．958はMeV単位の質量を表わす．そこで D の行列要素を 0^- の中間子で置き換えてみよう．例えば，

$$(2.7) \to \frac{1}{\sqrt{3}}\eta'$$

そこで八重項を調べると，非対角項はそのまま適当な中間子で置き換えられるが，対角項はまずアイソ・スピンで分解する．例えば $i=j=1$ に対応する(2.6)の第二項は，

$$\frac{1}{3}(2u\bar{u}-d\bar{d}-s\bar{s}) = \frac{1}{6}(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}) + \frac{1}{2}(u\bar{u}-d\bar{d})$$

$$\to \frac{1}{\sqrt{6}}\eta^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 \tag{2.8}$$

非対角項は，次のように置き換える：

$$u\bar{s} \to K^+, \qquad d\bar{s} \to K^0, \qquad s\bar{u} \to K^-, \qquad s\bar{d} \to \bar{K}^0 \tag{2.9}$$

このような置換えは，相互作用の詳細とは無関係に群論的な性質のみを議論するのには便利である．従って D の中で 0^- の中間子に対応する部分は

$$D(0^-) = \frac{1}{\sqrt{3}}\eta' + \begin{pmatrix} \dfrac{\eta^0}{\sqrt{6}} + \dfrac{\pi^0}{\sqrt{2}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & \dfrac{\eta^0}{\sqrt{6}} - \dfrac{\pi^0}{\sqrt{2}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\eta^0 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

これに対応する直積の既約表現への分解は次のように書かれる：

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \tag{2.11}$$

ただし $\mathbf{3}$ はクォークの属する3次元表現，$\bar{\mathbf{3}}$ は反クォークの属する3次元表現である．1^- に対しても似たような分解ができる．

$$D(1^-)=\frac{1}{\sqrt{3}}\omega+\begin{pmatrix}\frac{\phi^0}{\sqrt{6}}+\frac{\rho^0}{\sqrt{2}} & \rho^+ & K^{*+}\\ \rho^- & \frac{\phi^0}{\sqrt{6}}-\frac{\rho^0}{\sqrt{2}} & K^{*0}\\ K^{*-} & \overline{K}^{*0} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\phi^0\end{pmatrix} \tag{2.12}$$

SU(3) の生成元

SU(2) のスピノール表現，すなわち 2 次元表現における生成元は

$$I_i\rightarrow\frac{1}{2}\tau_i \tag{2.13}$$

で与えられる．それでは SU(3) についてはどうであろうか？　この問題を考えるために $D(0^-)$ の 2×2 の部分を観察すると，アイソ・スピン 1 の部分は

$$\begin{pmatrix}\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} & \pi^+\\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\pi^3 & \pi^1-i\pi^2\\ \pi^1+i\pi^2 & -\pi^3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\tau}\hat{\pi} \tag{2.14}$$

と書くことができる．そこで八重項の部分をエルミートの場を用いて

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_i)_a{}^bM^i=\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\lambda}\hat{M} \tag{2.15}$$

という形に書いてみよう．Mは8成分のエルミートな中間子場を表わしている．

そこで例えば 0^- に対しては次のような番号付けをすることにしよう：

$$\begin{pmatrix}\frac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\frac{\eta^0}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+\\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\frac{\eta^0}{\sqrt{6}} & K^0\\ K^- & \overline{K}^0 & -\frac{2\eta^0}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}M^3+\frac{M^8}{\sqrt{3}} & M^1-iM^2 & M^4-iM^5\\ M^1+iM^2 & -M^3+\frac{M^8}{\sqrt{3}} & M^6-iM^7\\ M^4+iM^5 & M^6+iM^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}M^8\end{pmatrix} \tag{2.16}$$

しからば τ_i の一般化としての λ_i は，(2.13) に対応して 3 次元表現では SU(3) の演算子としての生成元 F_i を次のように置き換えることができる：

$$F_i \to \frac{\lambda_i}{2} \tag{2.17}$$

この 8 個の行列 λ_i は，Gell-Mann の選び方では次のように与えられる：

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix} \tag{2.18}$$

構造定数はこの λ_i を用いて次の式から求められる：

$$\left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2}\right]=if_{ijk}\frac{\lambda_k}{2} \tag{2.19}$$

この 8 個の λ はすべてエルミート行列であり，かつ次式で規格化されている：

$$\mathrm{Tr}(\lambda_i\lambda_j)=2\delta_{ij} \tag{2.20}$$

この選び方は大切であり，構造定数の対称性などはこの式から出される．更に (2.20) より反交換関係も次の形に書けることが分かる：

$$\left\{\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2}\right\}=\frac{1}{3}\delta_{ij}+d_{ijk}\frac{\lambda_k}{2} \tag{2.21}$$

これによりもう一つの構造定数が導入される．

上に導入した f と d とは，それぞれ添字 i, j, k について完全反対称，完全対称という性質を持っている．それには (2.20) を活用する．

$$4if_{ijk}=\mathrm{Tr}([\lambda_i, \lambda_j]\lambda_k)=\mathrm{Tr}(\lambda_j[\lambda_k, \lambda_i])=\mathrm{Tr}(\lambda_i[\lambda_j, \lambda_k]) \tag{2.22}$$

この式は f が完全反対称であることを示している．同様にして d の完全対称性は次の式から明らかである：

$$4d_{ijk}=\mathrm{Tr}(\{\lambda_i, \lambda_j\}\lambda_k)=\mathrm{Tr}(\lambda_j\{\lambda_k, \lambda_i\})=\mathrm{Tr}(\lambda_i\{\lambda_j, \lambda_k\}). \tag{2.23}$$

***I, U, V* スピン**

SU(3) 代数には種々の SU(2) 代数を部分代数として含んでいる． そしてそれらを活用することにより多くの有用な結果を出すことができる．

まずクォークについて (2.3) 式の内容を調べると次の関係を得る:

$$F_3=I_3, \qquad F_8=\frac{\sqrt{3}}{2}Y \tag{2.24}$$

従ってクォークに対しては

$$Q=e\left(F_3+\frac{F_8}{\sqrt{3}}\right) \tag{2.25}$$

この関係式は，クォークと反クォークから合成されるすべてのハドロンに対して成り立つことになる．そこで I, U, V スピンを次式で定義する．

$$\begin{aligned} &I_\pm=F_1\pm iF_2, \qquad U_\pm=F_6\pm iF_7, \qquad V_\pm=F_4+iF_5, \\ &I_3=F_3, \qquad U_3=-\frac{1}{2}F_3+\frac{\sqrt{3}}{2}F_8, \qquad V_3=-\frac{1}{2}F_3-\frac{\sqrt{3}}{2}F_8 \end{aligned} \tag{2.26}$$

しからば，I, U, V はそれぞれ SU(2) 代数を形成している． またこの三代数の間には次の条件が満たされている:

$$I_3+U_3+V_3=0. \tag{2.27}$$

これらの間の交換関係は容易に示されるように,

$$\begin{aligned} &[I_3, I_\pm]=\pm I_\pm, \quad [I_3, U_\pm]=\mp\frac{1}{2}U_\pm, \quad [I_3, V_\pm]=\mp\frac{1}{2}V_\pm, \\ &[U_3, I_\pm]=\mp\frac{1}{2}I_\pm, \quad [U_3, U_\pm]=\pm U_\pm, \quad [U_3, V_\pm]=\mp\frac{1}{2}V_\pm, \\ &[V_3, I_\pm]=\mp\frac{1}{2}I_\pm, \quad [V_3, U_\pm]=\mp\frac{1}{2}U_\pm, \quad [V_3, V_\pm]=\pm V_\pm, \\ &[Y, I_\pm]=0, \quad [Y, U_\pm]=\pm U_\pm, \quad [Y, V_\pm]=\pm V_\pm, \\ &[I_+, I_-]=2I_3, \quad [U_+, U_-]=2U_3, \quad [V_+, V_-]=2V_3, \\ &[I_\pm, U_\pm]=\pm V_\mp, \quad [U_\pm, V_\pm]=\pm I_\mp, \quad [V_\pm, I_\pm]=\pm U_\mp \qquad \text{(複号同順)} \end{aligned} \tag{2.28}$$

三体クォーク系

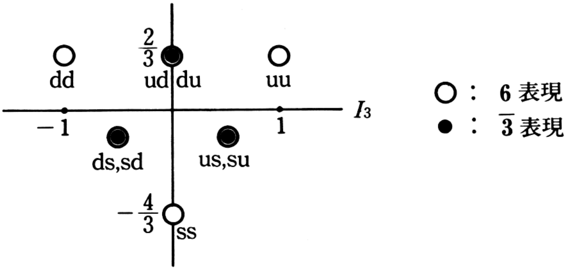
既に見たように中間子は $q\bar{q}$ という束縛状態として作られる．ところで重粒子，あるいはバリオンは qqq という束縛状態と考えられる．そこでまず二体クォーク qq に対するウエイト図から始めよう．

まず (2.11) に対応して次のような直積の分解ができる:

$$3\otimes3=\bar{3}\oplus6 \tag{2.29}$$

第10図に現れる6点の中で3点は二重点なので，そこでは二状態の適当な一

第10図 二体クォーク系のウエイト図



次結合を作らなければならない．それには対称および反対称な結合を作れば良いことになる．

$$q_i q_j = T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) = \frac{1}{2}T_{[ij]} + \frac{1}{2}T_{\{ij\}} \tag{2.30}$$

ところで反対称なものは，次のような反変ベクトルと同値である：

$$\varepsilon^{ijk} T_{[ij]} = T^k \tag{2.31}$$

これは3次元表現で変換性に関しては $\bar{q}^k$ と同じであり，従って $\bar{\mathbf{3}}$ 表現となる．それに反して対称部分は6成分を持つので **6** 表現となり，(2.29) が成り立つ．

上に使った ε の SU(3) に対する変換性を見てみよう．

$$\varepsilon'_{ijk} = U_i{}^l U_j{}^m U_k{}^n \varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ijk} \det U$$

従って $\det U = 1$ より

$$\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \tag{2.32}$$

同様にして

$$\varepsilon^{ijk\prime} = \varepsilon^{ijk}. \tag{2.33}$$

そこで $\bar{\mathbf{3}}$ 表現に属する状態と **6** 表現に属するものとを列挙すると，

$$\{\bar{3}\} \quad I=0: \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)\,;$$

$$I=\frac{1}{2}: \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(us - su), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sd) \tag{2.34}$$

$$\{6\} \quad I=0: \quad ss$$

$$I=\frac{1}{2}: \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(us + su), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(ds + sd)$$

$$I=1: \quad uu, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du), \quad dd \tag{2.35}$$

さて次に一般のテンソルを考える.

$$T^{(p)}_{(q)}=T^{\alpha\beta\cdots\gamma}_{ij\cdots k},\quad 例えば\quad \bar{q}^{\alpha}\bar{q}^{\beta}\cdots\bar{q}^{\gamma}q_iq_j\cdots q_k \tag{2.36}$$

そこで既約表現を考えよう. 既約表現とは次のようなテンソル

$$\delta_i{}^j,\quad \varepsilon^{ijk},\quad \varepsilon_{ijk} \tag{2.37}$$

との縮約によって低い次数のテンソルに帰することのできないものである. 可約なテンソルは次の例のように縮約により低い次数に下げられる:

$$\delta_\alpha{}^i T^{\alpha\beta\cdots\delta}_{ij\cdots l}=B^{\beta\cdots\delta}_{j\cdots l},$$
$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta}T^{\alpha\beta\cdots\delta}_{ij\cdots l}=C^{\gamma\cdots\delta}_{\mu ij\cdots l},$$
$$\varepsilon^{mij}T^{\alpha\beta\cdots\delta}_{ij\cdots l}=D^{m\alpha\beta\cdots\delta}_{k\cdots l}$$

Tが既約ならば上の式の右辺のテンソルは消えることになる. その条件としてTは $\alpha,\beta,\cdots$ についても, $i,j,\cdots$ についても対称であり, かつ

$$T^{i\beta\cdots\delta}_{ij\cdots l}=0 \tag{2.38}$$

のようにトレースが消えることであることが分かる.

さて $T^{(p)}_{(q)}$ が上の条件を満たしていれば一つの既約表現 $D(p,q)$ を与える. ただしpは上添字の数, qは下添字の数である. しからば $D(p,q)$ の次元 Nは次式で与えられる:

$$N=(1+p)(1+q)\left[1+\frac{1}{2}(p+q)\right]. \tag{2.39}$$

(証明) まずp個の添字について対称なテンソルは何個あるか? 添字として1がx個, 2がy個, 3がz個ある場合を考える. そして x,y,z の選び方が何通りあるかを数えれば良い. これは結局 $x+y+z=p$ の解の数を数えることである. xとしては $x=0,1,\cdots,p$ が可能である. そこでxを固定して

$$y+z=p-x \tag{2.40}$$

の解の数を調べると $(p-x+1)$ 個ある. そこで全体の数は

$$\sum_{x=0}^{p}(p-x+1)=\frac{1}{2}(p+1)(p+2) \tag{2.41}$$

従って上のp個の添字についても下のq個の添字についても対称なテンソルの数は

$$\frac{1}{4}(p+1)(p+2)(q+1)(q+2) \tag{2.42}$$

そこでトレースが消えるという条件を考える. それにはpを$p-1$に, qを

$q-1$ にした時に対称なテンソルの数を減ずれば良い．そこで

$$N=\frac{1}{4}(p+1)(p+2)(q+1)(q+2)-\frac{1}{4}p(p+1)q(q+1)$$
$$=(1+p)(1+q)\left[1+\frac{1}{2}(p+q)\right]$$

となり，(2.39) 式が証明されたことになる．そこで種々の $D(p,q)$ の次元を調べてみると次のような例を得る：

$$\begin{aligned}
&D(0,0)=\{\mathbf{1}\}, \quad &&D(1,1)=\{\mathbf{8}\}, \quad &&D(0,3)=\{\mathbf{10}\},\\
&D(0,1)=\{\mathbf{3}\}, &&D(0,2)=\{\mathbf{6}\}, &&D(3,0)=\{\overline{\mathbf{10}}\}\\
&D(1,0)=\{\overline{\mathbf{3}}\}, &&D(2,0)=\{\overline{\mathbf{6}}\}, &&\cdots
\end{aligned} \tag{2.43}$$

そこで初めの問題に戻り，三体クォーク系の表現を調べると，

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}=(\overline{\mathbf{3}}\oplus\mathbf{6})\otimes\mathbf{3}=(\mathbf{1}\oplus\mathbf{8})\oplus(\mathbf{8}\oplus\mathbf{10}) \tag{2.44}$$

核子 p, n などはこの中の 8 次元表現に属すると考えられている．また π 中間子・核子散乱に現れるいわゆる Δ という核子の励起状態は 10 次元表現に属すると考えられている．

次に (2.10) や (2.12) にならって核子を含む 8 次元表現を行列で表現すると，

$$\mathcal{B}=\begin{pmatrix}
\dfrac{\Sigma^0}{\sqrt{2}}+\dfrac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p\\
\Sigma^- & -\dfrac{\Sigma^0}{\sqrt{2}}+\dfrac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & n\\
\Xi^- & \Xi^0 & -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\Lambda^0
\end{pmatrix} \tag{2.45}$$

またバリオン 8 重項から反バリオン 8 重項を出すには，荷電共役 $\mathcal{C}$ を使って

$$\mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}^T\mathcal{C}=C\overline{\mathcal{B}} \tag{2.46}$$

これは (2.9.1) の一般化であり，T は 3×3 行列に関する転置を表わす．また (2.45) にならって，$D(0^-)$ と $D(1^-)$ の行列部分をそれぞれ $\mathcal{P},\mathcal{V}$ などと書く．

今までの取扱いでは，クォークは基本表現として，他の表現を導くための数学的補助手段であった．物理的にはクォークが無くても 8 次元表現のバリオン，同じく 8 次元表現の中間子を組み合わせれば，観測にかかるすべての表現を導き出すことができる．バリオンの 3 次元表現から出発する坂田模型に対比してこれを八道説と呼ぶ．

質量公式

SU(3) 群は厳密な意味での対称群ではなく，現実の世界ではこの対称性は著しく破られている．しかしながらこの破れを摂動論的に扱うことにより定性的に，かつ半定量的に有意な結果が得られている．従って以下ではクォーク模型とは無関係な摂動計算により，ハドロンの質量差の問題，および磁気能率の問題を調べる．この章の終りの方でクォーク模型に基づいた対応する計算を示す．

ここで導入する最も大切な仮定は，ハミルトニアンを SU(3) に対して不変な部分と不変でない部分とに分けた時に，すなわち

$$H=H_{\mathrm{inv}}+H_{\mathrm{SB}} \tag{2.47}$$

において対称性を破る部分 (Symmetry-Breaking part) H_{SB} は，F_8 と同じ変換性を持つということと，この項を摂動として扱えるということである．さて，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}F_8=U_3+\frac{1}{2}I_3 \tag{2.48}$$

そこで次の U スピン三重項を導入する：

$$\mathrm{n},\quad -\frac{1}{2}\Sigma^0+\frac{\sqrt{3}}{2}\Lambda^0,\quad \Xi^0 \tag{2.49}$$

しからば，8 次元表現での U_3 と I_3 との行列要素は

$$\langle n|U_3|n\rangle=1,$$
$$\langle -\frac{1}{2}\Sigma^0+\frac{\sqrt{3}}{2}\Lambda^0|U_3|-\frac{1}{2}\Sigma^0+\frac{\sqrt{3}}{2}\Lambda^0\rangle=0,$$
$$\langle \Xi^0|U_3|\Xi^0\rangle=-1, \tag{2.50}$$
$$\langle n|I_3|n\rangle=-\frac{1}{2},$$
$$\langle -\frac{1}{2}\Sigma^0+\frac{\sqrt{3}}{2}\Lambda^0|I_3|-\frac{1}{2}\Sigma^0+\frac{\sqrt{3}}{2}\Lambda^0\rangle=0,$$
$$\langle \Xi^0|I_3|\Xi^0\rangle=\frac{1}{2} \tag{2.51}$$

従って (2.48) と同じ変換性を持つ H_{SB} に対しては

$$\langle n|H_{\mathrm{SB}}|n\rangle+\langle \Xi^0|H_{\mathrm{SB}}|\Xi^0\rangle$$
$$=2\langle -\frac{1}{2}\Sigma^0+\frac{\sqrt{3}}{2}\Lambda^0|H_{\mathrm{SB}}|-\frac{1}{2}\Sigma^0+\frac{\sqrt{3}}{2}\Lambda^0\rangle$$
$$=\frac{1}{2}\langle \Sigma^0|H_{\mathrm{SB}}|\Sigma^0\rangle+\frac{3}{2}\langle \Lambda^0|H_{\mathrm{SB}}|\Lambda^0\rangle \tag{2.52}$$

従って，質量のずれを表わす各対角要素に共通の不変部分の質量を加えれば，

$$m(n)+m(\Xi)=\frac{1}{2}m(\Sigma)+\frac{3}{2}m(\Lambda) \tag{2.53}$$

また 10 次元表現に対して U スピン四重項

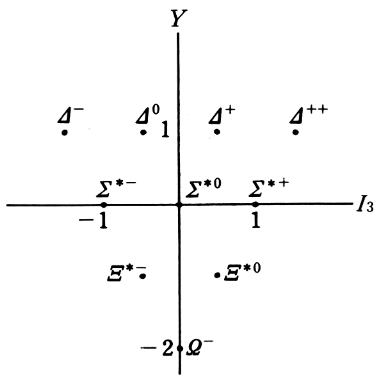
$$\Delta^-,\quad \Sigma^{*-},\quad \Xi^{*-},\quad \Omega^- \tag{2.54}$$

を考えて同様な計算をすると，

$$m(\Delta)-m(\Sigma^*)=m(\Sigma^*)-m(\Xi^*)=m(\Xi^*)-m(\Omega) \tag{2.55}$$

これらの質量公式は Gell-Mann の公式と呼ばれる． 10 次元表現に対するウエイト図は第 11 図に示される．この公式に基づき Ω^- は 1964 年に発見された．

第 11 図　十重項に対するウエイト図



また大久保は，一つの SU(3) 多重項の中での粒子の質量はアイソ・スピン I と超荷電 Y を用いると一般に次の式で表わされることを証明した．

$$m=a+bY+c\left[I(I+1)-\frac{Y^2}{4}\right] \tag{2.56}$$

この式はボゾンでもフェルミオンでも成り立つが， ボゾンの時には m^2 に対して上の式を書いた方が実験との一致が良いと考えられている．

バリオンの磁気能率

上述の例では対称性を破る項 H_{SB} は Y と同じ変換性を持つと仮定したが，そこでは考えられていなかった電磁的相互作用は Q と同じ変換性を持つと考えられる．従って磁気能率も同じ変換性を持つと考えられる．ところで Q は U スピンと可換である．

$$[U_{\pm}, Q]=0, \qquad [U_3, Q]=0 \tag{2.57}$$

また電磁的相互作用はアイソ・スピン一重項と三重項との和であるから，

$$\mu(\Sigma^+)+\mu(\Sigma^-)=2\mu(\Sigma^0) \tag{2.58}$$

ただし $\mu(\Sigma)$ は Σ の磁気能率を表わし，$\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$ がアイソ・スピン三重項に属することを用いている．

ところで U スピンの一つの多重項に属する粒子の磁気能率は (2.57) によりすべて等しいから，バリオン八重項を U スピンで分類すると，

U スピン一重項 ： $U_0^0=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\Sigma^0+\Lambda^0)$

U スピン二重項 ： Σ^+, p および Ξ^-, Σ^-

U スピン三重項 ： Ξ^0, $U_1^0=\frac{1}{2}(\Sigma^0-\sqrt{3}\Lambda^0)$, n

これから直ちに次の等式を得る：

$$\mu(\Sigma^+)=\mu(p), \quad \mu(\Xi^-)=\mu(\Sigma^-), \quad \mu(\Xi^0)=\mu(U_1^0)=\mu(n) \tag{2.59}$$

さらに Q の固有値を八重項のすべてのメンバーについて加えると消えるから，

$$\sum_{\{8\}}\mu=0 \tag{2.60}$$

(2.58)，(2.59)，(2.60) で六条件があるので，8個の磁気能率を2個の磁気能率，例えば $\mu(p)$ と $\mu(n)$ とで表わすことができる．その際に粒子として U_0^0, U_1^0 を用いるよりも Σ^0, Λ^0 を用いた方が便利なので，前者を μ の固有状態として

$$\langle U_0^0|\mu|U_1^0\rangle=0 \tag{2.61}$$

という条件を用いると，次のような関係を得る：

$$2\mu(\Sigma^0\Lambda^0)\equiv 2\langle\Sigma^0|\mu|\Lambda^0\rangle=\sqrt{3}(\mu(\Sigma^0)-\mu(\Lambda^0)), \tag{2.62}$$

$$\mu(U_1^0)=\frac{3}{2}\mu(\Lambda^0)-\frac{1}{2}\mu(\Sigma^0) \tag{2.63}$$

この中で $\mu(\Sigma^0\Lambda^0)$ は遷移磁気能率と呼ばれ，$\Sigma^0\to\Lambda^0+\gamma$ という崩壊に寄与する．そこですべてのメンバーの磁気能率を求めると，

$$\mu(\Sigma^+)=\mu(p), \quad \mu(\Sigma^0)=-\frac{1}{2}\mu(n), \quad \mu(\Sigma^-)=-\mu(p)-\mu(n),$$

$$\mu(\Lambda^0)=\frac{1}{2}\mu(n), \quad \mu(\Xi^0)=\mu(n), \quad \mu(\Xi^-)=-\mu(p)-\mu(n) \tag{2.64}$$

ここに $e/2m_p$，いわゆる nuclear-magneton，を単位として

$$\mu(p)=2.79, \qquad \mu(n)=-1.91 \tag{2.65}$$

を用いると，すべてのバリオン八重項のメンバーの磁気能率が計算できて，実験値と比較しうる．それを表5で与える．

表 5 バリオン八重項メンバーの磁気能率

	$\mu(\Lambda^0)$	$\mu(\Sigma^+)$	$\mu(\Sigma^-)$	$\mu(\Xi^-)$	$\mu(\Xi^0)$
理論値	−0.96	2.79	−0.88	−0.88	−1.91
実験値	−0.613 ±0.004	2.38 ±0.02	−1.10 ±0.05	−1.85 ±0.75	−1.250 ±0.014

理論値と実験値との一致は定性的には良いが，定量的にはあまり良くない．もっと定量的な議論はクォーク模型を用いて後に再び行う．いずれにせよここまでの議論は群論的なもので直接クォーク模型には基づいていない．

SU(3) 不変な相互作用

今までにバリオン，擬スカラー中間子，ベクトル中間子などの八重項について触れた．これらは 3×3 の行列 $\mathcal{B}, \mathcal{P}, \mathcal{V}$ などを用いて表現されている．そこで SU(3) の変換 (1.24) に対する変換性を考える．(1.24) の変換に対して (2.5) で与えられる行列 D の変換は

$$D \to UDU^{-1} \tag{2.66}$$

従って $\mathcal{B}, \mathcal{P}, \mathcal{V}$ なども (2.66) と同じ変換を受ける．従ってこれらの行列の積のトレースは SU(3) の変換に対して不変である．また荷電共役に対しては

$$\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^T\mathcal{C}=\mathcal{P}, \qquad \mathcal{C}^{-1}\mathcal{V}^T\mathcal{C}=-\mathcal{V} \tag{2.67}$$

これはバリオンの場合の (2.46) に対応する．

さて湯川型相互作用で SU(3) 不変なものは，$\mathcal{M}=\mathcal{P}$ または $\mathcal{V}$ に対して

$$\mathcal{H}_{\mathrm{int}}=\sqrt{2}D\,\mathrm{Tr}\,(\bar{\mathcal{B}}\{\mathcal{M},\mathcal{B}\})+\sqrt{2}F\,\mathrm{Tr}\,(\bar{\mathcal{B}}[\mathcal{M},\mathcal{B}]) \tag{2.68}$$

D とか F とかと書いたのは，トレースを計算すると種々のメンバーを結び付ける Clebsch-Gordan 係数として，d とか f が出てくるからである．ただし擬スカラー中間子の場合の湯川型結合定数 G，(5.4.43) 参照，は

$$G=D+F \tag{2.69}$$

で与えられる．ところで

$$\mathcal{V} \to \mathcal{P}+\mathcal{P}, \qquad \mathcal{V} \to \mathcal{V}+\mathcal{P} \tag{2.70}$$

に相当する相互作用を作ってみると，それぞれ F 型および D 型のみしかでき

ないことが容易に分かる.

Casimir 演算子

今まで八重項に対応する行列 $\mathcal{B}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{V}$ などを導入したが，その行列要素に対応するメンバー，例えば (2.16) における M を生成元 F で置き換えたものを考えて，それを $\mathcal{F}$ と書くことにする.

$$\mathcal{F}=\sum_{i=1}^{8}\frac{\lambda_i}{\sqrt{2}}F_i \tag{2.71}$$

SU(3) の変換に対して F_i は変換されるが，その変換法則は再び (2.66) で与えられることになる．そこで

$$\mathrm{Tr}\,\mathcal{F}^2, \quad \mathrm{Tr}\,\mathcal{F}^3 \tag{2.72}$$

などを考えると，これらは SU(3) の変換に対して不変であり，従って

$$[F_i, \mathrm{Tr}\,\mathcal{F}^n]=0 \tag{2.73}$$

このように生成元 F_i の多項式ですべての F_i と交換するものを Casimir 演算子と呼ぶ．定義から明らかなように，一つの既約表示に属するすべてのメンバーに対して Casimir 演算子は同じ固有値を持つ．3 次元空間での回転群に対する

$$J^2=J_x{}^2+J_y{}^2+J_z{}^2 \tag{2.74}$$

は Casimir 演算子の例であり，その固有値 $J(J+1)$ は既約表示を指定する.

さて SU(3) の場合には，$\mathrm{Tr}\,\mathcal{F}^n$ の中で独立なのは 2 個のみであり，

$$C_n=\mathrm{Tr}\,\mathcal{F}^n \tag{2.75}$$

と置くと，異なる n に対して次の漸化式が成り立つことは容易に示される：

$$C_{n+3}=\frac{1}{2}C_2C_{n+1}+\frac{1}{3}C_3C_n \tag{2.76}$$

そして $C_1=0$ を用いると，すべての C_n が C_2, C_3 により表わされることになる．従って C_2, C_3 を独立な Casimir 演算子として選ぶことができる．例えば C_4 は次のように C_2 で表わされる：

$$\mathrm{Tr}\,\mathcal{F}^4=\frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\mathcal{F}^2)^2, \qquad C_4=\frac{1}{2}C_2{}^2 \tag{2.77}$$

そこで C_2, C_3 を F_i で表現すると，

$$C_2=\mathrm{Tr}\,\mathcal{F}^2=\sum_i F_i{}^2, \qquad C_3=\mathrm{Tr}\,\mathcal{F}^3=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i,j,k}d_{ijk}F_iF_jF_k \tag{2.78}$$

与えられた既約表現 R に対する C_2 の固有値を $C_2(R)$，特に随伴表現に対する

ものを $C_2(G)$ と書く．今 SU(3) 群に対しては，既約表現は $D(p,q)$ のように表わされることを知ったが，$R=D(p,q)$ に対しては

$$C_2(R)=\frac{1}{3}(p^2+pq+q^2)+p+q \tag{2.79}$$

であることが知られている．この結果は後にゲージ理論において利用される．

本節においてはクォークを数学的補助手段として用い，SU(3) 群をハドロンの分類に利用する方法を議論したが，後の節でクォークを物理的実体と考えなければならない根拠を与える．

§3 π中間子崩壊相互作用の普遍性

今までハドロンの分類について述べてきたが，次にレプトンのことにつき考えてみよう．既に序章で述べた如く，レプトンとは電子のように強い相互作用を持たないフェルミオンのことである．これには電子やミューオンのように荷電を持つものと，中性のニュートリノとがある．そしてニュートリノには常に電子と共に現れる電子ニュートリノ ν_e と，ミューオンと共に現れるミューオン・ニュートリノ ν_μ とがある．(e,ν_e) という対を第一世代，(μ,ν_μ) という対を第二世代と呼び，それぞれの世代のレプトン数は保存しているように見える．ところで 1975 年に Pearl は第三の荷電レプトンを発見し，これをタウオンと呼び，τ で表わす．当然タウオンと共に現れるタウオン・ニュートリノ ν_τ の存在が考えられる．従って現在我々は三世代のレプトンの存在を知っている．

$$(e,\nu_e),\quad (\mu,\nu_\mu),\quad (\tau,\nu_\tau) \tag{3.1}$$

荷電レプトンの質量は MeV を単位として

$$\begin{aligned} m_e&=0.5110034 & m_\mu&=105.65943 & m_\tau&=1784.2\\ &\pm 0.0000014, & &\pm 0.00018, & &\pm 3.2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

である．ところで π 中間子，あるいはパイオンの質量は

$$\begin{aligned} m_\pi&=139.5637\\ &\pm 0.0007 \end{aligned} \tag{3.3}$$

であるので，パイオンは第一世代と第二世代のレプトン対に崩壊し得る．

$$\pi^+\to\mu^++\nu_\mu,\qquad \pi^+\to e^++\nu_e \tag{3.4}$$

しかしながらタウオンは逆にパイオンに崩壊し得る．

$$\tau^+ \to \pi^+ + \bar{\nu}_\tau \tag{3.5}$$

そこでレプトン $l\,(l=e, \mu, \tau)$ と l ニュートリノ ν_l と π との相互作用を次の形と仮定する:

$$\mathscr{H}_{\text{decay}} = \frac{ig}{m_\pi}\bar{\psi}_{\nu_l}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_l \cdot \partial_\lambda \varphi + \text{h.c.} \tag{3.6}$$

第8章§2では結合定数 g が第一世代と第二世代とに対して等しいと仮定して (3.4) の分岐比を計算して，(8.2.24) を得た．すなわち，

$$\frac{\Gamma(\pi^+ \to e^+ + \nu_e)}{\Gamma(\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu)} = 1.29 \times 10^{-4} \tag{3.7}$$

この比は実験値 $(1.266 \pm 0.023) \times 10^{-4}$ と一致している．そこで第三世代についても同じであると仮定してみよう．(3.5) に対する崩壊幅は

$$\Gamma(\tau^+ \to \pi^+ + \bar{\nu}_\tau) = \left(\frac{g^2}{8\pi}\right) m_\tau \left(\frac{m_\tau}{m_\pi}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{m_\pi}{m_\tau}\right)^2\right] \tag{3.8}$$

この場合には (3.4) とは違って τ^+ のスピンについては和をとらず，平均をとっているので $g^2/4\pi$ が $g^2/8\pi$ に変わっている．そこで (8.2.22) との比をとると g^2 が消去される．そこでその比を計算すると，理論的に期待される比の値は，

$$\frac{\Gamma(\tau^+ \to \pi^+ + \bar{\nu}_\tau)}{\Gamma(\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu)} \approx 1.0 \times 10^4 \tag{3.9}$$

この比を実験的に調べるために，次の変形を行う:

$$\frac{\Gamma(\tau^+ \to \pi^+ + \bar{\nu}_\tau)}{\Gamma(\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu)} = \frac{\Gamma(\tau^+ \to \text{all})}{\Gamma(\pi^+ \to \text{all})} \cdot r(\tau^+ \to \pi^+ + \nu_\tau)$$

$$= \frac{\tau(\pi^+)}{\tau(\tau^+)} \cdot r(\tau^+ \to \pi^+ + \nu_\tau) \tag{3.10}$$

ここに $\tau(\pi^+)$，$\tau(\tau^+)$ はそれぞれ π^+ と τ^+ との平均寿命である．

$$\tau(\pi^+) = \begin{pmatrix} 2.6030 \\ \pm 0.0023 \end{pmatrix} \times 10^{-8}\,\text{sec}, \qquad \tau(\mu^+) = \begin{pmatrix} 2.19714 \\ \pm 0.00007 \end{pmatrix} \times 10^{-6}\,\text{sec},$$

$$\tau(\tau^+) = (3.4 \pm 0.5) \times 10^{-13}\,\text{sec} \tag{3.11}$$

これらの値を (3.10) に代入し，(3.9) と等しいと置くと，

$$r(\tau^+ \to \pi^+ + \nu_\tau) = (13 \pm 2)\% \tag{3.12}$$

ただし $r(\tau^+ \to \pi^+ + \nu_\tau)$ は τ^+ が (3.5) の様式で崩壊する分岐比を表す．π^+ の場合にはほとんどすべての π^+ が $\mu^+ + \nu_\mu$ に崩壊するとしている．(3.12) は実験

値である (10.7±1.6)% と矛盾しない．従って結合定数 g は世代によらないという π のレプトン崩壊相互作用の普遍性が確認されたと言って良いであろう．

§4 ビーター崩壊

前節で与えた相互作用 (3.6) は実は現象論的なものであり，この相互作用はもっと基本的な相互作用から導出されると考えられていた．ゲージ理論の誕生以前には弱い相互作用の最も基本的なものは Fermi 型の相互作用であり，そしてその最も古く典型的なものが原子核のビーター崩壊に関連したものであった．

ビーター崩壊の理論は1934年に Fermi によって提唱され，

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e \tag{4.1}$$

という素過程が導入された．そこでこの相互作用を次式で与える：

$$\mathscr{H}_\beta = \sum_j C_j \overline{\psi}_p O_j \psi_n \cdot \overline{\psi}_e O_j \psi_\nu + \sum_j C'_j \overline{\psi}_p O_j \psi_n \cdot \overline{\psi}_e O_j \gamma_5 \psi_\nu + \text{h.c.} \tag{4.2}$$

ここに O_j としては第2章§9で導入したスカラー，ベクトル，テンソル，軸性ベクトル，擬スカラー，あるいは略称 SVTAP に相当する Dirac 行列を表わしている．また第6章§7で導入した Pauli-Gürsey 群の立場から見ると，この相互作用は十分一般的でなくて，(4.2) において ψ_ν を $C\overline{\psi}_\nu$ で置き換えたような項も加えなければならない．しかしここでは上のように制限された形の相互作用のみを考えることにしよう．しからばここでは Pauli-Gürsey 群の部分群のみを考えることになる．

$$\mathscr{G}_1 \times \mathscr{G}_2 \supset \mathscr{G}_F \tag{4.3}$$

そして $\mathscr{G}_F$ における位相変換は，次の形に表わされる：

$$\psi \to e^{i\alpha + i\beta\gamma_5}\psi, \qquad \overline{\psi} \to \overline{\psi} e^{-i\alpha + i\beta\gamma_5} \tag{4.4}$$

従ってこの変換は次のような結合定数の変換を惹起する：

$$C_j \to e^{i\alpha}(C_j \cos\beta + iC'_j \sin\beta), \qquad C'_j \to e^{i\alpha}(C'_j \cos\beta + iC_j \sin\beta) \tag{4.5}$$

このような変換の下で不変な結合定数の組み合わせは

$$C_i^* C_j + C_i'^* C'_j \tag{4.6}$$

であり，実験ではこの組み合わせのみが測定されることになる．(4.2) に C'_j を

含む項を導入し，パリティ非保存の可能性を考えたのは Lee と Yang であり，1956年のことである．彼らは以前の C'_j のない理論での種々の計算値で

$$C_i^* C_j \to C_i^* C_j + C_i'^* C'_j \tag{4.7}$$

という置換えが導入されるだけで何も今までに知られているビーター崩壊の実験結果と矛盾しないことを指摘したのである．

更に (4.4) の変換を制限すると，(4.5) の C_j, C'_j には不動点が存在する．

$$\alpha=-\beta \text{ の時，} C_j=C'_j\text{；}\qquad \alpha=\beta \text{ の時 } C_j=-C'_j \tag{4.8}$$

不動点ということは相互作用 (4.2) がこの制限された変換に対して不変であるということであって，第6章§6で議論したように，制限された変換 (6.27) の下での不変性に帰する．第2章§7で示したように実験は

$$C_j=C'_j \tag{4.9}$$

となることを示している．従って (4.2) は次のように書かれる：

$$\mathscr{H}_\beta=\sum_j C_j\overline{\psi}_p O_j\psi_n\cdot\overline{\psi}_e O_j(1+\gamma_5)\psi_\nu+\text{h.c.} \tag{4.10}$$

このようにニュートリノは左巻きとなる．Lee と Yang とは，この C_j と O_j とを表6のように選んだ．

表6　C_j と O_j の選び方

型	スカラー	ベクトル	テンソル	軸性ベクトル	擬スカラー
C_j	C_S	C_V	C_T	C_A	C_P
O_j	1	γ_μ	$\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_{\mu\nu}$	$-i\gamma_\mu\gamma_5$	γ_5

次にどのような結合定数が存在するかを決めてみよう．ビーター崩壊には e^- を出すものと e^+ とを出すものがあるが，放出される $e^\mp$ のヘリシティ $\boldsymbol{\sigma p}/p$ の結合定数に対する依存性を表わす式として次のものがある．

$$h(e^\pm)=\mp\frac{|\langle 1\rangle|^2(|C_S|^2-|C_V|^2)+|\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle|^2(|C_T|^2-|C_A|^2)}{|\langle 1\rangle|^2(|C_S|^2+|C_V|^2)+|\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle|^2(|C_T|^2+|C_A|^2)}\left(\frac{v}{c}\right) \tag{4.11}$$

この結果を出すのに VA 型と ST 型との間の Fierz 干渉項と呼ばれる項，およびクーロン補正は無視している．また $\langle 1\rangle$ と $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle$ とは Fermi 型および Gamow-Teller 型の核行列要素である．すなわち $\boldsymbol{\psi}$ を非相対論的 Heisenberg 演算子として

$$\langle 1\rangle=\langle B|\boldsymbol{\psi}_p^\dagger(0)\boldsymbol{\psi}_n(0)|A\rangle,\qquad \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle=\langle B|\boldsymbol{\psi}_p^\dagger(0)\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\psi}_n(0)|A\rangle \tag{4.12}$$

上の公式を簡単のためにスカラー型相互作用のみしか存在しない場合について証明してみよう．

$|i\rangle$ という状態から出発して $S|i\rangle$ という状態になったとする．しからば

$$S|i\rangle=\sum_n |n\rangle S_{ni} \tag{4.13}$$

実験条件により n としてすべての状態について加えなくても良い．そこで観測にかかり得る状態を (n) と書くことにする．次に終状態における物理量 A の期待値は次式で与えられる．ただし S を T で置き換え，分母分子に共通な因子はすべて落としている．

$$\langle A\rangle=\frac{\sum_{(m)}\sum_{(n)}\langle i|T^+|m\rangle\langle m|A|n\rangle\langle n|T|i\rangle}{\sum_n \langle i|T^+|n\rangle\langle n|T|i\rangle} \tag{4.14}$$

さて部分的完全系 (n) を A の固有状態に選ぶと，

$$A|n\rangle=a_n|n\rangle \tag{4.15}$$

また電子に対して $A=\boldsymbol{\sigma p}$ と選ぶと，$|n\rangle$ は Dirac のハミルトニアン $H(p)$ の固有状態になり得る．何となれば，

$$[\boldsymbol{\sigma p}, H(p)]=0 \tag{4.16}$$

そこで $\langle A\rangle$ を計算するには，分子における電子の Casimir 演算子に対して次の置換えをしてやれば良い：

$$-ip\cdot\gamma+m \rightarrow (-ip\cdot\gamma+m)(\boldsymbol{\sigma p})=(\boldsymbol{\sigma p})(-ip\cdot\gamma+m) \tag{4.17}$$

そこで次の式から出発する：

$$\mathcal{T}_{fi} \propto \bar{u}_e(p)(1+\gamma_5)v_\nu(q)\langle 1\rangle \tag{4.18}$$

しからば

$$\langle\boldsymbol{\sigma p}\rangle=\frac{\sum \mathrm{Tr}\,[(1+\gamma_5)(-iq\cdot\gamma)(-ip\cdot\gamma+m)(\boldsymbol{\sigma p})]\cdot|\langle 1\rangle|^2}{\sum \mathrm{Tr}\,[(1+\gamma_5)(-iq\cdot\gamma)(-ip\cdot\gamma+m)]\cdot|\langle 1\rangle|^2} \tag{4.19}$$

ただし電子の p は固定しておく．そこで最終状態に関する $\sum$ は実質的に次の位相空間における積分で置き換えられる．

$$\sum \rightarrow \int\frac{d^3q}{2q_0}\int\frac{d^3P_B}{2P_{B0}}\delta^4(P_f-P_i)\cdots \tag{4.20}$$

ただし B という原子核は重いので，P_{B0} は定数と見なせるし，d^3P_B は運動量に関する $\delta^3(P_f-P_i)$ を打ち消す．$\boldsymbol{q}$ はポテンシャル散乱の時と同様に，エネルギー保存さえ満たしていればその方向は自由になるから

$$\sum \to \int \frac{d^3q}{2q_0}\delta(E-p_0-q_0)\cdots \tag{4.21}$$

ただし $E=P_{A0}-P_{B0}\approx M_A-M_B$ という原子核の質量差で近似し得る.

さてトレースの方は,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\,(分子)=4\,(q_0\boldsymbol{p}^2-p_0\boldsymbol{pq}),\\&\mathrm{Tr}\,(分母)=4\,(q_0p_0-\boldsymbol{pq})\end{aligned} \tag{4.22}$$

そこで極座標系で q 積分を実行すると,

$$\int \frac{d^3q}{2q_0}\delta(E-p_0-q_0)(q_0\boldsymbol{p}^2-p_0\boldsymbol{pq})=2\pi\int qdq\delta(E-p_0-q_0)q_0\boldsymbol{p}^2,$$

$$\int \frac{d^3q}{2q_0}\delta(E-p_0-q_0)(q_0p_0-\boldsymbol{pq})=2\pi\int qdq\delta(E-p_0-q_0)p_0q_0$$

そこで $q_0=q$ を考慮して q 積分をすれば, $q=q_0$ を $E-p_0$ で置き換えることになる. 従って両者の比をとり,

$$\langle\boldsymbol{\sigma p}\rangle=q_0\boldsymbol{p}^2/p_0q_0=p\left(\frac{p}{p_0}\right)=p\left(\frac{v}{c}\right) \tag{4.23}$$

従ってヘリシティーは

$$\langle h\rangle=\langle\boldsymbol{\sigma p}/p\rangle=\frac{v}{c} \tag{4.24}$$

この導出を一般化したものが (4.11) 式である. さて e^- のヘリシティーは

$$^{60}\mathrm{Co}\to{}^{60}\mathrm{Ni}+e^-+\bar{\nu}_e \tag{4.25}$$

に対して, 1957年に Frauenfelder によって測定され, その結果は

$$h(e^-)=-\left(\frac{v}{c}\right)\pm 10\% \tag{4.26}$$

これを (4.11) 式と比較すると, ビーター崩壊の相互作用は VA の組み合わせであることが分かる. 従ってその相互作用は

$$\mathcal{H}_\beta=(C_V\bar{\psi}_p\gamma_\lambda\psi_n-C_A\bar{\psi}_p\gamma_\lambda\gamma_5\psi_n)\bar{\psi}_e\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\nu+\mathrm{h.c.} \tag{4.27}$$

そこで

$$C_V=\frac{G}{\sqrt{2}},\qquad C_A=\frac{G}{\sqrt{2}}x \tag{4.28}$$

と置くと, G 自身は C_A の効かない $0^+\to0^+$ 遷移に相当する

$$^{14}\mathrm{O}\to{}^{14}\mathrm{N}^*+e^++\nu_e \tag{4.29}$$

より決定される. この際に ^{14}C, ^{14}N*, ^{14}O はアイソ・スピン三重項なので, $\langle 1\rangle$

は群論的に求まるからである．この間の事情については次節で述べる．

また偏極した中性子のビーター崩壊などから x が決められて，結局

$$G=\frac{1.01}{m_p^2}\times 10^{-5}, \qquad x=-1.254\pm 0.006. \tag{4.30}$$

さて x が負なので，これを V-A 理論と呼ぶが，その具体的な形は

$$\mathcal{H}_\beta=\frac{G}{\sqrt{2}}\overline{\psi}_p\gamma_\lambda(1+1.25\gamma_5)\psi_n\cdot\overline{\psi}_e\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\nu+\text{h.c.} \tag{4.31}$$

冒頭に $\sqrt{2}$ という分母があるのは，(4.7) の置換えのためである．このために昔の結合定数 G を用いようとするとこの形に書かねばならなくなったのである．

§5 Fermi 型相互作用の普遍性

π 中間子のレプトン崩壊の相互作用 (3.6) が世代によらないという普遍性について述べたが，(3.6) という相互作用は多分に現象論的である．それよりは上述の Fermi 型相互作用の方がより多くの現象をカバーしており基本的であると考えられる．このことについてはおいおい述べてゆくことにする．そこでこの節ではまず (3.6) の普遍性を Fermi 型相互作用の普遍性という観点から解釈してみよう．(4.31) は核子と第一世代のレプトンとの間の相互作用であるが，この形がすべての世代のレプトンに対して普遍的に成立すると仮定しよう．

$$\mathcal{H}_F=\frac{G}{\sqrt{2}}\overline{\psi}_p\gamma_\lambda(1+1.25\gamma_5)\psi_n\cdot\overline{\psi}_l\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_l}+\text{h.c.} \tag{5.1}$$

さて $\pi^+\to\mu^++\nu_\mu$ がこの相互作用を通して生起すると仮定すると，

$$\begin{aligned}&\langle\mu^+,\nu_\mu|\mathcal{H}_F(x)|\pi^+\rangle\\&=1.25\frac{G}{\sqrt{2}}\langle 0|\overline{\psi}_n(x)\gamma_\lambda\gamma_5\psi_p(x)|\pi^+\rangle\langle\mu^+,\nu_\mu|\overline{\psi}_{\nu_\mu}(x)\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\mu(x)|0\rangle\end{aligned} \tag{5.2}$$

そこで第一の因子をその変換性から次のように書いて良いであろう：

$$1.25\frac{G}{\sqrt{2}}\langle 0|\overline{\psi}_n(x)\gamma_\lambda\gamma_5\psi_p(x)|\pi^+\rangle=-\frac{g}{m_\pi}p_\lambda\frac{e^{ip\cdot x}}{\sqrt{2p_0V}} \tag{5.3}$$

ただし p は π^+ の四元運動量である．しからばこの過程に関する限り現象論的に

$$1.25\frac{G}{\sqrt{2}}\overline{\psi}_n\gamma_\lambda\gamma_5\psi_p\to\frac{ig}{m_\pi}\partial_\lambda\varphi \tag{5.4}$$

という置換えをすることができる．そして(3.6)においてgが世代に依らないという普遍性は，(5.1)においてGが世代に依らないという普遍性の結果であると解釈することができる．そして(3.6)はこの過程に限っての(5.1)の現象論的表現であると考えることができる．この普遍性を更に押し進めてみよう．

レプトン部分に関する限り，Fermi 型相互作用には普遍的な形

$$\overline{\psi}_l\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_l} \tag{5.5}$$

が現れるが，核子の部分はまだ複雑な形をしている．そこで核子部分はなお現象論的な表現であると考えた方が良さそうである．そこでこの部分をもう少し抽象的に扱うことにしよう．まず核子・中間子系に対するアイソ・スピンの流れ密度を書き下してみると，(6.3.13)により

$$\hat{j}_\lambda=i\overline{\psi}\gamma_\lambda\frac{\hat{\tau}}{2}\psi-\hat{\varphi}\times\partial_\lambda\hat{\varphi} \tag{5.6}$$

ただしここでは核子とπ中間子とを素粒子と考えている．理論が荷電独立である限りは，アイソ・スピンの流れ密度は，常に Noether の流れ密度として基本的な場の演算子で表現される．しかしアイソ・スピンの主な性質は，何を基本的な場として選ぶかには依存せず，群論的考察から定まってしまう．この点は，分散理論にも共通で，安定粒子を含む散乱振幅はその粒子が素粒子であるか複合粒子であるかに無関係に分散公式に従う．

さて Fermi 型相互作用の核子部分の更にベクトル部分は，

$$i\overline{\psi}_p\gamma_\lambda\psi_n=i\left(\overline{\psi}\gamma_\lambda\frac{\tau_1}{2}\psi+i\overline{\psi}\gamma_\lambda\frac{\tau_2}{2}\psi\right) \tag{5.7}$$

であり，これは(5.6)のアイソ・スピンの流れ密度の$j_{1\lambda}+ij_{2\lambda}$の核子部分であることに気が付く．そこで現象論的な核子のベクトル部分にもっと普遍性を持たせるために，基本場を特定しないでも書けるアイソ・スピンの流れ密度で置き換えてしまう．すなわち(5.1)のベクトル部分を次のように書き換える：

$$\mathcal{H}_V=-i\frac{G}{\sqrt{2}}(j_{1\lambda}+ij_{2\lambda})\cdot\overline{\psi}_l\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_l}+\text{h.c.} \tag{5.8}$$

アイソ・スピンの流れは保存則を満たすので，Gell-Mann はこの置換えを，CVC 仮説と呼んだ．CVC は conserved vector current の略である．しからばこのベクトル流はアイソ・スピンの定まったすべてのハドロンに対して使えるので大変普遍的な表現となる．例えば，π^+ のビーター崩壊

$$\pi^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e \tag{5.9}$$

を考えてみる．運動量が保存していれば，アイソ・スピンの行列要素は

$$\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{I}_1 + i\boldsymbol{I}_2|\boldsymbol{n}\rangle = 1, \qquad \langle \boldsymbol{\pi}^+|\boldsymbol{I}_1 + i\boldsymbol{I}_2|\boldsymbol{\pi}^0\rangle = -\sqrt{2} \tag{5.10}$$

であるから，その密度についても運動量の移行がほとんど 0 の時に

$$\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{j}_{10} + i\boldsymbol{j}_{20}|\boldsymbol{n}\rangle = \frac{1}{V}\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{I}_1 + i\boldsymbol{I}_2|\boldsymbol{n}\rangle = \frac{1}{V}, \tag{5.11}$$

$$\langle \boldsymbol{\pi}^+|\boldsymbol{j}_{10} + i\boldsymbol{j}_{20}|\boldsymbol{\pi}^0\rangle = \frac{1}{V}\langle \boldsymbol{\pi}^+|\boldsymbol{I}_1 + i\boldsymbol{I}_2|\boldsymbol{\pi}^0\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{V} \tag{5.12}$$

この結果は，核子や π 中間子が素粒子であるか複合粒子であるかに依らない．上の式を一般化して

$$\langle \boldsymbol{\pi}^+|\boldsymbol{j}_{1\lambda} + i\boldsymbol{j}_{2\lambda}|\boldsymbol{\pi}^0\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{V}\left(\frac{q_\lambda}{q_0}\right) \tag{5.13}$$

ただし q_λ は，π^+ と π^0 とのほとんど共通な四元運動量で，その差は小さいとして無視している．これから π^+ のビーター崩壊幅が直ちに計算できて，

$$\frac{\Gamma(\pi^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e)}{\Gamma(\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu)} = 1.0 \times 10^{-8} \tag{5.14}$$

これは実験値 $(1.033 \pm 0.034) \times 10^{-8}$ と極めて良く一致している．そこで CVC 仮説が正しいものとすると，(5.8) の相互作用はすべてのハドロンに対して用いることのできる極めて普遍的なものとなったことになる．

今までの議論に用いられたのは結局アイソ・スピンの性質，特に交換関係

$$[I_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk}I_k \tag{5.15}$$

だけに基づいている．従ってこの交換関係が普遍性を特徴付けるものである．そこで軸性ベクトル部分についても同様なことを考えたくなる．従って

$$1.25\frac{G}{\sqrt{2}}i\overline{\psi}_p\gamma_\lambda\gamma_5\psi_n \to \frac{G}{\sqrt{2}}(j^5_{1\lambda} + ij^5_{2\lambda}) \tag{5.16}$$

という置換えをしてやる．1.25 という因子は基本的なものでなくて現象論的なものであると考えられる．すなわち

$$\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{j}^5_{1\lambda} + i\boldsymbol{j}^5_{2\lambda}|\boldsymbol{n}\rangle = 1.25\frac{i}{V}\overline{u}(p)\gamma_\lambda\gamma_5 u(n) \tag{5.17}$$

で与えられ，すぐ示すように計算し得る因子である．そこで擬スカラーのアイソ・スピンを定義する．

$$\hat{I}^5 = \int d^3x\, \hat{j}^5_0 \tag{5.18}$$

しからば $\hat{I}^5$ 自身はアイソ・ベクトルであるから，$\hat{I}$ との交換関係は次式で与えられる：

$$[I_i, I_j^5]=i\varepsilon_{ijk}I_k^5 \tag{5.19}$$

残された問題は $\hat{I}^5$ の規格化，およびそれと関連して $\hat{I}$ と $\hat{I}^5$ とから成る代数の交換関係を閉じさせることである．そこで Gell-Mann は次式を仮定した．

$$[I_i^5, I_j^5]=i\varepsilon_{ijk}I_k \tag{5.20}$$

こうして閉じた代数を流れの代数（current algebra）と呼ぶ．

この代数をテストするには，(5.20) から出発して $-C_A/C_V=1.25$ が証明できるかどうかを調べなければならない．それには $\partial_\lambda \hat{j}_\lambda^5$ が π 中間子場を表現し得るという PCAC 仮説 (partially conserved axial-vector current) と分散公式とを用いる．その結果は次の Adler-Weisberger の公式である：

$$\left(\frac{C_V}{C_A}\right)^2=1+\frac{2}{\pi}\left(\frac{m_p}{G}\right)^2\int_{m_\pi}^{\infty}\frac{kd\omega}{\omega^2}[\sigma_-(\omega)-\sigma_+(\omega)] \tag{5.21}$$

右辺において $\sigma_-(\omega)$ と $\sigma_+(\omega)$ とは次の過程の全断面積を意味する：

$$\sigma_-(\omega):\pi^-+p\rightarrow \text{all},\qquad \sigma_+(\omega):\pi^++p\rightarrow \text{all} \tag{5.22}$$

また ω と k とは実験室系における π の入射エネルギーと運動量である．G は，核子と π 中間子間の現象論的相互作用 (5.4.43) に現れる結合定数であり，その近似値は $G^2/4\pi\approx15$ である．(5.21) の右辺に実験値を代入すると，その結果は $C_A/C_V=-1.25$ とほぼ一致し，流れの代数を支持する．(5.21) の証明については拙著，“*Fields and Particles*” を参照されたい．

ここにおいて Fermi 型相互作用に関して次のような普遍性が確立された．まずレプトン部分についてはすべての世代について相互作用は共通であること，次にハドロン部分については流れの代数を満たすような流れの密度で表わされるということである．更に容易に検証し得るが，レプトン部分の流れについてもハドロンの場合と全く同じ交換関係が成り立つということである．すなわち，

$$i\bar{\psi}_l\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_l}\rightarrow j'_{1\lambda}-ij'_{2\lambda} \tag{5.23}$$

とおき，j'_{10}, j'_{20} の空間積分をそれぞれ I'_1, I'_2 と書けば，I'_1, I'_2 はそれぞれ $I_1+I_1^5$, $I_2+I_2^5$ と同じ交換関係を満たす．従って代数的性質に関しては，レプトン部分とハドロン部分が普遍的な性質を持つことになる．そこでレプトン同

士の Fermi 型相互作用について調べるために

$$\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \tag{5.24}$$

に対しても同じ形の相互作用を仮定する.

$$\mathcal{H}_{\mu e} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \overline{\psi}_{\nu_e} \gamma_\lambda (1+\gamma_5) \psi_e \cdot \overline{\psi}_\mu \gamma_\lambda (1+\gamma_5) \psi_{\nu_\mu} + \text{h.c.} \tag{5.25}$$

この崩壊幅の計算法は第8章§5に詳述されているので，結果のみを与える.

$$\Gamma(\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu) = \frac{1}{192\pi^2} G_F^2 m_\mu^5 \tag{5.26}$$

この結合定数は強い相互作用による補正が無いので，ミューオンの寿命と質量とから決定される.

$$G_F = \frac{1.03}{m_p^2} \times 10^{-5} \tag{5.27}$$

同様にして中性子のビーター崩壊では

$$\Gamma(n \to p + e^- + \bar{\nu}_e) = \frac{0.94}{60\pi^3} (|C_V|^2 + 3|C_A|^2) \Delta^5 \tag{5.28}$$

ただし $\Delta = m_n - m_p$ である. (5.27) と (4.30) とを比較すると，G と G_F との間には僅かであるが，差が存在する. この違いに対して Cabibbo は一つの解釈を与えた. 流れの代数は SU(2) というアイソ・スピン群に基づいて設定されたが，ハドロンがレプトン対に崩壊する弱い相互作用にはわずかながら奇妙さを変える成分がある. そこで流れの代数は SU(3) にまで拡張される. Cabibbo は，Fermi 型相互作用のハドロン部分は，アイソ・スピン密度にわずかながら SU(3) の回転を施したものであると解釈した. この回転角を Cabibbo 角と呼び，θ_C と書くと，

$$G = G_F \cos\theta_C \tag{5.29}$$

Cabibbo の理論については次節で詳しく述べることにして，ここではクォーク模型について述べよう. 交換関係 (5.20) を場の演算子で表現することを考えると，その密度を用いて同時刻 $x_0 = y_0$ の時に

$$[j_{i0}^5(x), j_{j0}^5(y)] = i\varepsilon_{ijk} j_{k0}(x) \delta^3(x-y) + (\text{GIS 項}) \tag{5.30}$$

の形に書ける. ただし GIS 項というのは，後藤-今村-Schwinger 項と同様に空間積分をすると消えてしまう項である. 今もしπ中間子と核子の場を基本的な場と考えると，右辺第一項の $j_{k\lambda}(x)$，あるいは $\hat{j}_\lambda(x)$ は (5.6) 式で与えられ

る．この時に$\hat{j}^5_\lambda$はどのような形に与えられるであろうか？　ここでは具体的な形は与えないが，(5.30) を満たすような$\hat{j}^5_\lambda$は非常に非線形で複雑になる．そしてそのような非線形な流れの表現に基づき，それに対応する対称性を持った系の力学をカイラル力学と呼ぶ．これは現象論として流れの代数の表現を与えるが，基本的な理論と考えるには余りにも複雑であり，到底くりこみなどを実行することができない．そこで考えられたのがクォークによる表現である．

§6　弱い相互作用におけるクォーク模型

§2において u, d, s という三種類のクォークを導入した．そこではクォークは実在の粒子というよりは基本表現の担い手として数学的補助手段として導入された．しかしながら流れ代数を満足する流れが弱い相互作用の中に物理的実在として存在することが分かると，流れ密度を場の演算子でいかにして表現するかは何が現実における基本的場であるかという物理的実在の問題となる．

さて u, d, s を3成分とするクォーク場をqとし，この3成分を結び付ける Gell-Mann の行列λ_jを用いて次のような流れ密度を導入する：

$$\mathscr{F}_{j\mu}=i\bar{q}\gamma_\mu\frac{\lambda_j}{2}q, \qquad \mathscr{F}^5_{j\mu}=i\bar{q}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda_j}{2}q \tag{6.1}$$

そして次のような量を定義する：

$$F_j=\int d^3x\mathscr{F}_{j0}, \qquad F^5_j=\int d^3x\mathscr{F}^5{}_{j0} \tag{6.2}$$

これらの量は必ずしも保存量ではないが，同時刻交換関係は

$$\begin{aligned}[F_i, F_j]&=if_{ijk}F_k,\\ [F_i, F^5_j]&=if_{ijk}F^5_k,\\ [F^5_i, F^5_j]&=if_{ijk}F_k\end{aligned} \tag{6.3}$$

従ってクォークを用いれば流れの代数を満たす表現が簡単に作れることになる．

ここでは SU(3) の代数の表現を作ったが，SU(2) はその部分代数である．そして (6.3) の代数の構造をもっと詳しく知るために

$$F^{(\pm)}_i=\frac{1}{2}(F_i\pm F^5_i) \tag{6.4}$$

という組み合わせを作ってやると，次のような交換関係を得る：

$$[F_i^{(+)}, F_j^{(-)}]=0,$$
$$[F_i^{(+)}, F_j^{(+)}]=if_{ijk}F_k^{(+)},$$
$$[F_i^{(-)}, F_j^{(-)}]=if_{ijk}F_k^{(-)}. \tag{6.5}$$

従ってこの代数の構造は左巻きの流れに対応する $F^{(+)}$，右巻きの流れに対応する $F^{(-)}$ からそれぞれ $SU(3)_L$，$SU(3)_R$ という代数が作られ，その直積になる．

$$SU(3)_L\times SU(3)_R \tag{6.6}$$

このようにクォーク模型は，流れの代数を満たす最も簡単で，かつ高エネルギーでの振舞い，あるいはくりこみ可能性から考えて最上の表現となる．ここにおいてクォーク模型は単に数学的補助手段ではなく，物理的実在と考えることにする．Cabibbo は 1963 年に Fermi 型相互作用に現れる荷電を持った流れを

$$J_\mu=(\mathscr{F}_{1\mu}^{(+)}-i\mathscr{F}_{2\mu}^{(+)})\cos\theta_C+(\mathscr{F}_{4\mu}^{(+)}-i\mathscr{F}_{5\mu}^{(+)})\sin\theta_C+\sum_l i\overline{\psi}_l\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_{\nu_l} \tag{6.7}$$

により定義し，普遍的な Fermi 型相互作用を

$$\mathscr{H}_F=\frac{G_F}{\sqrt{2}}J_\mu^\dagger J_\mu \tag{6.8}$$

という形に書いた．これから例えば奇妙さを変えぬビーター崩壊の相互作用は

$$\mathscr{H}_\beta=\frac{G_F}{\sqrt{2}}\cos\theta_C(\mathscr{F}_{1\mu}^{(+)}+i\mathscr{F}_{2\mu}^{(+)})i\overline{\psi}_e\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_{\nu_e}+\text{h.c.} \tag{6.9}$$

この形は (5.29) を考慮すると本質的に (5.1) と一致する．また (6.7) で定義される J_μ とそのエルミート共役 $J_\mu^\dagger$ の 0 成分の空間積分は $SU(2)_L$ という代数を満たすことになる．

(6.8) は荷電流から構成されていて中性流が欠けているが，これは後にゲージ理論で付加えられる．このような三種のクォーク u, d, s を区別する量子数をフレイバー (flavor) と呼ぶが，アイソ・スピン，奇妙さなどはフレイバーの例である．実はクォークには更に詳しい区別があり，カラー (color) と呼ばれるが，それについては次節で述べることにする．

Cabibbo は，弱い相互作用で奇妙さを変える寄与の生ずるのは，Fermi 型相互作用のハドロン部分を

$$\overline{\psi}_p\gamma_\lambda(1+1.25\gamma_5)\psi_n\to\overline{u}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)d' \tag{6.10}$$

と書き換えた時に，d′, s′ は質量の固有状態としての d, s とずれているとして次の変換を導入した．d も s も $-(1/3)e$ という荷電を持っているので

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

これが (6.7) という形の由来である．1970年に Glashow, Iliopoulos, Maiani は後に述べるように第4番目のクォーク c (charm) を導入し，u と同じく (2/3)e という荷電を持つものとして二世代のクォーク

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

を導入した．また小林-益川は弱い相互作用における CP 不変性の破れを説明するために1973年に第三世代のクォークの存在を予言し，(6.12) の代りに

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

を導入した．t と b とはそれぞれトップ (top)，ボトム (bottom) クォークと呼ばれる．そして (6.11) を拡張して次のような混合行列を導入した：

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & s_1c_2 & s_1s_2 \\ -s_1c_3 & c_1c_2c_3-s_2s_3e^{-i\delta} & c_1s_2c_3+c_2s_3e^{-i\delta} \\ -s_1s_3 & c_1c_2s_3+s_2c_3e^{-i\delta} & c_1s_2s_3-c_2c_3e^{-i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

これを小林-益川行列と呼ぶ．$e^{-i\delta}$ は時間反転，あるいは CP の破れを惹起するが，そのためには三世代のクォークが必要である．また

$$s_i=\sin\theta_i, \qquad c_i=\cos\theta_i \tag{6.15}$$

であり，θ_i $(i=1,2,3)$ は Cabibbo 角の拡張である．以上においては弱い相互作用の性質からクォーク模型を導入したが，強い相互作用ではどうであろうか？

§7　強い相互作用におけるクォーク模型

§2 において SU(3) 代数に基づいてハドロンの分類，質量公式，磁気能率などについて議論した．そこで本節ではクォーク模型を用いることによりこれらの結果を更に改良し得ることを示す．

まず最も大切なことは，クォークにはフレイバー以外にもう一つカラーという自由度が存在することである．何故新しい自由度が必要かについて述べる．

クォーク模型に対する群論的支持は次の事実から得られる．中間子は $q\bar{q}$ と

いう束縛状態であるので，フレイバー SU(3) に関して

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \tag{7.1}$$

となり，一重項と八重項が可能なはずである．このことは実験的支持があり，一重項も八重項も存在するし，それ以外は無い．バリオンは qqq であり，

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \tag{7.2}$$

となり，実験的にはこれらの多重項が見付かっており，それ以外には見付かっていない．三重項をなすクォーク自身は観測されていないので，実験的に見付かっているのはすべて 8, $8 \otimes 8$ などに属する表現に限られている．これが八道説の主張していることである．そこで Δ^{++} という十重項のメンバーについて考察してみよう．この粒子は uuu という 3 個の u クォークの束縛状態であり，そのスピンは 3/2 である．軌道角運動量はお互いに S 状態であるとすると，3 個の 1/2 スピンが平行で合成したスピンが 3/2 になると考えられる．すると空間的波動関数もスピン波動関数も対称となってしまい，3 個の同種フェルミオンの波動関数として矛盾を生ずる．従って他に知られてない自由度があり，その自由度について完全反対称となっていなければならない．そこでこの自由度を仮にカラーと呼び，三種類のカラー状態 1, 2, 3 の存在を仮定する．ただこのカラーの自由度はハドロンのレベルではその存在が知られておらず，ハドロンが余計な自由度を持つとすると種々の矛盾を生ずるので，ハドロンはこの新自由度について一重項であると考えなければならない．

そこで Δ^{++} の波動関数は空間部分を除いて

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} u_{\uparrow}^{\alpha} u_{\uparrow}^{\beta} u_{\uparrow}^{\gamma} \tag{7.3}$$

の如く書けるであろう．ただし u はフレイバー，↑はスピンが上向き，α, β, γ はカラーの自由度を表わす．三種類のカラー状態に対して SU(3) 変換を施した時に，(7.3) は不変であり，カラー一重項となる．すべてのハドロンは，従ってこのカラー SU(3) 変換に対して不変となる．このことは，クォーク模型がカラー SU(3) 群に対して不変な理論であることを要求する．

質量公式

§2 における質量公式をクォーク模型により改良できることを示そう．そのためにまずハドロンをクォークで表現する．

$$\pi^+ \sim u\bar{d}, \quad \pi^- \sim d\bar{u}, \quad \mathrm{K}^+ \sim u\bar{s}, \quad \mathrm{K}^0 \sim d\bar{s},$$

$$p \sim uud,\quad n \sim udd,\quad \Lambda \sim uds,\quad \Sigma^+ \sim uus,$$
$$\Delta^{++} \sim uuu,\quad \Omega^- \sim sss,\qquad \text{etc.}$$

またここに含まれているクォークの荷電は

$$Q_u = \left(\frac{2}{3}\right)e,\qquad Q_d = Q_s = -\left(\frac{1}{3}\right)e \tag{7.4}$$

また場合によってはフレイバー一重項と八重項とを区別するために混合状態を考えなければならない.

$$\eta_1 \sim \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s}),\qquad \eta_8 \sim \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}) \tag{7.5}$$

さて質量はクォークの質量の和をとれば，粗い公式が出る．以下の式はクォーク模型でも前出の SU(3) の方法のいずれからでも出る．粒子名は質量を表わす．

$$\underset{(496\,\mathrm{MeV})(446\,\mathrm{MeV})}{K = \frac{1}{4}(\pi + 3\eta)},\qquad \underset{(776\,\mathrm{MeV})(783\,\mathrm{MeV})}{\rho = \omega},\qquad \underset{(127\,\mathrm{MeV})(116\,\mathrm{MeV})}{\phi - K^* = K^* - \rho}$$

$$\underset{(152\,\mathrm{MeV})\ (150\,\mathrm{MeV})\ (139\,\mathrm{MeV})}{\Sigma^* - \Delta = \Xi^* - \Sigma^* = \Omega^- - \Xi^*},\qquad \underset{(1129\,\mathrm{MeV})\ (1135\,\mathrm{MeV})}{\frac{1}{2}(N+\Xi) = \frac{1}{4}(\Sigma + 3\Lambda)} \tag{7.6}$$

クォーク模型では更に相互作用による補正を入れることができる．それには後に述べるゲージ理論の結果を前借りしなければならないが，近距離では $\mathrm{q\bar{q}}$ 間，あるいは qq 間の力は，その合成系が **1**，あるいは $\bar{\mathbf{3}}$ カラー表現に属するとして

$$V_{q\bar{q}}(\mathbf{1}) = -\frac{4}{3}\alpha_s/r,\qquad V_{qq}(\bar{\mathbf{3}}) = -\frac{2}{3}\alpha_s/r \tag{7.7}$$

で与えられる．α_s はカラーを持った粒子同士の相互作用を特徴付ける結合定数である．そしてその期待値 ΔE は次式に比例する:

$$\Delta E \propto \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{m_1 m_2} \tag{7.8}$$

そこで合成系の質量 M を m_i の和とした式に補正項を加えると

$$M(\mathrm{q\bar{q}}) = m_1 + m_2 + a(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)/m_1 m_2, \tag{7.9}$$

$$M(\mathrm{qqq}) = \sum_{i=1}^{3} m_i + a' \sum_{i<j} (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j)/m_i m_j \tag{7.10}$$

従ってハドロン中でのスピン波動関数が知られれば計算できる．その結果は，表7と表8とに与えられている．質量の単位は MeV である．

表 7　中間子の質量

中間子	質量
$\pi(138)$	140
$K(496)$	485
$\eta(549)$	559
$\rho(776)$ $\omega(783)$	780
$K^*(892)$	896
$\phi(1020)$	1032

表 8　重粒子の質量

重粒子	質量
$N(939)$	939
$\Lambda(1116)$	1114
$\Sigma(1193)$	1179
$\Xi(1318)$	1327
$\Delta(1232)$	1239
$\Sigma^*(1384)$	1381
$\Xi^*(1533)$	1529
$\Omega(1672)$	1682

パラメターの選択

中間子の場合

$m_u=m_d=310$ MeV

$m_s=483$ MeV

$a/m_u^2=160$ MeV

重粒子の場合

$m_u=m_d=363$ MeV

$m_s=538$ MeV

$a'/m_u^2=50$ MeV

ここで中間子の場合と重粒子の場合とではいずれもパラメターを3個選んでいるが，両方の場合でクォークの質量を少し違えているのは公式の単純さから考えて止むを得ない．しかし定性的一致は良い．

磁気能率

質量の時と同様にスピン波動関数を用いて，重粒子の磁気能率を

$$\mu_i=\frac{Q_i}{2m_i} \qquad (i=\mathrm{u, d, s}) \tag{7.11}$$

を用いて表わすことにする．例えば，陽子のスピン波動関数は，

$$|p\uparrow\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}|uu,\ S_z=1\rangle\times|d\downarrow\rangle-\sqrt{\frac{1}{3}}|uu,\ S_z=0\rangle\times|d\uparrow\rangle \tag{7.12}$$

で与えられる．記号の意味は自明であろう．この時，磁気能率は

$$\mu(p)=\frac{2}{3}(2\mu_u)+\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\mu_d=\frac{4}{3}\mu_u-\frac{1}{3}\mu_d \tag{7.13}$$

の如く計算される．そこで磁気能率を§2と同じ nuclear magneton 単位で表わすことができる．重粒子中では (7.11) の μ_i は次のようになる：

$$\mu_u=1.863\ \mathrm{n.m.}, \qquad \mu_d=-0.931\ \mathrm{n.m.}, \qquad \mu_s=-0.583\ \mathrm{n.m.} \tag{7.14}$$

そこで重粒子の磁気能率を表9に掲げる．表では (7.14) のクォークの磁気能率を u, d, s のようにクォークの記号で表わす．誤差の大きい Ξ^- を除いては表5より大分実験との一致が改善されている．

今まで三種類のクォークについて述べてきたが，他の種類のクォークが“発

表 9　重粒子の磁気能率

重粒子	磁気能率表式	理論値	実験値
p	$(4/3)u-(1/3)d$	2.73	2.793
n	$(4/3)d-(1/3)u$	−1.86	−1.913
Λ^0	s	−0.58	−0.613±0.004
$\Sigma^0\to\Lambda^0$	$(1/\sqrt{3})(d-u)$	−1.61	$-(1.82^{+0.25}_{-0.18})$
Σ^+	$(4/3)u-(1/3)s$	2.68	2.379±0.020
Σ^0	$(2/3)(u+d)-(1/3)s$	0.82	
Σ^-	$(4/3)d-(1/3)s$	−1.05	−1.10±0.50
Ξ^0	$(4/3)s-(1/3)u$	−1.40	−1.250±0.014
Ξ^-	$(4/3)s-(1/3)d$	−0.47	−1.85±0.75

見”されたのはずっと後のことである．その理由は，u, d, s に比べて c とか b とかはずっと重いからである．後に議論するように，孤立したクォークは観測されないので，観測されるのは常にハドロンである．1974 年に Ting と Richter とは独立にそれぞれ J,ψ と呼ばれる質量約 3100 MeV のベクトル粒子を発見した．これは $c\bar{c}$ という束縛状態であると解釈されている．これは 1970 年に Glashow，Iliopoulos，Maiani により導入された c クォークであると同定された．第四のクォークについては 1963 年頃に，牧や原によって異なる観点からその存在が考えられたことがある．また 1976 年に Lederman や山内によって発見された質量約 9460 MeV の Υ は $b\bar{b}$ という束縛状態であると解釈され，クォークも三世代あることが明らかになってきた．従って次に問題となるのは t クォークである．この発見は筑波で建設された加速器トリスタンの目標の一つである．なお，これらの重いクォークの束縛状態は多くの励起状態を有し，それを次のようなポテンシャルを仮定して説明して多くの成功を収めた：

$$V(r)=-\left(\frac{4}{3}\right)\frac{\alpha_s}{r}+kr \tag{7.15}$$

このような非相対論的な計算はクォークが重いほど良い近似になっていると考えられている．

§8　パートン模型

今までハドロンがクォークの束縛状態であるというクォーク模型について述べてきた．そこでクォーク同士を結び付ける強い相互作用の性質が問題となる．この強い相互作用の性質を特徴付ける模型がパートン（parton）模型である．これは無理に訳すると部分子模型とでも呼ぶべきものである．1969年に，Feynman は，“核子は核子中でほとんど自由な点状のパートンと呼ばれる粒子から構成されている”と仮定して．この模型をパートン模型と名付けた．従って，例えば四元運動量 P の陽子を構成しているパートンの運動量を p_i とすれば，

$$p_i \approx x_i P \qquad (1 \geqq x_i \geqq 0) \tag{8.1}$$

このような比例関係が成立していなければ，ほとんど自由なパートンは勝手に飛んで行き，陽子はばらばらになってしまうからである．話を具体的に進めるために，パートンとは実はクォークであると仮定すると，陽子は uud という構成を持っている．そこで x が $(x,\ x+\Delta x)$ の範囲内の u クォークが存在する確率を $u(x)\Delta x$，同様にこの範囲内の d クォークが存在する確率を $d(x)\Delta x$ とすると，

$$\int_0^1 dx u(x) = 2, \qquad \int_0^1 dx d(x) = 1 \tag{8.2}$$

そこで第8章§3で議論した電子の非弾性散乱に対する構造関数をこの模型に基づいて計算してみよう．全体の無矛盾性を保証するために，パートンの質量を (8.1) に対応して陽子の質量 M に対して

$$m_i = x_i M \tag{8.3}$$

と置くことにする．そして個々のパートンの構造関数に対する寄与を(8.3.17)式に基づいて計算してやれば良い．1個のパートンの寄与を $w_{\mu\nu}$ と書けば，

$$2\pi e^2 w_{\mu\nu} = \int d^4x \left(\frac{p_0}{m}\right) \langle p | j_\mu(x) j_\nu(0) | p \rangle e^{-iQ\cdot x} \tag{8.4}$$

ただし添字 i は省略してある．本当は Heisenberg 表示での行列要素を用いなければならないが，ここでは自由なクォークを用いているので相互作用表示で計算をする．上式はクォークのスピンについて平均をすると

$$= -e_q{}^2 \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \left(\frac{p_0}{m}\right) \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu \frac{-ip'\cdot\gamma+m}{2p_0'} \gamma_\nu \frac{-ip\cdot\gamma+m}{2p_0}\right] (2\pi)^4 \delta^4(p'-p-Q)$$

$$=-2\pi e_q{}^2\delta(p'^2+m^2)\frac{1}{4m}\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(-i(p+Q)\cdot\gamma+m)\gamma_\nu(-ip\cdot\gamma+m)]$$

ただしパートンは運動量 Q を吸収して $p'=p+Q$ という運動量を持つことになったとしている．故に

$$w_{\mu\nu}=-\left(\frac{e_q}{e}\right)^2\delta[(p+Q)^2+m^2]\frac{1}{m}\ (2p_\mu p_\nu+p_\mu Q_\nu+p_\nu Q_\mu-\delta_{\mu\nu}p\cdot Q) \quad (8.5)$$

そこで $p^2+m^2=0$ を用いると

$$w_{\mu\nu}=\left(\frac{e_q}{e}\right)^2\delta(2p\cdot Q+Q^2)\left[\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{Q_\mu Q_\nu}{Q^2}\right)\nu+\left(P_\mu-\frac{P\cdot Q}{Q^2}Q_\mu\right)\left(P_\nu-\frac{P\cdot Q}{Q^2}Q_\nu\right)\frac{2xM}{M^2}\right] \quad (8.6)$$

ただし ν は第８章と同様に次式で定義される：

$$p\cdot Q=xP\cdot Q=-xM\nu \quad (8.7)$$

これから (8.3.18) を用いてパートンの構造関数を得る．

$$w_1=\left(\frac{e_q}{e}\right)^2\delta(2p\cdot Q+Q^2)\nu=\nu\left(\frac{e_q}{e}\right)^2\delta(Q^2-2M\nu x), \quad (8.8)$$

$$w_2=\left(\frac{e_q}{e}\right)^2 2xM\delta(2p\cdot Q+Q^2)=2xM\left(\frac{e_q}{e}\right)^2\delta(Q^2-2M\nu x) \quad (8.9)$$

これから陽子の構造関数を出すには q=u に対して $u(x)$ を乗じ，q=d に対して $d(x)$ を乗じ，x について積分してやれば良い．そこで

$$P(x)=\left(\frac{e_u}{e}\right)^2u(x)+\left(\frac{e_d}{e}\right)^2d(x)=\frac{4}{9}u(x)+\frac{1}{9}d(x) \quad (8.10)$$

と置けば，

$$F_1=MW_1=\int dxP(x)\delta\left(\frac{Q^2}{M\nu}-2x\right)=\frac{1}{2}P\left(\frac{Q^2}{2M\nu}\right), \quad (8.11)$$

$$F_2=\nu W_2=\int dxP(x)x\delta\left(\frac{Q^2}{2M\nu}-x\right)=\frac{Q^2}{2M\nu}P\left(\frac{Q^2}{2M\nu}\right) \quad (8.12)$$

これから明らかなように，$Q^2\to\infty$，$M\nu\to\infty$ の極限で MW_1，νW_2 が共に $Q^2/2M\nu=x$ のみの関数となるという Bjorken のスケール則が成り立っていることが分かる．上の計算では極限をとることはしなかったが，自由なパートンという描像は，結合エネルギーなどを無視しているという意味で，上の極限を陰に仮定している．このような極限での非弾性散乱を深非弾性散乱と呼ぶ．従って，パートン模型は深非弾性散乱に対する Bjorken のスケール則を満た

していることが結論される．また上の計算でパートンのスピンを1/2と仮定したので

$$F_2(x)=2xF_1(x) \tag{8.13}$$

という Callan-Gross の関係式が成り立つ．この関係式は実験と合っている．

それではもしもパートンのスピンが0ならば上の関係式はどう変わるか？そこでパートンはスカラーであるとして $w_{\mu\nu}$ を計算してみよう．

$$\begin{aligned}2\pi e^2 w_{\mu\nu}&=2\pi e_p{}^2\int\frac{d^3p'}{2p_0'}\cdot\frac{1}{2m}(p+p')_\mu(p+p')_\nu\delta^4(p'-p-Q)\\&=2\pi e_p{}^2\delta(2p\cdot Q+Q^2)(2p+Q)_\mu(2p+Q)_\nu/m\end{aligned} \tag{8.14}$$

ただし e_p はパートンの荷電である．この時には

$$F_1(x)=0,\qquad F_2(x)=xP(x) \tag{8.15}$$

すなわち F_1 が消えてしまう．これは実験と矛盾する．勿論スカラー粒子だけで陽子を構成することはできないからスピン 1/2 のパートンは無くてはならない．また以上の計算では，干渉項が落ちているが，これは運動量の移行が大きいということである程度正当化されるであろう．

この節の結論として，“ハドロン中のクォークはほとんど自由である”とまとめることができる．換言すると，クォーク間の相互作用は近距離で弱くなると考えることができる．これは強い相互作用に対して一般的に成り立つとすると，これは強い相互作用の性質の著しい特徴であり，強い相互作用の構造を制限する．

同じことを運動量空間で述べれば，強い相互作用においては大きな運動量の移行が含まれる過程の生起する確率は小さくなるということになる．後に述べるように，この条件を満たす相互作用は非可換ゲージ相互作用のみである．

第13章　ゲージ理論とは

今までに素粒子間の種々の相互作用を導入してきたが，それらを強さの順に並べると，強い相互作用，電磁的相互作用，弱い相互作用，重力となる．各々のカテゴリーでの典型的なものは湯川型の核子・中間子相互作用，電子と電磁場の相互作用，Fermi 型相互作用などになる．また質量の小さい素粒子に対しては重力は桁違いに弱くなるので通常素粒子論では考えない．

これらの相互作用はしばしば種々の対称性を持っている．例えば，核子・中間子相互作用は荷電空間における回転に対して不変であり，その結果としてアイソ・スピンという保存量を生ずる．そこで当然生ずる疑問は，種々の相互作用の形を決める一般原理があるであろうか？　また相互作用の形と対称性との間には何か関係があるのであろうか？

そこで古典物理学の範囲内で既に知られていた Coulomb および Newton のポテンシャルを考えてみると，いずれも距離に反比例し，その強さはそれぞれ二粒子の荷電の積と質量の積に比例している．そして荷電も，非相対論的理論における質量も保存量である．従ってこのようなポテンシャルが場を媒介して生ずると考えると，このような場の源は保存量に対応する流れの密度であるということができる．このような場および相互作用をゲージ場およびゲージ相互作用と呼ぶ．この種の相互作用では，ゲージ場と保存量，あるいはそれを生ずる対称性とが一対一の対応をしていることになり，冒頭に述べた設問に対して一つの解答を与えている．

ゲージ場の最も良く知られた例は電磁場である．電磁場の源は四元電流であり，その表現は何を基本粒子であると考えるかを指定すれば直ちに定まってしまう．今までハドロンとレプトンとを基本粒子としてラグランジアンを書いてきたが，クォークとレプトンとを基本粒子としてもラグランジアンを書き下すことは容易である．この書換えは，弱い相互作用において荷電流をハドロンからクォークに書き換えたのと同じ手続きになる．しかも2個のハドロンが十分

離れている場合のCoulombポテンシャルは，ハドロンの荷電のみに依り，ハドロンが基本粒子であるか複合粒子であるかということには依存しない．これは荷電が加法的量子数だからである．

さてYangとMillsとは，1954年にアイソ・スピンという保存量に対応するゲージ場を導入した．アイソ・スピンは非可換代数に対応するので，このゲージ場は非可換ゲージ場と呼ばれる．1956年に内山はもっと一般的な対称性に対応する非可換ゲージ場を導入し，更にエネルギー・運動量という保存量に対応するゲージ場として重力場を導入した．すべての相互作用はゲージ型であり，従って保存量とゲージ場との間には一対一の対応があるという仮定を，ゲージ原理と呼ぼう．これは本質的に内山によって提案されたものである．この原理からどのような結論が出るかという例を挙げてみよう．かつて物質の安定性と関連して，重粒子数の保存という仮説があった．もしもこれが正しければ，それに対応するゲージ場があるはずである．これはベクトル場であり，その相互作用は重粒子数に比例する．マクロの物質では質量と重粒子数とは近似的に比例するのでこの力は重力に良く似ており，その効果はNewtonの重力法則からのずれとして観測されるはずである．しかしながら重力の法則は非常に良い精度で成り立っているので，このような力の存在は考え難い．従って重粒子数の保存を仮定する根拠は薄弱となる．このことは現在注目されている陽子崩壊の可能性と結び付いてくることになる．

以下においてこのゲージ場の考え方の定式化について概観してみよう．

§1　電磁場のゲージ変換

上述の如く電磁場は最も古くから知られているゲージ場である．上には述べられなかったが，ゲージ場の数学的定式化において基本的重要性を持っているのはゲージ変換である．そこでまず電磁場に対するゲージ変換について調べ，それを他の非可換ゲージ場に対して拡張する．

ある場 a の量子の荷電を $e_a=eq_a$ と表わす．e は単位電荷であり，q_a は無次元数である．そこで荷電を表わす演算子を eQ と書くことにすると，

$$[\psi_a(x), Q]=q_a\psi_a(x) \tag{1.1}$$

となり，q_a は Q の固有値の一つとなる．そこで次のユニタリー演算子を考え

る:

$$\mathcal{R}(\lambda)=\exp(i\lambda Q) \tag{1.2}$$

ここにλは実のパラメターである．そこで $\psi_a(x)$ に対して位相変換を導入する．

$$\psi_a(x)\to\psi'_a(x)=\mathcal{R}^{-1}(\lambda)\psi_a(x)\mathcal{R}(\lambda)=e^{i\lambda q_a}\psi_a(x) \tag{1.3}$$

荷電が保存される系では，ラグランジアン密度はこの変換に対して不変であり，この対称性を大局的対称性と呼ぶ．(1.3) の変換は (1.2) の一つの表現であり，

$$U(\lambda)=e^{i\lambda q_a} \tag{1.4}$$

と記すことにする．そこで次にλというパラメターを座標の関数で置き換える．

$$\lambda\to\lambda(x) \tag{1.5}$$

この $\lambda(x)$ を (1.2)，(1.3)，(1.4) に代入したものを局所的ゲージ変換と呼ぶ．それに対して定数λを用いたものは大局的ゲージ変換と呼ぶ．そこで (1.3) は

$$\psi_a(x)\to U(\lambda(x))\psi_a(x) \tag{1.6}$$

そこでゲージ場 A_μ を用いて共変微分 D_μ を定義する．

$$D_\mu=\partial_\mu-ie_aA_\mu(x) \tag{1.7}$$

ただしこの共変微分は，微分される相手が $\psi_a(x)$ と指定されている．この A_μ がゲージ変換でどのように変換されるかを定めるために，$D_\mu\psi_a$ はゲージ変換により (1.6) と同じ形の変換を受けることを要請する:

$$D'_\mu\psi'_a(x)=U(\lambda(x))D_\mu\psi_a(x) \tag{1.8}$$

(1.6) と (1.8) とを組み合わせると，

$$D'_\mu=U(\lambda(x))D_\mu U(\lambda(x))^{-1} \tag{1.9}$$

この式に (1.7) を代入すると，A_μ の変換性が定まる．

$$A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\frac{1}{e}\partial_\mu\lambda(x) \tag{1.10}$$

ここで注意すべきことは，上の変換はもはや a の選び方には依らないことである．また (1.9) より

$$[D'_\mu,D'_\nu]=U(\lambda(x))[D_\mu,D_\nu]U(\lambda(x))^{-1} \tag{1.11}$$

となるが，この交換子は次のように微分を含まず，従って U と可換となるのでゲージ変換に対する不変量となる:

$$[D_\mu,D_\nu]=-ie_a(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)=-ie_aF_{\mu\nu} \tag{1.12}$$

またDに対して Jacobi の恒等式を書いてみる．

$$[D_\mu,[D_\nu,D_\sigma]]+[D_\nu,[D_\sigma,D_\mu]]+[D_\sigma,[D_\mu,D_\nu]]=0 \qquad (1.13)$$

この式に（1.12）を代入すると，

$$\partial_\mu F_{\nu\sigma}+\partial_\nu F_{\sigma\mu}+\partial_\sigma F_{\mu\nu}=0 \qquad (1.14)$$

これを Bianchi の恒等式と呼ぶ．

§2　非可換ゲージ場

前節では保存量Qを1個だけ考えたが，N個の保存量 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$ が存在し，Lie 代数を構成している場合を考える．すなわち，その間の交換関係が

$$[Q_a, Q_b]=if_{abc}Q_c \qquad (2.1)$$

のような形になるものとする．そしてこの代数のn次元既約表現となる場$\psi(x)$を考える．すなわち

$$[\psi_r(x), Q_a]=(t_a)_{rs}\psi_s(x) \qquad (r,s=1,2\cdots,n) \qquad (2.2)$$

このt_aはQ_aのn次元表現である．電磁場の時に異なる場に対するQの表現が異なるqで与えられたように，Q_aの表現t_aも場によって異なる．前節にならって

$$\mathcal{R}(\lambda)=\exp\left(i\sum_{a=1}^{N}\lambda^a Q_a\right) \qquad (2.3)$$

を導入して，$\psi(x)$ に対する位相変換を次式で与える：

$$\psi(x)\to\psi'(x)=\mathcal{R}^{-1}(\lambda)\psi(x)\mathcal{R}(\lambda)=U(\lambda)\psi(x) \qquad (2.4)$$

ただし

$$U(\lambda)=\exp\left(i\sum_{a=1}^{N}\lambda^a t_a\right) \qquad (2.5)$$

次にこの変換を局所化し，$\psi(x)$に対する共変微分D_μを定義する．

$$\lambda^a\to\lambda^a(x),$$

$$D_\mu=\partial_\mu-ig\sum_{a=1}^{N}t_a A_\mu^a(x)\equiv\partial_\mu-ig\mathcal{A}_\mu(x) \qquad (2.6)$$

この$\mathcal{A}_\mu$は勿論表現tに陽に依存している．D_μのゲージ変換は前節同様に

$$D'_\mu=U(\lambda(x))D_\mu U(\lambda(x))^{-1} \qquad (2.7)$$

これから$\mathcal{A}_\mu$のゲージ変換の形が定まる．

$$\mathcal{A}'_\mu(x)=U(\lambda(x))\mathcal{A}_\mu(x)U(\lambda(x))^{-1}-\frac{1}{ig}U(\lambda(x))\partial_\mu U(\lambda(x))^{-1} \qquad (2.8)$$

この変換を A_μ^a という成分に対して書いてやると，実は表現 t の選び方に依らないことが分かる．例えば，$\lambda(x)$ を無限小とすると

$$A_\mu^{a\prime}(x)=A_\mu^a(x)+f_{abc}A_\mu^b(x)\lambda^c(x)+\frac{1}{g}\partial_\mu\lambda^a(x) \tag{2.9}$$

となり，表現 t は完全に消えている．また D 同士の交換子は

$$[D_\mu, D_\nu]=-ig(\partial_\mu\mathscr{A}_\nu-\partial_\nu\mathscr{A}_\mu-ig[\mathscr{A}_\mu, \mathscr{A}_\nu])\equiv -ig\mathscr{F}_{\mu\nu}, \tag{2.10}$$

$$\mathscr{F}_{\mu\nu}=\sum_{a=1}^{N}t_a(\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a+gf_{abc}A_\mu^bA_\nu^c) \tag{2.11}$$

これから分かるように $\mathscr{F}_{\mu\nu}$ の成分は再び t の選び方によらないことになる．また $\mathscr{F}_{\mu\nu}$ のゲージ変換は次式で与えられる：

$$\mathscr{F}'_{\mu\nu}(x)=U(\lambda(x))\mathscr{F}_{\mu\nu}(x)U(\lambda(x))^{-1} \tag{2.12}$$

この場合に t 同士は非可換なので，$\mathscr{F}_{\mu\nu}$ はゲージ不変ではなくなる．しかし，

$$\mathrm{Tr}(\mathscr{F}_{\mu\nu}(x)\mathscr{F}_{\mu\nu}(x)) \tag{2.13}$$

は明らかにゲージ不変であり，ゲージ場のラグランジアン密度として使われる．$A_\mu^a(x)$ が非可換ゲージ場と呼ばれる．この場合にも (1.13) から Bianchi の恒等式を出すことができる．

§3 ゲージ場としての重力場

重力場がゲージ場の一種であることは内山により初めて認識された．重力場の持つ時空座標の変換に関する対称性は，時空と独立な内部対称性とは違うのでいろいろと複雑なことが生ずる．今まで，与えられた場とその共変微分とが同じ変換性を示すという条件によりゲージ場を導入したが，時空座標の変換に対してはテンソルの階数が既約表現を指定し，共変微分はその階数を変えてしまうので，与えられた場とその共変微分とは明らかに異なる変換を受けることになる．例えばスカラー場 ϕ に対して $D_\mu D_\nu\phi$ を考えると，D_ν はスカラー場に対する共変微分 ∂_ν であるが，D_μ はベクトル場に対する共変微分となり，

$$D_\mu\phi_\nu=\partial_\mu\phi_\nu-\Gamma_{\mu\nu}^\lambda\phi_\lambda \tag{3.1}$$

ここで $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ は行列 Γ_μ の行列要素

$$(\Gamma_\mu)_\nu{}^\lambda=\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \tag{3.2}$$

と考えれば，Γ_μ は前節の $ig\mathscr{A}_\mu$ に対応することになる．$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ は第二種の Christoffel 記号であって次式で定義される：

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\sigma\nu}+\partial_{\nu}g_{\sigma\mu}-\partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) \tag{3.3}$$

また一般座標変換に対して Γ はテンソルとして変換せずに，ゲージ場特有の変換行列の微分を含む付加項が出てくる．

次に $\mathscr{F}_{\mu\nu}$ に対応する量を作ってみよう．既に述べたように，D の表現は微分される相手によって異なるので，例えばスカラー場 ϕ を考えると，

$$[D_{\mu}, D_{\nu}]\phi=\phi_{:\nu:\mu}-\phi_{:\mu:\nu}=0 \tag{3.4}$$

ただし $:\mu$ は共変微分を表わす．ところがベクトル場 A_{ν} に対しては，

$$[D_{\sigma}, D_{\rho}]A_{\nu}=A_{\nu:\rho:\sigma}-A_{\nu:\sigma:\rho}=R^{\lambda}_{\nu\rho\sigma}A_{\lambda} \tag{3.5}$$

そこで前節の $\mathscr{F}_{\mu\nu}$ に対応して行列 Γ を用いると，

$$\begin{aligned}R^{\lambda}_{\nu\rho\sigma}&=(\mathscr{F}_{\rho\sigma})_{\nu}{}^{\lambda}=(\partial_{\rho}\Gamma_{\sigma}-\partial_{\sigma}\Gamma_{\rho}-[\Gamma_{\rho}, \Gamma_{\sigma}])_{\nu}{}^{\lambda}\\&=\partial_{\rho}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}-\partial_{\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\alpha}\end{aligned} \tag{3.6}$$

この形は本質的に前節の $\mathscr{F}_{\mu\nu}$ と同じであることは明らかであろう．またスカラー場 ϕ に対する Jacobi の恒等式

$$([D_{\nu}, [D_{\rho}, D_{\sigma}]]+[D_{\rho}, [D_{\sigma}, D_{\nu}]]+[D_{\sigma}, [D_{\nu}, D_{\rho}]])\phi=0 \tag{3.7}$$

は，次の式に $\partial_{\lambda}\phi$ を乗じたものに等しくなる：

$$R^{\lambda}_{\nu\rho\sigma}+R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}+R^{\lambda}_{\sigma\nu\rho}=0 \tag{3.8}$$

またベクトル場 A_{μ} に対しては

$$([D_{\nu}, [D_{\rho}, D_{\sigma}]]+[D_{\rho}, [D_{\sigma}, D_{\nu}]]+[D_{\sigma}, [D_{\nu}, D_{\rho}]])A_{\mu}=0 \tag{3.9}$$

より次の式を得る：

$$R^{\lambda}_{\mu\rho\sigma:\nu}+R^{\lambda}_{\mu\sigma\nu:\rho}+R^{\lambda}_{\mu\nu\rho:\sigma}=0 \tag{3.10}$$

(3.8)，(3.10) は Bianchi の恒等式である．

第14章　対称性の自発的破れ

前章においてゲージ原理について述べたが，現状では残念ながらまだゲージ相互作用以外の相互作用を消去しきれないでいる．またラグランジアンにおける対称性が何らかの原因で破られ，表面には出てこないことがある．これを隠された対称性と呼ぶ．このような場合には，破れた対称性，あるいは隠された対称性に対応するゲージ場の量子が，光子などとは異なって質量を獲得する．この章では，ラグランジアンにおける対称性が破られる機構について議論する．

§1　南部-Goldstone 粒子

与えられたラグランジアンが，Lie 群 G に対して不変であるとする．この系の基底状態を真空と呼び，$|0\rangle$ で表わすことにする．この時に，次の二つの場合が生ずる．

1)　$|0\rangle$ が G に対して不変であり，従って G の1次元表現に属する．

2)　$|0\rangle$ が G に対して不変でなく，従って G の多次元表現に属する．

この前者の場合が明白な対称性 (manifest symmetry) であり，後者の場合が隠された対称性 (hidden symmetry) である．後者の場合には，対称性が自発的に破れていると称するが，明らかに $|0\rangle$ が縮退していることになる．場の理論以外にもこのような例は多いが，しばしば引用される例は強磁性体である．基底状態では電子のスピンが一方向に揃ってしまう．どちらの方向を向くかは，どのようにして基底状態が準備されたかに依存するが，もともと回転対称の系であるから，この基底状態はスピンの向きに関して縮退していることになる．

南部-Goldstone の定理

ラグランジアンが Lie 群 G に対して不変であり，その不変性が自発的に破れている時には，質量もスピンも 0 の粒子が存在する．

このことは初め南部-Jona-Lasinioにより発見され，次いでGoldstoneによりもっと簡単な例が与えられた．この粒子を南部-Goldstone粒子と呼ぶ．

もしも $|0\rangle$ が1次元表現に属さないならば，

$$\langle 0|\rho_a(x)|0\rangle \neq 0 \tag{1.1}$$

を満たすような局所的スカラー演算子が存在する．ρ_a 自身は多次元表現に属するが，その表現の選択は $|0\rangle$ の表現に依存する．スピンが0でない演算子の期待値は，ローレンツ不変性のために常に消える．以下においては，ρ_a としてスカラー場の演算子自身を選べる場合について考える．もともとの南部-Jona-Lasinioの模型では，ρ としてフェルミ場の双一次形式が選ばれた．それは，彼らの模型にはスカラー場が含まれていなかったからである．

群 G の無限小変換を次の形に表わす：

$$\delta\varphi_a = \varepsilon_\alpha T^\alpha_{ab}\varphi_b \tag{1.2}$$

ここで $\varepsilon_\alpha \to \lambda^a$，$T^\alpha \to it_a$ と書き換えると，(13.2.4) の式と一致する．この時の Noether の流れは

$$J^\alpha_\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{a:\mu}} T^\alpha_{ab}\varphi_b \tag{1.3}$$

であり，かつ次の局所的保存則を満たしている：

$$\partial_\mu J^\alpha_\mu = 0 \tag{1.4}$$

そこで本節冒頭に掲げた二つの場合について大局的保存則について調べる．

1)　明白な対称性が存在する場合には大局的保存量

$$Q^\alpha = \int d^3x J^\alpha_0(x) \tag{1.5}$$

が存在し，次の大局的保存則が成り立つ：

$$\frac{dQ^\alpha}{dt} = 0. \tag{1.6}$$

かつ $|0\rangle$ は G の1次元表現に属するから，G の生成元 Q^α に対して

$$Q^\alpha|0\rangle = 0. \tag{1.7}$$

なお Q^α が群 G の生成演算子であるということは，(1.3) の定義から直ちに示されるように，

$$i[Q^\alpha, \varphi_a] = T^\alpha_{ab}\varphi_b \tag{1.8}$$

この場合には (1.7) から明らかなように

$$i\langle 0|[Q^\alpha, \varphi_a]|0\rangle = T^\alpha_{ab}\langle 0|\varphi_b|0\rangle = 0. \tag{1.9}$$

なお Q^α はくりこみをした場合としない場合に共通であり，(1.8)，(1.9) はくりこんだ場の演算子とくりこんでいないものに対して同じ形の式が成り立つ．しかし，次に展開される議論では，くりこまれたものを考えた方が便利である．

2)　破れた対称性に対しては

$$T^\alpha_{ab}\langle\varphi_b\rangle \neq 0, \qquad \langle\varphi_b\rangle = \langle 0|\varphi_b|0\rangle \tag{1.10}$$

となるような成分 b が存在する．この時に南部-Goldstone の定理を証明する．

まず次の二点関数の構造を**明白なローレンツ共変性**の下に調べよう：

$$i\langle 0|[J^\alpha_\mu(x),\ \varphi_a(y)]|0\rangle \tag{1.11}$$

まず第 11 章 §8 における積分表示に関する議論から，(1.11) の最も一般的な形として次のような積分表示を書き下すことができる：

$$i\langle 0|J^\alpha_\mu(x), \varphi_a(y)]|0\rangle = \partial_\mu\int dm^2\rho^\alpha_a(m^2)\Delta(x-y\,;\,m^2) \tag{1.12}$$

またスペクトル関数 $\rho^\alpha_a(m^2)$ は次式で与えられる：

$$p_\mu\theta(p_0)\rho^\alpha_a(-p^2) = (2\pi)^3 i\sum_n \delta^4(p-p_n)\langle 0|J^\alpha_\mu(0)|n\rangle\langle n|\varphi_a(0)|0\rangle \tag{1.13}$$

(1.12) の発散をとり，局所的保存則 (1.4) を用いると，

$$\int dm^2\rho^\alpha_a(m^2)m^2\Delta(x-y\,;\,m^2) = 0, \tag{1.14}$$

$$m^2\rho^\alpha_a(m^2) = 0 \tag{1.15}$$

この式を満たす ρ の一般形は

$$\rho^\alpha_a(m^2) = N^\alpha_a\delta(m^2) \tag{1.16}$$

従って $m^2=0$ に対する Δ 関数を D と書くと，

$$i\langle 0|J^\alpha_\mu(x), \varphi_a(y)]|0\rangle = N^\alpha_a\partial_\mu D(x-y) \tag{1.17}$$

そこで $\mu=4$ と置き，(1.8) を用いると，

$$N^\alpha_a = T^\alpha_{ab}\langle\varphi_b\rangle \neq 0 \tag{1.18}$$

すなわち，

$$i\langle 0|[J^\alpha_\mu(x), \varphi_a(y)]|0\rangle = T^\alpha_{ab}\langle\varphi_b\rangle\partial_\mu D(x-y) \tag{1.19}$$

この式は，スカラー場 φ_a が質量 0 の一粒子状態を産み出すことを意味する．この粒子が南部-Goldstone 粒子である．

なおこの時には J^{α}_{μ} の中に $\partial_{\mu}\varphi_a$ に比例する項を含み,

$$\int d^3x\partial_{\mu}\varphi_a \sim V\cdot\frac{1}{\sqrt{V}}=\sqrt{V}\rightarrow\infty \qquad (V\rightarrow\infty) \tag{1.20}$$

となるので, Q^{α} を定義する積分 (1.8) は発散する. そこで, (1.8) 式は

$$i\int d^3x[J^{\alpha}_0(x),\varphi_a(y)]=T^{\alpha}_{ab}\varphi_b(y) \qquad (x_0=y_0) \tag{1.21}$$

のように書き直される. すなわち, 交換子をとる操作と積分の順序を変更しておかないと意味が無い. この時には大局的保存量 Q^{α} は存在しなくなってしまう. その結果としてこの破れた対称性は認識されなくなり, 隠された対称性となってしまう.

また質量もスピンも0の粒子は実験的に観測されていない. それでは破れた対称性という可能性は現実世界では実現されていないのであろうか？　それとも南部-Goldstone粒子は何らかのメカニズムによって我々の眼前から消えてしまうのであろうか？　この問題の解決がこの章の目的である.

§2　シグマ模型

前節において破れた対称性と南部-Goldstone 粒子との関係を調べたが, 本節ではそれを実現する簡単な模型について論じよう. そこで,

$$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \sigma \tag{2.1}$$

という擬スカラーの三重項 π とスカラーの一重項 σ とからなる系を考えよう. スカラーと擬スカラーとの区別はフェルミオンを導入し,

$$i\bar{\psi}\gamma_5\frac{\hat{\tau}}{2}\psi\hat{\varphi}, \qquad \bar{\psi}\psi\sigma \tag{2.2}$$

のような相互作用を入れなければ現れないが, 以下では簡単のためにボゾンのみを考えることにする. そして次の記号を導入する:

$$\varphi_a{}^2=\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2+\varphi_2{}^3+\sigma^2=\hat{\varphi}^2+\sigma^2 \tag{2.3}$$

ただし φ_i は π_i に対する場の演算子であり, σ は σ に対するものである.

ラグランジアン密度として

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}(\partial_{\mu}\varphi_a)^2+\frac{1}{4}m^2\varphi_a{}^2-\frac{1}{8}f^2(\varphi_a{}^2)^2 \tag{2.4}$$

を仮定すると, この系は O(4) に対する対称性を持っている. この質量項の符

号は通常のものとは逆であることに注意されたい．第二項と第三項の和の符号を変えたものを $U(\varphi)$ と書くと，この $U(\varphi)$ はポテンシャル・エネルギーに相当する項である．

$$U(\varphi)=-\frac{1}{4}m^2\varphi_a{}^2+\frac{1}{8}f^2(\varphi_a{}^2)^2 \tag{2.5}$$

$\varphi_a=0$ は $U(\varphi)$ の極値を与えるが，最小値は与えない．換言すると，通常の対称的な真空は安定ではない．非対称な真空を導入する前に，この模型の代数的構造を調べてみよう．この系には6個の局所的保存則が存在する．すなわち，

$$\hat{\boldsymbol{V}}_\mu=-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\times\partial_\mu\hat{\boldsymbol{\pi}}, \qquad \hat{\boldsymbol{A}}_\mu=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\partial_\mu\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}\partial_\mu\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{2.6}$$

というベクトル流と軸性ベクトル流とを導入する．しからば，いずれの流れ密度も局所的保存則を満たす：

$$\partial_\mu\hat{\boldsymbol{V}}_\mu=0, \qquad \partial_\mu\hat{\boldsymbol{A}}_\mu=0 \tag{2.7}$$

もしも大局的保存則が成り立つならば，$\hat{\boldsymbol{\pi}}=\dot{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}$，$\boldsymbol{\pi}_0=\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ として，保存量は

$$\hat{I}=\int d^3x(\hat{\boldsymbol{\varphi}}\times\hat{\boldsymbol{\pi}}), \qquad \hat{I}^5=\int d^3x(\boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{\pi}}-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{\pi}_0) \tag{2.8}$$

そしてその間の交換関係は，(12.5.15)，(12.5.19)，(12.5.20) と同様に

$$[I_i, I_j]=i\varepsilon_{ijk}I_k, \qquad [I_i, I_j^5]=i\varepsilon_{ijk}I_k^5, \qquad [I_i^5, I_j^5]=i\varepsilon_{ijk}I_k \tag{2.9}$$

大局的保存則が成り立たない場合には，密度の間の交換関係が成り立つ．第11章§8で議論した後藤–今村–Schwinger 項の可能性を無視すれば，$x_0=y_0$ として

$$[V_{i0}(x), V_{j0}(y)]=i\varepsilon_{ijk}\delta^3(x-y)V_{k0}(x) \tag{2.10}$$

そこで

$$\mathscr{F}_{i\mu}^{(\pm)}=\frac{1}{2}(V_{i\mu}\pm A_{i\mu}) \tag{2.11}$$

とすれば，第12章§6で議論したように密度に対して

$$\mathrm{SU}(2)_L\times\mathrm{SU}(2)_R \tag{2.12}$$

という流れの代数が成り立つ．この模型に更にフェルミオンを付け加えれば，流れの代数の表現ができる．これがカイラル力学となり，流れの代数に対する簡単な表現ができる．しかしながら現実には σ に相当する粒子がないので，σ 無しの表現が作られた．残念ながら σ 無しの表現は極めて非線形の理論となるので結局クォーク模型に移行してしまったのである．以下では模型として σ を

残したものを考える．そこで主題の破れた対称性の話に戻り，場の方程式を書く．

$$\Box\boldsymbol{\varphi}_a+\frac{1}{2}[m^2-f^2\boldsymbol{\varphi}_b{}^2]\boldsymbol{\varphi}_a=0 \tag{2.13}$$

これを古典的方程式と見なすと，因果律の要求は

$$\frac{1}{2}(m^2-f^2\boldsymbol{\varphi}_b{}^2)\leqq 0 \tag{2.14}$$

でなければ満たせない．すなわち $\langle\boldsymbol{\varphi}_b\rangle^2\neq 0$ である．$U(\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle)$ の最小に対応して

$$\langle\hat{\boldsymbol{\varphi}}\rangle=0,\qquad \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle=\eta\neq 0 \tag{2.15}$$

と置く．ただしパリティとアイソ・スピンは保存させてある．そこで

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_0+\eta \tag{2.16}$$

と置けば，ポテンシャルを最小にするという条件で η が決定される．

$$m^2=f^2\eta^2 \tag{2.17}$$

さて対称性の破れを導入したので，$\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ と $\boldsymbol{\sigma}_0$ とがどのような方程式に従うかを調べてみると，

$$\Box\hat{\boldsymbol{\varphi}}=\text{非線形項},\qquad (\Box-m^2)\boldsymbol{\sigma}_0=\text{非線形項} \tag{2.18}$$

これから分かることは，$\boldsymbol{\pi}$ は質量が 0 となり，$\boldsymbol{\sigma}$ は有限の質量を持つことであり，$\boldsymbol{\pi}$ が南部-Goldstone 粒子となる．この節での対称性の破れの議論は古典的であったが，もっと詳しい量子論的な議論は次節で与える．

$\boldsymbol{\pi}$ をパイオンと解釈すれば，実際には小さい質量を持つので，更に人工的に僅かな破れを導入するために小さい付加項を加える．そしてこの項が破れの方向を定めると考えても良いであろう．a を微小量として，

$$\mathcal{L}\to\mathcal{L}'=\mathcal{L}+a\sigma \tag{2.19}$$

この時には η は a のオーダーだけずれて η' になる．

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_0+\eta' \tag{2.20}$$

この時のポテンシャルを古典的に最小にすると，

$$m^2=f^2\eta'^2-\frac{2a}{\eta'} \tag{2.21}$$

従って a が小さければ，η' は η から a のオーダーしかずれない．$\boldsymbol{\sigma}$ の質量は再び m によりえられるが，$\boldsymbol{\pi}$ の質量は有限になり，それを μ とすると

$$\mu^2=\frac{1}{2}(f^2\eta'^2-m^2)=\frac{a}{\eta'} \tag{2.22}$$

またこの時に軸性ベクトル流の局所的保存則は破れて，η' を f_π と書くと，

$$\partial_\mu \hat{A}_\mu = -\mu^2 f_\pi \hat{\varphi} \tag{2.23}$$

この関係式を PCAC (partially conserved axial-vector current) と呼ぶ．π を複合粒子と考えた時にその現象論的場の演算子をこの式で定義する．

この節における対称性の破れの議論は古典的かつ現象論的であったので，この議論を量子論的に厳密に行うために，グリーン関数を用いてこの問題の定式化を次節において行う．

§3　対称性の自発的破れの機構

対称性の自発的破れの例として強磁性体を前に考えた．磁場の無い時には高温では電子のスピンの方向は熱運動のためにばらばらで，回転対称性が成り立っている．この時に磁場をかければ強磁性体は磁場の方向に磁化する．そこでだんだん温度を下げると相転移が起きて，磁場を除いても磁化したままで残ることになる．この現象を場の理論における対称性の自発的破れの場合に翻訳するためにグリーン関数を用いる．この定式化のために必要な準備は，第10章の §2 で与えられている．

連結グリーン関数の母関数 $\mathcal{R}[J]$ は外場 J の汎関数であり，J は強磁性体の時に外から加えた磁場に対応する．その結果生ずる場 $\boldsymbol{\varphi}(x)$ の真空期待値は低温での磁化に対応する．そこで外場が無くても磁化が起きるかどうかを調べるには，外場よりも磁化を自変数に選んで，後者が適当な値をとった時に前者が消える可能性があるかどうかを調べることにする．この適当な値が，永久磁石の磁化に相当するのである．

第10章§2では $J(x)$ の汎関数 $\mathcal{R}[J]$ と，$\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle$ の汎関数 $\mathcal{F}[\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle]$ を導入したが，少し位相を変えておいた方が便利であるので，

$$\mathcal{R} = -iW, \qquad \mathcal{F} = -i\Gamma \tag{3.1}$$

と書くと，(10.2.22) 式は次のように書ける：

$$\Gamma = W - \int d^4x \langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle J(x) \tag{3.2}$$

そして，生成母汎関数としての役割は，次のように表現される：

$$\frac{\delta W}{\delta J(x)} = \langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle, \qquad \frac{\delta \Gamma}{\delta\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle} = -J(x) \tag{3.3}$$

W と Γ とはそれぞれ連結グリーン関数と一粒子既約なグリーン関数の母汎関数となっている．前者は連結した Feynman 図形に対応するグリーン関数であり，後者は一粒子状態に対応する極の無いグリーン関数である．後者では一粒子伝播関数は $\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle$ の中に吸収されてしまうからである．

運動量空間における連結および一粒子既約なグリーン関数は，それぞれ次の式で定義される．$(dp)=d^4p_1\cdots d^4p_n$ として，

$$\left(\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\right)_{J=0}=\frac{1}{(2\pi)^{4(n-1)}}\int(dp)\delta(p_1+\cdots+p_n)$$
$$\times e^{ip_1\cdot x_1+\cdots ip_n\cdot x_n}G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n), \tag{3.4}$$

$$\left(\frac{\delta^n\Gamma[\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle]}{\delta\langle\boldsymbol{\varphi}(x_1)\rangle\cdots\delta\langle\boldsymbol{\varphi}(x_n)\rangle}\right)_{\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle=\varphi}=\frac{1}{(2\pi)^{4(n-1)}}\int(dp)\delta(p_1+\cdots+p_n)$$
$$\times e^{ip_1\cdot x_1+\cdots+ip_n\cdot x_n}\Gamma^{(n)}(p_1,\cdots,p_n) \tag{3.5}$$

ただし φ は定数であり，対称性が自発的に破れている理論では φ は 0 でない値をとることになる．さて有効ポテンシャル $V(\varphi)$ を次式で定義する：

$$V(\varphi)=-\Gamma[\varphi] \tag{3.6}$$

$\Gamma[\varphi]$ は最低次では，ラグランジアン密度において場の演算子を定数 φ で置き換えたものと一致し，従って前節の $-U(\varphi)$ と一致する．すなわち，

$$V^{(0)}(\varphi)=-\mathcal{L}(\varphi)=U(\varphi) \tag{3.7}$$

ただ高次の量子論的補正を入れるとずれてくるので，有効ポテンシャルと呼ぶのである．以下では φ が多成分の場合について考え，§1 で考えたように理論がある Lie 群 G に対して不変であるとする．しからば (1.2) の変換に対する不変性に対応して

$$V(\varphi_a+\varepsilon_\alpha T^\alpha_{ab}\varphi_b)=V(\varphi_a)\quad \text{あるいは}\quad \frac{\partial V}{\partial\varphi_a}T^\alpha_{ab}\varphi_b=0 \tag{3.8}$$

ところで (10.2.24)，(10.2.26) に対応して

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi_a}=J_a,\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_a\partial\varphi_b}=-\Delta_F^{-1}(0)_{ab} \tag{3.9}$$

ただし J_a は φ_a に対応する外場であり，$\Delta_F^{-1}(0)$ は $p^2=0$ に対応しかつ φ という期待値が必ずしも消えない時の多成分伝播関数の逆行列を表わす．(3.8) 式を φ_c で微分すると，

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_a\partial\varphi_c}T^\alpha_{ab}\varphi_b+\frac{\partial V}{\partial\varphi_a}T^\alpha_{ac}=0 \tag{3.10}$$

この式を (3.9) と組み合わせると,

$$\varDelta_F^{-1}(0)_{ca}T^{\alpha}_{ab}\varphi_b=J_aT^{\alpha}_{ac} \tag{3.11}$$

さて外場 J が 0 でも φ に有限な成分が生ずるためには，すなわち対称性が自発的に破れるための条件は，従って

$$J_a=\frac{\partial V}{\partial\varphi_a}=0, \qquad \varDelta_F^{-1}(0)_{ca}T^{\alpha}_{ab}\varphi_b=0 \tag{3.12}$$

第二式は質量 0 の南部-Goldstone 粒子が存在することを意味する式である．この式が $\varphi=0$ 以外の解を持つことは必要条件であるが，十分条件はその φ の値に対して $V(\varphi)$ が最小となることである．

例として SO(n) 対称性を考え，

$$V(\varphi)=F(\varphi_a{}^2) \tag{3.13}$$

とする．ただし $\varphi_a{}^2=\varphi_1{}^2+\cdots+\varphi_n{}^2$ を表わすものとする． そし $F(x)$ が $x=x_0$ において最小値をとるとすると,

$$F'(x_0)=0, \qquad F''(x_0)>0 \tag{3.14}$$

この時に J_a は $\varphi_a{}^2=x_0$ に対して 0 となる．

$$J_a=2\varphi_aF'(x_0)=0 \tag{3.15}$$

この時には (3.12) の第二式も成り立つことになる．さて $\varphi_a{}^2=x_0$ の解は縮退している．すなわちこの系の基底状態は縮退していることになる．さてこの時に

$$\varDelta_F^{-1}(0)_{ab}=-\frac{\partial^2V}{\partial\varphi_a\partial\varphi_b}=-2\delta_{ab}F'(\varphi_a{}^2)-4\varphi_a\varphi_bF''(\varphi_a{}^2) \tag{3.16}$$

$\varphi_a{}^2=x_0$ と置けば

$$\varDelta_F^{-1}(0)_{ab}=-4\varphi_a\varphi_bF''(x_0) \tag{3.17}$$

この行列の固有値は $-4x_0F''(x_0)$ と，他は全部 0 である． 前者の固有ベクトルは n 次元ベクトル $(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$ と平行なベクトルであり，後者はそれと垂直なベクトルである．そこで SO(n) の適当な回転により $\varDelta_F^{-1}(0)$ を対角形に書く．

$$\varDelta_F^{-1}(0)=\begin{pmatrix} D & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

この新しい座標系では φ の成分は $(\sqrt{x_0},0,\cdots,0)$ と書けることになる． この時に (3.12) において $c=1$ とすると，T の反対称性から $T^{\alpha}_{1b}\varphi_b=0$ となり,

$c \neq 1$ とすると $\Delta_F^{-1}(0)_{ca}=0$ となるために，いずれにしても (3.12) は成り立っている．そして $c=1$ に対応する成分は有限な質量を持ち，$c \neq 1$ という成分は $\Delta_F(p^2)$ に対する質量 0 の極を与えるから南部-Goldstone 粒子を含むことになる．なお $c \neq 1$ に対しては，適当な α に対して $T^a_{cb}\varphi_b \neq 0$ となるから §1 の議論からも南部-Goldstone 粒子の存在が結論される．

前節のシグマ模型における議論は，近似 (3.7) に基づいて，上の計算を具体的に行ったものであり，上の $c=1$ という成分が σ，$c \neq 1$ が π に対応している．

§4 Higgsの機構

今までにゲージ原理について考察したが，もし対称性が破れていなければ，保存則の数だけ質量 0 のゲージ場の量子が存在するはずである．他方，対称性が自発的に破れているならば，質量 0 のスカラー粒子が存在するはずである．しかしながら現実には光子以外に質量 0 のボゾンは観測されていない．それでは何かまだ知られていない機構により，質量 0 のボゾンが消去されることがあるのであろうか？　この問題に対して大変興味深い考察をしたのが Higgs (1964) である．以下において彼の考え方を紹介しよう．

対称群として最も簡単な U(1)，あるいは SO(2) を考えてみよう．与えられた系が，二つの実スカラー場 φ_1, φ_2 を含み，次の変換に対して不変としよう：

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} \tag{4.1}$$

この系のラグランジアン密度がこの変換に対して不変であれば，この変換に対応する Noether の流れ $j_\mu(x)$ を導入することができて，次の交換関係を得る：

$$i\int d^3x[\boldsymbol{j}_0(x), \boldsymbol{\varphi}_1(y)]=\boldsymbol{\varphi}_2(y) \tag{4.2}$$

$$i\int d^3x[\boldsymbol{j}_0(x), \boldsymbol{\varphi}_2(y)]=-\boldsymbol{\varphi}_1(y) \tag{4.3}$$

ただし $x_0=y_0$ とする．そこで次のような対称性の自発的な破れを仮定する：

$$\langle \boldsymbol{\varphi}_2(x)\rangle \neq 0 \tag{4.4}$$

南部-Goldstone の定理の証明では

$$\text{F.T. } i\langle 0|[\boldsymbol{j}_\mu(x), \boldsymbol{\varphi}_1(y)]|0\rangle \propto \langle \boldsymbol{\varphi}_2\rangle \varepsilon(k_0)k_\mu\delta(k^2) \tag{4.5}$$

となり，質量 0 のスカラー粒子の存在が結論された．F.T. はフーリエ変換を

意味する．しかしながらこの証明では理論の**明白なローレンツ共変性**を仮定していた．それではこの仮定が成立しなければどうなるであろうか？ 例えば，非相対論的理論では必ずしもこの定理は成立しない．明白な共変性が成立せず，理論の中に特殊な時間軸方向の単位ベクトルが現れるとすると，上の (4.5) に現れるフーリエ変換の一般形は

$$\mathrm{F.T.} \sim k_\mu \rho_1(k^2, n\cdot k) + n_\mu \rho_2(k^2, n\cdot k) + C n_\mu \delta^4(k) \tag{4.6}$$

そしてこの形のもので特に保存則を満たすもの，すなわち k_μ との内積が消えるものの一般形は

$$\mathrm{F.T.} \sim k_\mu \delta(k^2)\rho_4(n\cdot k) + [k^2 n_\mu - k_\mu(n\cdot k)]\rho_5(k^2, n\cdot k) + C n_\mu \delta^4(k) \tag{4.7}$$

の形になる．従って南部-Goldstone の定理に対する反例は，

$$\rho_4 = 0 \tag{4.8}$$

となる場合に与えられる．さて明白な共変性がないのにローレンツ共変な理論が存在するであろうか？ Higgs の挙げた例は，非共変的ゲージにおける QED である．すなわち，ゲージ条件を次の形に与える：

$$n_\mu A_\mu = 0. \tag{4.9}$$

しからば Maxwell の方程式は，

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = -j_\nu, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{4.10}$$

そこで次のようなフーリエ変換の一般型を考える：

$$\begin{aligned} &\mathrm{F.T.}\ i\langle 0|[A_\mu(x), \varphi_1(y)]|0\rangle \\ &= k_\mu \sigma_1(k^2, n\cdot k) + n_\mu \sigma_2(k^2, n\cdot k) + D n_\mu \delta^4(k) \end{aligned} \tag{4.11}$$

しからば (4.9) のゲージ条件から，$n^2=-1$ として，次の関係を得る．

$$\sigma_2 = (n\cdot k)\sigma_1, \qquad D = 0 \tag{4.12}$$

従ってこの結果と (4.10) とを組み合わせると

$$\mathrm{F.T.}\ i\langle 0|[j_\mu(x), \varphi_1(y)]|0\rangle = [k^2 n_\mu - k_\mu(n\cdot k)]\sigma_2(k^2, n\cdot k) \tag{4.13}$$

これは (4.7) と比べると，ちょうど (4.8) が満たされていることになっている．このように非共変的なゲージ条件 (4.9) を選ぶことにより，質量 0 の南部-Goldstone 粒子が現れないことになる．このようなことができたのは，ゲージ場が存在したからである．言うまでもないことだが，本節の初めに出てきた変換 (4.2)，(4.3) は，大局的ゲージ変換に相当する．

上の考え方に基づき，U(1) 対称性に対応するゲージ場を導入し，その対称性

が自発的に破れている場合に何が起きているかについて考察する．以下の議論は Higgs (1966) により与えられたものである．このゲージ場は形式的には電磁場と同じものと考えられるので，次のようなラグランジアン密度を導入する．

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}D_\mu\varphi_a\cdot D_\mu\varphi_a+\frac{1}{4}m_0{}^2\varphi_a\varphi_a-\frac{1}{8}f^2(\varphi_a\varphi_a)^2 \quad (4.14)$$

このスカラー部分はシグマ模型の時と同じであるが，φ_a は2成分で，$a=1,2$. また共変微分 D_μ は次式で定義される：

$$D_\mu\varphi_1=\partial_\mu\varphi_1-eA_\mu\varphi_2, \qquad D_\mu\varphi_2=\partial_\mu\varphi_2+eA_\mu\varphi_1 \quad (4.15)$$

QED では複素場 $\varphi, \varphi^\dagger$ とその共変微分を用いる．すなわち，

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1-i\varphi_2), \qquad \varphi^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1-i\varphi_2), \quad (4.16)$$

$$D_\mu\varphi=(\partial_\mu-ieA_\mu)\varphi, \qquad D_\mu\varphi^\dagger=(\partial_\mu+ieA_\mu)\varphi^\dagger \quad (4.17)$$

しかしながら対称性の自発的破れを導入するには実の場を用いる表示の方が便利である．次に場の方程式は

$$\partial_\nu F_{\mu\nu}=j_\mu=e(\varphi_2D_\mu\varphi_1-\varphi_1D_\mu\varphi_2) \quad (4.18)$$

$$D_\mu{}^2\varphi_a+\frac{1}{2}(m_0{}^2-f^2\varphi_b\varphi_b)\varphi_a=0 \quad (4.19)$$

この例ではシグマ模型と同様に，対称性が自発的に破れるようにラグランジアン密度を選んである．そこでポテンシャル，すなわち最低次の近似での有効ポテンシャル，の極値を与えるような解として，$\langle A_\mu\rangle=0$, $\langle\varphi_b\rangle=0$ 以外にも

$$\langle A_\mu\rangle=0, \qquad \langle\varphi_b\rangle^2=\frac{m_0{}^2}{f^2}\equiv\eta^2 \quad (4.20)$$

がある．これは (2.17) に対応する．

ところでラグランジアン密度，従って場の方程式は，次のゲージ変換に対して不変である：

$$A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\frac{1}{e}\partial_\mu\lambda(x) \quad (4.21)$$

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\cos\lambda(x) & \sin\lambda(x)\\ -\sin\lambda(x) & \cos\lambda(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\end{pmatrix} \quad (4.22)$$

さて (4.20) により対称性が自発的に破れていても，この解は縮退しており，その縮退は定数λに対する (4.22) の変換により生成される．すなわち，(4.20) の解は，次のような任意パラメーター α を許す形になっている：

$$\langle\boldsymbol{\varphi}_1\rangle=\eta\cos\alpha,\qquad \langle\boldsymbol{\varphi}_2\rangle=\eta\sin\alpha \tag{4.23}$$

以下の議論では，$\alpha=\pi/2$ に固定しておく．しからば選ばれた基底状態にて，

$$\langle A_\mu\rangle=0,\qquad \langle\boldsymbol{\varphi}_1\rangle=0,\qquad \langle\boldsymbol{\varphi}_2\rangle=\eta \tag{4.24}$$

そこで，場の演算子をこの古典解の近傍で展開する．

$$\boldsymbol{\varphi}_1=g,\qquad \boldsymbol{\varphi}_2=\eta+h \tag{4.25}$$

そして B_μ というベクトル場と $F_{\mu\nu}$ とを導入する．

$$B_\mu=A_\mu-(e\eta)^{-1}\partial_\mu g \tag{4.26}$$

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \tag{4.27}$$

そこで相互作用を無視して古典解からのずれについて一次の近似で場の方程式を書いてみると，

$$(\Box-m_0{}^2)h=0 \tag{4.28}$$

$$\partial_\nu F_{\mu\nu}=-m_1{}^2B_\mu,\qquad \partial_\mu B_\mu=0 \tag{4.29}$$

ただし m_0, m_1 は η を用いて次のように表わせる：

$$m_0=f\eta,\qquad m_1=e\eta \tag{4.30}$$

すなわちスカラー場 h は質量 m_0 を持ち，ベクトル場 B_μ は質量 m_1 を持ち，質量 0 の粒子は消えてしまっている．もともとのベクトル場は横波成分のみを持ち，質量も 0 であるが，B_μ は南部-Goldstone 場 g を縦波として吸収し，質量が有限なベクトル場になったのである．これを Higgs の機構という．これにより質量 0 の南部-Goldstone 粒子は消え，ゲージ量子も質量を獲得した．

さて相互作用も考えるためにラグランジアン密度を書く．自由部分は(4.28)，(4.29) に対応して

$$\mathscr{L}_{\rm f}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}m_1{}^2B_\mu\cdot B_\mu-\frac{1}{2}(\partial_\mu h\cdot\partial_\mu h+m_0{}^2h^2) \tag{4.31}$$

また相互作用部分は，

$$\mathscr{L}_{\rm int}=eA_\mu(h\partial_\mu g-g\partial_\mu h)-em_1hA_\mu\cdot A_\mu-\frac{1}{2}fm_0h(g^2+h^2)$$
$$-\frac{1}{2}e^2A_\mu\cdot A_\mu(g^2+h^2)-\frac{f^2}{8}(g^2+h^2)^2 \tag{4.32}$$

自由部分から相互作用表示における交換関係が導かれる．

$$[B_\mu(x), B_\nu(y)]=i\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{m_1^2}\right)\Delta(x-y\,;\,m_1{}^2), \tag{4.33}$$

$$[h(x), h(y)]=i\Delta(x-y\,;\,m_0{}^2) \tag{4.34}$$

この質量有限なスカラー場hをHiggs場，その量子をHiggs粒子と呼ぶ．さてゲージ場を量子化するにはゲージ条件が必要であり，それには古典的にゲージ場に拘束条件を与えるか，あるいはラグランジアンにゲージを決める付加項を加えるかしなければならない．この節では前者を採用し，Coulomb ゲージの条件

$$\partial\cdot A+(n\cdot\partial)(n\cdot A)=0 \tag{4.35}$$

を課する．このゲージでは (4.26) から場gを求めることができる．

$$g=-m_1[\Box+(n\cdot\partial)^2]^{-1}[\partial\cdot B+(n\cdot\partial)(n\cdot B)] \tag{4.36}$$

従って，A_μもB_μによって表現することができる．それを用いると，

$$\begin{aligned}
&[A_\mu(x), A_\nu(y)]\\
&=i\{\delta_{\mu\nu}-[(n_\mu\partial_\nu+n_\nu\partial_\mu)(n\cdot\partial)+\partial_\mu\partial_\nu][\Box+(n\cdot\partial)^2]^{-1}\}\varDelta(x-y\,;m_1{}^2),\\
&[A_\mu(x), g(y)]=im_1n_\mu(n\cdot\partial)[\Box+(n\cdot\partial)^2]^{-1}\varDelta(x-y\,;m_1{}^2),\\
&[g(x), g(y)]=i(n\cdot\partial)^2[\Box+(n\cdot\partial)^2]^{-1}\varDelta(x-y\,;m_1{}^2),\\
&[B_\mu(x), g(y)]\\
&=im_1^{-1}[n_\mu\Box-(n\cdot\partial)\partial_\mu](n\cdot\partial)[\Box+(n\cdot\partial)^2]^{-1}\varDelta(x-y\,;m_1{}^2)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

さて局所的荷電保存則は成り立っている：

$$\partial_\mu j_\mu=0 \tag{4.38}$$

しかしながらU(1)対称性が破れている時には，(4.18)，(4.29) から明らかに

$$j_\mu(x)=-m_1{}^2B_\mu(x)+(\text{非線形項}) \tag{4.39}$$

この時には§1で議論したように$j_0(x)$には$1/\sqrt{V}$に比例する項を含むことになるので，その空間積分Qは，$V\to\infty$の時に発散してしまう．

$$Q=\int d^3x\,j_0(x)\sim\sqrt{V}\to\infty \tag{4.40}$$

また積分自身は$B_0(x)$のフーリエ変換で$p=0$の成分に相当するから$\exp(\pm im_1t)$という時間依存性を持ち，大局的保存量とはなり得ない．従って大局的保存則は失われることになる．そこで次にこの節の冒頭で挙げた議論——すなわち非共変的ゲージ条件下で質量0のボゾンが消える——が成り立っているかどうか調べてみよう．最低次で次の交換子を計算する：

$$\begin{aligned}
i\langle 0|[j_\mu(x), \varphi_1(y)]|0\rangle &\approx -im_1{}^2\langle 0|[B_\mu(x), g(y)]|0\rangle\\
&=m_1[n_\mu\Box-(n\cdot\partial)\partial_\mu](n\cdot\partial)[\Box+(n\cdot\partial)^2]^{-1}\varDelta(x-y\,;m_1{}^2)
\end{aligned}$$

従って，そのフーリエ変換は次の量に比例する：

$$[(n\cdot k)k_\mu-k^2n_\mu](n\cdot k)[k^2+(n\cdot k)^2]^{-1}\varepsilon(k_0)\delta(k^2+m_1{}^2) \tag{4.41}$$

この式を本節の初めに挙げた一般形 (4.7) と比較してみると，この項は ρ_5 のみが存在し，ρ_4 が消えている場合に相当する．すなわち，南部-Goldstone の定理の反例 (4.8) が実現されている例になっている．ところで対称性が自発的に破れていなければ，$\eta\to 0$，従って $m_1=e\eta\to 0$ となる．この時に (4.41) は

$$k_\mu\varepsilon(k_0)\delta(k^2) \tag{4.42}$$

という形に戻り，再び南部-Goldstone の定理が生き返り，g が質量 0 の場となる．

上の取扱いでは理論の明白なローレンツ共変性が失われている．しかも余計な場 g が入ってくる．そこでこの理論と同値で，かつローレンツ共変性を保ち，しかも余計な場を含まない定式化を与えよう．Higgs は，直交座標系から極座標系への変換を場の演算子に適用し，

$$\varphi_1=R\cos\boldsymbol{\Theta},\qquad \varphi_2=R\sin\boldsymbol{\Theta},\qquad A_\mu=B_\mu-\frac{1}{e}\partial_\mu\boldsymbol{\Theta} \tag{4.43}$$

と置いた．ゲージ変換は

$$\boldsymbol{\Theta}(x)\to\boldsymbol{\Theta}(x)-\lambda(x) \tag{4.44}$$

で与えられる．この変換によりラグランジアンは次のように書かれる：

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}e^2B_\mu{}^2R^2-\frac{1}{2}\partial_\mu R\cdot\partial_\mu R+\frac{1}{4}m_0{}^2R^2-\frac{1}{8}f^2R^4 \tag{4.45}$$

明らかに余計な自由度 $\boldsymbol{\Theta}$ が消去されている．R は Higgs 場であり，(4.45) で対称性を自発的に破る解は，

$$\langle \boldsymbol{B}_\mu\rangle=0,\qquad \langle \boldsymbol{R}\rangle=\eta \tag{4.46}$$

これから再び $\boldsymbol{B}_\mu$ は質量 m_1 のベクトル場，$\boldsymbol{R}$ は質量 m_0 のスカラー場になる．明らかに質量 0 の南部-Goldstone 粒子は完全に消えてしまう．この証明は大変すっきりしているようであるが，極めて古典的である．量子論的には，(4.43) の変換は極めて，非線形で特異性の強い変換である．更に，(4.45) の形になるとくりこみ理論の適用ができなくなり，高次補正の計算が不可能になる．従って，多くのゲージの選び方があるが，いずれも一長一短である．ここで述べたゲージには不定計量が出ないのでユニタリー・ゲージと呼ぶ．

§5 共変的ゲージ条件下の Higgs 機構

前節において非共変的ゲージ条件下では南部-Goldstone 粒子が現れないことを知った．ゲージ理論の物理的内容がゲージの選び方によらないとすれば，共変的ゲージ条件下では，この質量 0 の粒子の出現は§1で証明したように避けられないにもかかわらず観測にかからないことになる．それではいかなる機構によってこの粒子は隠れてしまうのであろうか？　この問題の解答を与えることが本節の主題である．

この問題を議論するためにまず形式的な議論から始める．ゲージ理論においてしばしば Landau ゲージ（$\alpha=0$）を選ぶと簡単になることがある．しかし，(4.5.1) のラグランジアン密度は，$\alpha=0$ と置くと発散してしまう．そこで，内山や中西に従って補助場 B を導入して，(4.5.1) を次のように書き直す：

$$\mathscr{L}_{\rm em}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu}+\partial_\mu B\cdot A_\mu+\frac{\alpha}{2}B^2 \tag{5.1}$$

ここで B について変分をとれば，

$$\partial_\mu A_\mu=\alpha B \tag{5.2}$$

となり，これを (5.1) に代入すると元の (4.5.1) と同等であることが分かる．この形にしておけば，Landau ゲージを選んで $\alpha=0$ と置いても困らない．

前節においてはベクトル場を量子化するために，まず古典論の範囲内で余計な成分を Coulomb ゲージ条件 (4.35) で消去したが，本節では (5.1) のように付加項，いわゆるゲージ固定項，を付加することにより共変的に量子化する．しからば，(4.31) のラグランジアン密度の自由部分は次のように書ける：

$$\mathscr{L}_{\rm f}=\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2 \tag{5.3}$$

$$\mathscr{L}_1=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}(m_1A_\mu-\partial_\mu g)\cdot(m_1A_\mu-\partial_\mu g)+B\partial_\mu A_\mu \tag{5.4}$$

$$\mathscr{L}_2=-\frac{1}{2}(\partial_\mu h\cdot\partial_\mu h+m_0{}^2h^2) \tag{5.5}$$

そして相互作用部分は，再び (4.32) で与えられる．そこで自由部分に出てくる独立な場，A_μ, B, g, h を相互作用表示で量子化して，それぞれを既約な場で表わしてやると，(5.4) からは

$$A_\mu^{\rm in}=U_\mu^{\rm in}-\frac{1}{m_1}\partial_\mu g_{(-)}^{\rm in},\qquad B^{\rm in}=m_1(g_{(+)}^{\rm in}+g_{(-)}^{\rm in}),\qquad g^{\rm in}=g_{(+)}^{\rm in} \tag{5.6}$$

また h 自身はすでに既約である．これらの漸近場の性質は，

$$(\Box - m_1^2)U_\mu^{\text{in}} = 0, \qquad \partial_\mu U_\mu^{\text{in}} = 0,$$

$$\langle 0|T^*[U_\mu^{\text{in}}(x), U_\nu^{\text{in}}(y)]|0\rangle = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{m_1^2}\right)\Delta_F(x-y\,;\,m_1^2) \tag{5.7}$$

これは，U_μ^{in} という漸近場が質量 m_1，スピン 1 の粒子の場になっていることを表わしている．また $g_{(\pm)}^{\text{in}}$ という漸近場は，

$$\Box g_{(+)}^{\text{in}} = \Box g_{(-)}^{\text{in}} = 0,$$

$$\langle 0|T[g_{(\pm)}^{\text{in}}(x), g_{(\pm)}^{\text{in}}(y)]|0\rangle = \pm D_F(x-y) \tag{5.8}$$

から明らかなように南部-Goldstone 粒子の場であり，正定値計量のものと不定計量のものとが混じっている．最後に h^{in} という漸近場は，

$$(\Box - m_0^2)h^{\text{in}} = 0, \qquad \langle 0|T[h^{\text{in}}(x), h^{\text{in}}(y)]|0\rangle = \Delta_F(x-y\,;\,m_0^2) \tag{5.9}$$

となり，これは Higgs 粒子に対応する．

さてここで重要なことは，QED の時と同様に，運動方程式の結果として，

$$\Box \boldsymbol{B} = 0 \tag{5.10}$$

従って，次のような同定ができる：

$$\boldsymbol{B}(x) = B^{\text{in}}(x) = B^{\text{out}}(x) \tag{5.11}$$

この時も QED の時と同様に，$\boldsymbol{B}$ は S 行列と可換である．

$$[S, \boldsymbol{B}(x)] = 0 \tag{5.12}$$

この理論は不定計量に従うので物理的状態を第 4 章の議論に従って，

$$B^{(+)}(x)|\text{phys}\rangle = 0 \tag{5.13}$$

という補助条件により導入する．この条件が二つの異なる時空点でお互いに矛盾しないことは，次の式で保証されている．

$$[\boldsymbol{B}(x), \boldsymbol{B}(y)] = 0 \tag{5.14}$$

さて真空を含む物理的状態から他の物理的状態を作るのには，$\boldsymbol{B}$ と可換な演算子を施さなければならないが，それらは

$$U_\mu^{\text{in}}, \quad h^{\text{in}}, \quad \boldsymbol{B} \tag{5.15}$$

のみである．$\boldsymbol{B}$ を施すとノルム 0 の状態を生成するので，結局 (5.15) の初めの二つの演算子を考えると，正定値で質量有限な粒子のみの状態が残ることになる．これが，南部-Goldstone 粒子を隠してしまう Higgs の機構である．

以上はくりこまれていない相互作用表示で議論したが，本質はくりこまれた相互作用表示でも全く同じである．このような議論は中西により与えられた

が，ここの議論は著者が少し変形したものである．

この章では今まで，(1.1) のように真空期待値が消えない演算子として，場の演算子のみを考えてきたが，元来南部-Goldstone の定理は，(1.10) 式が成り立てば，φ が場の演算子自身でなくてその局所的多項式でも成り立つ．場の演算子自身に対しては (1.1) が成立しないが，局所的多項式では (1.1) を満たすものがある時に，これを対称性の力学的破れと呼ぶ．この時でも Higgs の機構が働く例が知られている．1963 年 Anderson はプラズマ振動に関して本質的に Higgs と同じ考察をしている．これも特記すべきことであろう．

§6　Kibble の定理

前節の議論は可換群 U(1) に対応するゲージ理論に対して展開された．そこで，可換群に対する Higgs の定理を非可換群に拡張した Kibble の定理を与える．

Higgs の機構を調べるのに，古典論の範囲内でゲージ条件を置くという方法およびユニタリー・ゲージを採用する方法をまず考えた．これはどちらかというと古典論的方法である．それに対して前節では共変的ゲージで場を量子化し，付加条件を導入して不定計量を消去した．場の量子論の立場からは後者の方がより望ましい方法であるが，非可換ゲージ場を共変的ゲージで量子化することは大変難しい問題であり，後の章で議論される．従って本節では前者の方法を採用して半古典的な取扱いで満足しておくことにする．ここでは非可換ゲージ場に対してユニタリー・ゲージを導入する Kibble (1967) の証明法を紹介する．

随伴表現

与えられた群 G に対する場の演算子の無限小変換は (1.2) で与えられるが，以下では添字を上付きと下付きとに区別して次のように書く：

$$\delta\varphi^A=\varepsilon^a T^A_{aB}\varphi^B \tag{6.1}$$

それに伴って構造定数を次式で定義する：

$$[T_a, T_b]^A{}_B=f^c_{ab}T^A_{cB} \tag{6.2}$$

しからば構造定数は，交換子の反可換性および Jacobi の恒等式より，次の恒等式を満たさねばならない：

1) $f^c_{ab}=-f^c_{ba}$ (6.3)

2) $f^m_{ab}f^l_{mc}+f^m_{bc}f^l_{ma}+f^m_{ca}f^l_{mb}=0$ (6.4)

そこで行列 M を導入する.

$$(M_c)^a{}_b=f^a_{cb} \tag{6.5}$$

しからば (6.4) より

$$[M_a, M_b]^l{}_c=f^m_{ab}(M_m)^l{}_c \tag{6.6}$$

となり, Mが一つの表現となる. これを随伴表現と呼ぶ. Kibble の定理の証明にはこの表現に関する知識が重要なので関係のある公式を挙げておく.

1) λ を無限小として, $\lambda^a T_a$ を単に λT と書くと,

$$(1+\lambda T)T_d(1-\lambda T)=T_b(1+\lambda M)^b{}_d \tag{6.7}$$

なんとなれば, 左辺での λ^c の係数は

$$[T_c, T_d]=f^b_{cd}T_b=T_b(M_c)^b{}_d$$

となり, 右辺での λ^c の係数に等しいからである. 従って λ が有限ならば,

$$e^{\lambda T}T_d e^{-\lambda T}=T_b(e^{\lambda M})^b{}_d \tag{6.8}$$

2) 次に Feynman の公式 (証明略) を用いると,

$$\begin{aligned}\partial_\mu e^{\theta T}&=\int_0^1 d\alpha e^{(1-\alpha)\theta T}T_d e^{\alpha\theta T}\partial_\mu\theta^d\\&=e^{\theta T}\int_0^1 d\alpha e^{-\alpha\theta T}T_d e^{\alpha\theta T}\partial_\mu\theta^d\\&=e^{\theta T}T_b\left(\int_0^1 d\alpha e^{-\alpha\theta M}\right)^b{}_d\partial_\mu\theta^d\\&=e^{\theta T}T_b\Lambda^b{}_d\partial_\mu\theta^d\end{aligned} \tag{6.9}$$

ただし

$$\Lambda=\frac{1-e^{-\theta M}}{\theta M} \tag{6.10}$$

さて共変微分を次式で定義する:

$$D_\mu=\partial_\mu-\mathscr{A}_\mu=\partial_\mu-TA_\mu=\partial_\mu-T_aA^a_\mu \tag{6.11}$$

ここで注意すべきことは, 結合定数は T, 従って構造定数あるいは M の中に含ませており, $\mathscr{A}_\mu$ は以前の記号では $ig\mathscr{A}_\mu$ と書いたものに等しい.

そこでゲージ変換をすると

$$\mathscr{A}_\mu(x)\to U(\lambda(x))\mathscr{A}_\mu(x)U(\lambda(x))^{-1}-U(\lambda(x))\partial_\mu U(\lambda(x))^{-1} \tag{6.12}$$

以下では $U(\lambda(x))$ を $\exp\theta T$ で置き換えてやると，上の変換の**逆変換**は次のように書かれる．

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_\mu&=e^{\theta T}T_a A'^a_\mu e^{-\theta T}-e^{\theta T}\partial_\mu e^{-\theta T}\\&=T_b(e^{\theta M}A'_\mu)^b-T_b\left(\frac{1-e^{\theta M}}{\theta M}\partial_\mu\theta\right)^b\\&=T_b[e^{\theta M}A'_\mu+e^{\theta M}\Lambda\partial_\mu\theta]^b\end{aligned}\tag{6.13}$$

従って

$$A^A_\mu=(e^{\theta M})^A{}_B A'^B_\mu+(e^{\theta M}\Lambda)^A{}_b\partial_\mu\theta^b \tag{6.14}$$

上の式では大文字と小文字を区別したが，その違いについては後に述べる．

Kibbleの定理

ある群 G に対して不変なスカラー場のラグランジアンを次の形に書く．ただし成分は陽には書かないことにする：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=\frac{1}{2}(\varphi_\mu-\partial_\mu\varphi)^2-\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2-U(\varphi)\\&=-\varphi_\mu\partial_\mu\varphi+\frac{1}{2}\varphi_\mu\varphi_\mu-U(\varphi)\end{aligned}\tag{6.15}$$

この形に書くと，ラグランジアンは導関数については一次形式になる．この形式では φ の正準共役量は $-\varphi_0$ となる．対称性の自発的破れを決める式は，有効ポテンシャル $V(\varphi)$ を用いて，

$$\frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi}=0 \tag{6.16}$$

で与えられる．最低次では，$V(\varphi)$ を $U(\varphi)$ で置き換えても良い．この一つの解を

$$\varphi=\eta \tag{6.17}$$

としよう．しからば一般には $e^{\lambda T}\eta$ も解であり，解は縮退している．ただし λ は定数である．そこで η を不変に保つ，すなわち

$$e^{\lambda T}\eta=\eta \tag{6.18}$$

の成り立つような G の部分群を G_η とすると，G_η に対応する対称性は，この解に対して破れていないことになる．η から作られる代数的に独立な不変式の数を ν とし，規準数 (canonical number) と呼ぶことにする．例えば O(3) では

$$\eta^2=\eta_1{}^2+\eta_2{}^2+\eta_3{}^2$$

が3次元のηに対する唯一の不変式で，この時には$\nu=1$である．さてTをn次元表現，従ってφもηもn次元ベクトルであるとする．この時にηのν成分だけが0でない標準形を選ぶ．すなわち，Gの変換により他の成分を消してしまうのである．例えばHiggs模型では$G=\mathrm{U}(1)$，$n=2$，$\nu=1$である．そこで

$$\{e^{\lambda T}\eta \,|\, e^{\lambda T}\in G\} \tag{6.19}$$

という解の集合の作る多様体を考え，その次元を決めてみよう．

まずηはn次元であるが，ηから作られるν個の不変式の値は変えられないから，自由に選べるパラメターの数rは，$r=n-\nu$で与えられる．従って上の集合はr次元である．ところでλの成分数は，Tの数と同じでGの次数gとなる．その中でr個のパラメターがηを指定する役割を担っているので，$g-r$はηを変えないことになる．従ってこれがG_ηの次元でもある．

以下ではηの形を固定しておくと，(6.16)の解となる真空期待値の一般形は，

$$\varphi=\underset{(r\text{次元})}{e^{\mu T}}\ \underset{(g-r\text{次元})}{e^{\nu T}}\ \eta=e^{\mu T}\eta \qquad (e^{\nu T}\in G_\eta) \tag{6.20}$$

次にHiggs模型の時のユニタリー・ゲージの一般化として，角変数θと動径変数ρとを導入して，次のように置く．

$$\varphi=e^{\theta T}\rho=e^{\theta T}(\eta+\rho') \tag{6.21}$$

ただしθはr次元であって，標準形として次の形を採用する：

$$\theta=\left.\begin{pmatrix}\theta_1\\ \vdots\\ \theta_r\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}\theta_1\\ \vdots\\ \theta_r\end{matrix}}\right\}r=n-\nu\\ \vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\end{matrix}\right\}g, \qquad \rho=\left.\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \rho_1\\ \vdots\\ \rho_\nu\end{pmatrix}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\}r\\ \left.\vphantom{\begin{matrix}\rho_1\\ \vdots\\ \rho_\nu\end{matrix}}\right\}\nu\end{matrix}\right\}n \tag{6.22}$$

そしてG_ηの生成演算子T_A $(A=1,2,\cdots,g-r)$に対してはρは

$$T_A\rho=0 \tag{6.23}$$

を満たし，他のT_a $(a=1,2,\cdots,r)$に対しては

$$T_a\rho\neq 0 \tag{6.24}$$

とする．以下ではθのr次元をローマ小文字，ρのν次元をギリシャ文字で表わす．次にr次元の行列Xを次式で定義する：

$$X_a{}^b=(T_a\rho)^b=T^b_{a\alpha}\rho^\alpha \tag{6.25}$$

この行列は逆を持つ．なんとなれば，もし det $X=0$ とすると，

$$c^a T_a \rho = 0$$

となる c^a が存在し，従って $c^a T_a$ が G_η の生成演算子となり，仮定に反することになるからである．

次にラグランジアン密度における φ を (6.21) により θ と ρ とに書き換えてみよう．公式 (6.9) を用いると，

$$\partial_\mu \varphi^A = (e^{\theta T} T_b \rho)^A \Lambda^b{}_d \partial_\mu \theta^d + (e^{\theta T})^A{}_\beta \partial_\mu \rho^\beta \tag{6.26}$$

$$\varphi_\mu \cdot \partial_\mu \varphi = (\varphi_\mu e^{\theta T} T_b \rho) \Lambda^b{}_d \partial_\mu \theta^d + \varphi_\mu e^{\theta T} \partial_\mu \rho \tag{6.27}$$

そこで (6.27) の右辺の微分の係数を次のように置く：

$$\theta_{\mu d} \equiv (\varphi_\mu e^{\theta T} T_b \rho) \Lambda^b{}_d, \qquad \rho_{\mu\alpha} \equiv \varphi_{\mu A} (e^{\theta T})^A{}_\alpha \tag{6.28}$$

さて φ は n 成分を持つが，ρ は ν 成分しかないので

$$\rho_{\mu\alpha} \cdot \rho_\mu{}^\alpha = \varphi_{\mu A} \cdot \varphi_\mu{}^A - \varphi_{\mu A} (e^{\theta T})^A{}_a (e^{-\theta T})^a{}_B \varphi_\mu{}^B \tag{6.29}$$

ところが，

$$\begin{aligned} \theta_{\mu d} &= \varphi_{\mu A} (e^{\theta T})^A{}_\alpha T^\alpha_{b\beta} \rho^\beta \Lambda^b{}_d + \varphi_{\mu A} (e^{\theta T})^A{}_a T^a_{b\beta} \rho^\beta \Lambda^b{}_d \\ &= \rho_{\mu\alpha} T^\alpha_{b\beta} \rho^\beta \Lambda^b{}_d + \varphi_{\mu A} (e^{\theta T})^A{}_a X_b{}^a \Lambda^b{}_d \end{aligned} \tag{6.30}$$

故に

$$\theta_{\mu d} (\Lambda^{-1} X^{-1})^d{}_a = (\rho_\mu T_b \rho)(X^{-1})^b{}_a + \varphi_{\mu A} (e^{\theta T})^A{}_a \tag{6.31}$$

(6.29) における $\rho\rho$ と $\varphi\varphi$ との差を (6.31) を用いて表現すると，

$$\begin{aligned} \mathscr{L} = &- \rho_\mu \cdot \partial_\mu \rho + \frac{1}{2} \rho_\mu \cdot \rho_\mu - U(\rho) - \theta_\mu \cdot \partial_\mu \theta \\ &+ \frac{1}{2} [\{\theta_{\mu a} (\Lambda^{-1})^a{}_b - \rho^\mu T_b \rho\} (X^{-1})^b{}_c]^2 \end{aligned} \tag{6.32}$$

上のラグランジアン密度では，θ は必ず θ_μ と一緒に現れ，単独では現れないから，θ は質量0の南部–Goldstone 粒子となることが分かる．さて ρ, ρ_μ はゲージ不変であるが，θ と θ_μ とのゲージ変換は次のようになる．

(6.21) より φ と $e^{\theta T}$ とはゲージ変換に対しては同じ変換性を示すから，δ を無限小ゲージ関数 $\delta\lambda^A$ に対応するゲージ変換とした時に，

$$\delta(e^{\theta T}) = T_A \delta\lambda^A e^{\theta T} \tag{6.33}$$

しかるに (6.9) により

$$\delta(e^{\theta T}) = e^{\theta T} T_b \Lambda^b{}_d \delta\theta^d \tag{6.34}$$

上の二式を組み合わせると，

$$T_b \Lambda^b{}_d \delta\theta^d = e^{-\theta T} T_A e^{\theta T} \delta\lambda^A = T_b (e^{-\theta M})^b{}_A \delta\lambda^A$$

従って

$$\delta\theta^a = (\Lambda^{-1})^a{}_b (e^{-\theta M})^b{}_A \delta\lambda^A. \tag{6.35}$$

さて $\theta_{\mu a}$ のゲージ変換は以下の議論には必要ないが，念のために与えておく．θ^a と $-\theta_{0a}$ とが正準共役であることから

$$\delta[\theta_{0a}, \theta^b] = [\delta\theta_{0a}, \theta^b] + [\theta_{0a}, \delta\theta^b] = 0$$

あるいは，

$$i\frac{\partial}{\partial\theta_{0b}}\delta\theta_{0a} + i\frac{\partial}{\partial\theta^a}\delta\theta^b = 0,$$

$$\delta\theta_{\mu a} = -\theta_{\mu b}\frac{\partial}{\partial\theta^a}\delta\theta^b. \tag{6.36}$$

次に極形式のラグランジアン密度にゲージ場を導入する，この時に共変微分は次のような置き換えにより導入される：

$$D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi - \delta\varphi(\lambda \to A_\mu) \tag{6.37}$$

すなわち，右辺第二項は無限小ゲージ関数 λ を A_μ で置き換えることにより与えられる．また既に注意したように結合定数は構造定数に含まれているので，

$$f^A_{BC} = -g f_{ABC} \tag{6.38}$$

と書いてやると，ゲージ場を含むラグランジアン密度は

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &\frac{1}{2}F_{\mu\nu,A}(\partial_\mu A^A_\nu - \partial_\nu A^A_\mu + g f_{ABC} A^B_\mu A^C_\nu) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu} \\ &-\rho_\mu\cdot\partial_\mu\rho + \frac{1}{2}\rho_\mu\cdot\rho_\mu - U(\rho) + \frac{1}{2}[\{\theta_{\mu a}(\Lambda^{-1})^a{}_b - \rho_\mu T_b\rho\}(X^{-1})^b{}_c]^2 \\ &-\theta_\mu(\partial_\mu\theta - \Lambda^{-1}e^{-\theta M}A_\mu)\end{aligned} \tag{6.39}$$

ただし最後の項は θ の共変微分を（6.37）の置換えによって導入したものである．

次にゲージ変換（6.14）により，ゲージ場 A_μ を新しいゲージ場 A'_μ で表わしてやることにする．

$$A^A_\mu = (e^{\theta M})^A{}_B A'^B_\mu + (e^{\theta M}\Lambda)^A{}_b \partial_\mu\theta^b, \qquad F = e^{\theta M}F' \tag{6.40}$$

この置換えによって（6.39）の最後の項は

$$\partial_\mu\theta - \Lambda^{-1}e^{-\theta M}A_\mu = \partial_\mu\theta - \Lambda^{-1}e^{-\theta M}\cdot e^M(A'_\mu + \Lambda\partial_\mu\theta) = -\Lambda^{-1}A'_\mu \tag{6.41}$$

となり，$\partial_\mu\theta$ が消えてしまう！ この事情は Higgs 模型の時と全く同じであり，

この結果 (6.39) は次のようになる.

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}F'_{\mu\nu,A}(\partial_\mu A'^A_\nu-\partial_\nu A'^A_\mu+gf_{ABC}A'^B_\mu A'^C_\nu)+\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}\cdot F'_{\mu\nu}-\rho_\mu\cdot\partial_\mu\rho$$

$$+\frac{1}{2}\rho_\mu\cdot\rho_\mu-U(\rho)+\frac{1}{2}[\{\theta_{\mu a}(\Lambda^{-1})^a{}_b-\rho_\mu T_b\rho\}(X^{-1})^b{}_c]^2+\theta_\mu\Lambda^{-1}A'_\mu \quad (6.42)$$

この中には $\partial_\mu\theta$ が存在しないので, θ_μ は代数的に他の量で表わされる. さて

$$\theta_{\mu a}(\Lambda^{-1}X^{-1})^a{}_b\equiv h_{\mu a}, \qquad \rho_\mu T_a\rho(X^{-1})^a{}_b\equiv k_{\mu b} \quad (6.43)$$

と置くと, $\theta_{\mu a}$ を含むのは $h_{\mu a}$ のみであり, (6.42) の最後の二項の和は

$$\frac{1}{2}(h_\mu-k_\mu)^2+h_\mu XA'_\mu=\frac{1}{2}(h_\mu-k_\mu+XA'_\mu)^2+k_\mu XA'_\mu-\frac{1}{2}(XA'_\mu)^2$$

そこで h_μ を独立変数と考えて, 変分原理を用いると上式右辺の第一項は落とすことができる. 従って最終的なラグランジアン密度は次の形になる:

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}F'_{\mu\nu,A}(\partial_\mu A'^A_\nu-\partial_\nu A'^A_\mu+gf_{ABC}A'^B_\mu A'^C_\nu)+\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}\cdot F'_{\mu\nu}$$

$$-\rho_\mu\cdot\partial_\mu\rho+\frac{1}{2}\rho_\mu\cdot\rho_\mu-U(\rho)+(\rho_\mu T_a\rho)A'^a_\mu-\frac{1}{2}(X^a{}_bA'^b_\mu)^2 \quad (6.44)$$

これで θ は完全に消去されて, スカラー場は ρ のみによって記述され, Higgs 模型の時と同じくユニタリー・ゲージが実現されたことになる.

南部-Goldstone 粒子に対応する θ は r 個あったが, 質量0のゲージ粒子に縦波として吸収されて, ゲージ粒子に有限な質量を与える. また ρ は ν 個の有限質量のスカラー粒子, いわゆる Higgs 粒子になるが, $(g-r)$ 個の G_η の生成演算子に対応する質量0のゲージ粒子が残ることになる. まとめると,

ρ (ν 成分)	有限質量の Higgs 粒子
θ (r 成分) A (r 成分)	有限質量のゲージ粒子
A ($g-r$ 成分)	質量0のゲージ粒子

以上与えたのは可換ゲージ場に対する Higgs の定理を非可換ゲージ場に拡張した Kibble の定理の証明である. Kibble は例として SU(2)×U(1) というゲージ場に対して, 3成分複素スカラー場を導入したものを論じている. 後者を2成分複素スカラー場で置き換えたものが, Weinberg-Salam の模型であり, 次の章の主題である.

第15章　Weinberg-Salam 模型

既に第12章で議論したように，弱い相互作用は現象論的には普遍的 Fermi 型相互作用により記述される．この相互作用の特徴は Lie 代数を形成するような流れの密度の積という形で与えられるということである．しかしながらこの相互作用はいわゆるくりこみ可能型ではないので，高いエネルギーでは断面積などがどんどん大きくなるし，高次補正でも次数が高い程高次の発散を生ずる．従ってこの相互作用は低いエネルギーにおいてのみ，そして最低次においてのみS行列要素を表わす全く現象論的なものであると解釈せざるを得ない．そこで多くの人々は，Fermi 型相互作用を中間的ベクトル場を導入して，湯川型相互作用の繰返しとして解釈しようとした．ベクトル場を導入することは，いわゆる (V–A) 型の相互作用の再現のために必要であるが，やはりくりこみ可能でない．そこで登場したのが，ゲージ場と Higgs-Kibble の機構とを組み合わせ，かつ弱い相互作用と電磁的相互作用とを統一的に記述する Weinberg-Salam の模型であった．この二人はこの模型を 1967 年，1968 年に提唱した．これは Kibble の理論の出た直後である．実際，前章の最後で述べたように，Kibble 自身もほとんどこの模型と同じものを考えていたのである．

§1　Weinberg-Salam 模型

ゲージ原理に従って弱い相互作用を記述するにはどんな Lie 代数が必要であろうか？　既に述べたように，弱い相互作用に出てくる荷電を持った流れ J_μ, $J_\mu^\dagger$ の時間成分を空間積分したものは $\mathrm{SU}(2)_L$ という代数を形成する．従って SU(2) というゲージ群を導入する必要がある．更に電磁場もゲージ場として導入しなければならないので，弱い相互作用と電磁場とを同時に記述するには

$$\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1) \tag{1.1}$$

というゲージ群を導入しなければならない．そこで (12.2.3) で導入した

$$Q=e\left(I_3+\frac{Y}{2}\right) \tag{1.2}$$

という公式を思い出してみよう．そしてこの代数 (1.1) に対応する生成演算子を，この式に現れる I_i $(i=1,2,3)$ と Y であると考えてみよう．I_i はアイソ・スピンであるが，もともとのアイソ・スピンはハドロンに対してしか考えられていなかったのに対してこのアイソ・スピンはハドロンとレプトンの双方に対して定義されている．これは弱い相互作用の普遍性を表わす (12.6.7) から明らかである．そこでこの I_i を弱アイソ・スピンと呼ぶことがある．

さて (1.1) の生成演算子の数 g は，$g=3+1$ で与えられる．そこで Higgs 場 $\boldsymbol{\varphi}$ を 2 次元複素スカラー場に選ぶと，$n=4$ であり，この場合に不変式は

$$\varphi_1^\dagger\varphi_1+\varphi_2^\dagger\varphi_2 \tag{1.3}$$

のみであるので，$\nu=1$ となる．従って $r=n-\nu=4-1=3$ が有限質量のベクトル粒子の数であり，$g-r=1$ が質量 0 のゲージ粒子，すなわち光子を与える．SU(2) に対応するゲージ場を $\hat{W}_\mu$，U(1) に対応するものを B_μ と書くことにする．しからば Higgs 場 $\boldsymbol{\varphi}$ が弱アイソ・スピンと弱超荷電を持つとして，この系のラグランジアン密度は次式で与えられる：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-\frac{1}{4}(\partial_\mu\hat{W}_\nu-\partial_\nu\hat{W}_\mu+g\,\hat{W}_\mu\times\hat{W}_\nu)^2-\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu)^2\\&-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}^\dagger\left(\overleftarrow{\partial}_\mu+ig\frac{\hat{\tau}}{2}\hat{W}_\mu-i\frac{g'}{2}B_\mu\right)\left(\overrightarrow{\partial}_\mu-ig\frac{\hat{\tau}}{2}\hat{W}_\mu+i\frac{g'}{2}B_\mu\right)\boldsymbol{\varphi}-U(\boldsymbol{\varphi})\end{aligned}\tag{1.4}$$

ここで $\boldsymbol{\varphi}$ の変換性および荷電については K 中間子二重項 (K^+, K^0) と同じであると仮定している．そこで Kibble 理論に従って，$\boldsymbol{\varphi}$ の 4 成分を表わすのに，θ_i $(i=1,2,3)$ と ρ とを用いて

$$\boldsymbol{\varphi}=e^{i\hat{\theta}\hat{\tau}/2}\begin{pmatrix}0\\\rho\end{pmatrix} \tag{1.5}$$

と書くことにする．既に述べたように $\hat{\theta}$ は最終的には中間ゲージ粒子に質量を与えるべく吸収されてしまう．しかし ρ の影響を無視した近似では

$$\boldsymbol{\varphi}\to\begin{pmatrix}0\\\eta\end{pmatrix} \tag{1.6}$$

と置き換えてやれば十分であるので，ここでは (1.6) の近似を採用する．そこで $\rho=\eta+\rho'$ と置き，(1.4) を書き直すと，ユニタリー・ゲージでは

$$\mathscr{L}_U=-\frac{1}{4}(\partial_\mu\hat{W}_\nu-\partial_\nu\hat{W}_\mu+g\,\hat{W}_\mu\times\hat{W}_\nu)^2-\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu)^2$$

$$-\frac{1}{4}g^2\eta^2 W_\mu^\dagger W_\mu - \frac{1}{8}\eta^2(gW_\mu^3 + g'B_\mu)^2 - U(\eta) + (\rho' \text{ を含む項}) \tag{1.7}$$

ここに $W_\mu, W_\mu^\dagger$ は荷電中間ゲージ場を表わし，W_μ^3 は中性中間ゲージ場を表わす．質量項を対角化すると，

$$Z_\mu = \frac{gW_\mu^3 + g'B_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \qquad m_Z^2 = \frac{1}{4}\eta^2(g^2+g'^2) \tag{1.8}$$

$$W_\mu = \frac{W_\mu^1 - iW_\mu^2}{\sqrt{2}}, \qquad m_W^2 = \frac{1}{4}\eta^2 g^2 \tag{1.9}$$

また Z_μ と直交する組み合わせは，質量 0 の光子の場となる．

$$A_\mu = \frac{-g'W_\mu^3 + gB_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}} \tag{1.10}$$

従って

$$W_\mu^3 = \frac{gZ_\mu - g'A_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \qquad B_\mu = \frac{g'Z_\mu + gA_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}} \tag{1.11}$$

そこで Z_μ と A_μ とを用いて $\mathcal{L}_U$ を書き換えると，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_U = & -\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^\dagger W_{\mu\nu} - m_W^2 W_\mu^\dagger W_\mu - \frac{1}{4}A_{\mu\nu}A_{\mu\nu} \\
& -\frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z_\mu \\
& \left.\begin{aligned} & -ig\sin\theta_W A_\mu(W_{\mu\nu}^\dagger W_\nu - W_{\mu\nu}W_\nu^\dagger) \\ & +g^2\sin^2\theta_W(A_\mu A_\nu W_\mu^\dagger W_\nu - A_\mu A_\mu W_\nu^\dagger W_\nu) \end{aligned}\right\} \text{Dirac 型電磁的相互作用} \\
& +ig\sin\theta_W A_{\mu\nu}W_\mu^\dagger W_\nu \qquad\qquad \text{異常磁気能率} \\
& +ig\cos\theta_W Z_\mu(W_{\mu\nu}^\dagger W_\nu - W_{\mu\nu}W_\nu^\dagger) \\
& +g^2\cos^2\theta_W(Z_\mu Z_\nu W_\mu^\dagger W_\nu - Z_\mu Z_\mu W_\nu^\dagger W_\nu) \\
& -ig\cos\theta_W Z_{\mu\nu}W_\mu^\dagger W_\nu \\
& +g^2\sin\theta_W\cos\theta_W(2A_\mu Z_\mu W_\nu^\dagger W_\nu - A_\mu Z_\nu W_\mu^\dagger W_\nu - A_\nu Z_\mu W_\mu^\dagger W_\nu) \\
& +\frac{g^2}{2}(W_\mu^\dagger W_\mu^\dagger W_\nu W_\nu - W_\mu^\dagger W_\nu^\dagger W_\mu W_\nu) \\
& -U(\eta) + (\rho' \text{ を含む項})
\end{aligned} \tag{1.12}$$

さて φ の第一成分が K^+ と同じく荷電 e を持ち，第二成分は中性であるとした．すると W は荷電 e を持つことになり，上式での W の電磁的相互作用から

$$e = -g\sin\theta_W \tag{1.13}$$

ただし，θ_W は Weinberg の角と呼ばれ，次式で定義されている．

$$\frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}=\sin\theta_W, \qquad \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}=\cos\theta_W \tag{1.14}$$

また $A_{\mu\nu}$ のような記号は，$A_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ を表わすものとする．

(1.8)，(1.9) と (1.14) とを組み合わせると，

$$m_W=m_Z\cos\theta_W \tag{1.15}$$

実験的には

$$\sin^2\theta_W=0.22 \tag{1.16}$$

さて弱い Fermi 型相互作用は，W を媒介して J_μ と $J_\mu^\dagger$ とを結び付けることによって生ずることになる．これは核力のように二つの湯川型相互作用の組み合わせであるが，m_W と比べてずっと低いエネルギーでは実質的に Fermi 型相互作用に帰着してしまう．そこで低いエネルギーでゲージ理論と Fermi 型相互作用とを比較すると，次の関係式が得られる：

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}=\left(\frac{g}{2\sqrt{2}}\right)^2\frac{1}{m_W{}^2}=\frac{e^2}{8m_W{}^2\sin^2\theta_W} \tag{1.17}$$

これから

$$m_W{}^2=\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{g^2}{G_F}>\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{e^2}{G_F}=(37.3\,\mathrm{GeV})^2 \tag{1.18}$$

そして Weinberg の角が分かれば m_W と m_Z が知られることになる．実際これらの質量の近似値は理論的に予言されていたが，1983 年に CERN において Rubbia 等によってWとZとが発見され，その質量も測定された．

$$m_W=80.8\pm2.7\,\mathrm{GeV}, \qquad m_Z=92.9\pm1.6\,\mathrm{GeV} \tag{1.19}$$

これは予言値に極めて近い値であった．

ゲージ理論によれば，弱い相互作用には荷電粒子 $W^\pm$ を媒介するものの外に中性粒子 Z^0 を媒介するものがある．このような中性粒子を媒介する弱い相互作用はニュートリノの散乱のように，今までの Fermi 型相互作用では記述できない現象を惹起する．この存在は早く 1973 年に CERN の大型泡箱によって確認された．

§2 フェルミオンの導入

さて前節においてゲージ場と Higgs 場のみが存在する場合の定式化を論じた．しかしながらクォークやレプトンのようなフェルミオン無しでは現実的な理論は作れない．そこでまずレプトンを導入しよう．(V–A) 理論によれば，

弱い相互作用に現れるのは左巻きのレプトンである．従ってゲージ場と相互作用をするのは次のような左巻きの三世代のレプトンである：

$$L_1=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix},\qquad L_2=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix},\qquad L_3=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

それに対して右巻きレプトンは SU(2) のゲージ場とは相互作用をしない．そこで左巻きレプトンのラグランジアン密度を

$$-\sum_j \overline{L}_j\gamma_\mu\left(\partial_\mu-ig\frac{\hat{\tau}}{2}\hat{W}_\mu-i\frac{g'}{2}B_\mu\right)L_j \tag{2.2}$$

と選ぶ．$\hat{W}_\mu$ との相互作用に関しては，φ と同じく二重項なので同じ形を選んである．それに反して (1.2) で与えられる Y は，$(+e,0)$ という荷電をとる φ に対しては $+1$ であるが，$(0,-e)$ という荷電をとる L に対しては -1 である．従って B_μ との相互作用に対しては，φ の場合の逆の符号を選んだ．さてニュートリノに対しては，質量が 0 ということで右巻き成分が存在しない．従って右巻き成分を次のように書く：

$$R_1=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)e,\qquad R_2=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\mu,\qquad R_3=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\tau \tag{2.3}$$

今度は一重項なので $\hat{W}_\mu$ とは相互作用しない．しかし Y は -2 になるので，

$$-\sum_j \overline{R}_j\gamma_\mu(\partial_\mu-ig'B_\mu)R_j \tag{2.4}$$

と選ぶのが妥当であろう．(2.2) と (2.4) とを合わせたものがレプトンのラグランジアン密度となる．

次にクォークを導入しなければならない．クォークに対して注意すべきことは，弱い相互作用に現れるクォーク二重項は必ずしも質量の固有状態ではないということである．弱い相互作用に現れるクォーク二重項は，質量の固有状態としての二重項から Cabibbo の導入した回転 (12.6.11) によって得られる．この角 θ_C は実験的には次の値を持つ：

$$\sin\theta_C=0.22 \tag{2.5}$$

この値は，(12.5.27)，(12.4.30)，(12.5.29) から出る．そこで $SU(2)_L$ での二重項は

$$q_L=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix}u\\ d'\end{pmatrix} \tag{2.6}$$

であり，他はすべて $SU(2)_L$ の一重項となる．すなわち，u_R, d_R, s_R, s_L などである．しかしながら次節で示されるようにこの選び方はいろいろな困難を生ずる．

既に第12章§6で述べたように，Glashow，Iliopoulos，Maiani はいわゆる GIM 模型を導入した．彼らは第四のクォーク c を導入して，$SU(2)_L$ に対する二重項は

$$\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

であると考えた．この模型の利点については次節で述べられる．これは $\hat{W}_\mu$ との相互作用はレプトンの場合と同じであるが，(1.2) から Y を計算すると 1/3 になる．そこで各世代に対して左巻きクォークのゲージ相互作用を含んだラグランジアン密度は，

$$-\bar{q}_L\gamma_\mu\left(\partial_\mu - ig\frac{\hat{\tau}}{2}\hat{W}_\mu + i\frac{g'}{6}B_\mu\right)q_L \tag{2.8}$$

他方右巻きクォークはすべて $SU(2)_L$ に対して一重項となるので，荷電 $(2/3)e$ のクォークに対しては $Y/2=2/3$，$-(1/3)e$ のクォークに対しては $Y/2=-1/3$ となるので，

$$q_R = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)q \tag{2.9}$$

とした時に，そのラグランジアン密度は

$$-\bar{q}_R\gamma_\mu\left(\partial_\mu + i\frac{g'}{2}YB_\mu\right)q_R \tag{2.10}$$

で与えられることになる．(2.8) と (2.10) とを加えたものが，クォークに対するラグランジアンである．そこでフェルミオンとゲージ場との相互作用は次の形に与えられる：

$$\mathscr{L}_{fG} = g\,\hat{W}_\mu\cdot\hat{j}_\mu - g'B_\mu(j_\mu^{\rm em} - j_\mu^3), \tag{2.11}$$

$$j_\mu^{\rm em} = -i\bar{e}\gamma_\mu e - i\bar{\mu}\gamma_\mu\mu - i\bar{\tau}\gamma_\mu\tau + i\left(\frac{2}{3}\bar{u}\gamma_\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma_\mu d + \cdots\right), \tag{2.12}$$

$$\hat{j}_\mu = \sum_j i\bar{L}_j\gamma_\mu\frac{\hat{\tau}}{2}L_j + \sum_q i\bar{q}_L\gamma_\mu\frac{\hat{\tau}}{2}q_L \tag{2.13}$$

この相互作用を A_μ, Z_μ を用いて書き直してみよう．

$$\mathcal{L}_{fG}=\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu j_\mu^\dagger+W_\mu^\dagger j_\mu)-g\sin\theta_W j_\mu^{\rm em}A_\mu$$

$$+\frac{g}{\cos\theta_W}\{j_\mu^3-\sin^2\theta_W j_\mu^{\rm em}\}Z_\mu \tag{2.14}$$

ここに種々の流れの具体的な形は

$$j_\mu=i\bar{e}\gamma_\mu\frac{(1+\gamma_5)}{2}\nu_e+\cdots+i\bar{d}'\gamma_\mu\frac{(1+\gamma_5)}{2}u+\cdots, \tag{2.15}$$

$$j_\mu^\dagger=i\bar{\nu}_e\gamma_\mu\frac{(1+\gamma_5)}{2}e+\cdots+i\bar{u}\gamma_\mu\frac{(1+\gamma_5)}{2}d'+\cdots, \tag{2.16}$$

$$j_\mu^3=\frac{1}{2}\left(i\bar{\nu}_e\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\nu_e-i\bar{e}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}e\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\left(i\bar{u}\gamma_\mu\frac{(1+\gamma_5)}{2}u-i\bar{d}'\gamma_\mu\frac{(1+\gamma_5)}{2}d'\right)+\cdots \tag{2.17}$$

今までフェルミオンの質量項は入っていなかったが，この質量は Higgs 機構によって導入される．そのためにフェルミオンと Higgs 場との間に湯川型相互作用を入れる．この相互作用の導入は，実はゲージ原理に反するので将来は何らかの力学的な対称性の破れを考えなければならないのかもしれない．そこで $\mathrm{SU}(2)_L$ に対して不変な相互作用として第一世代のみを考えると，

$$\mathcal{L}_{f\varphi}=-f(\bar{L}_1\varphi)R_1-f_\uparrow(\bar{q}_L\varphi^G)u_R-f_\downarrow(\bar{q}_L\varphi)d_R'+\text{h.c.} \tag{2.18}$$

ただし q_L は (2.6) で与えられる．φ^G は φ の G 共役で，

$$\varphi^G=\begin{pmatrix}\varphi_2^*\\ -\varphi_1^*\end{pmatrix} \tag{2.19}$$

そこで φ に対して (1.6) の置換えをすると，

$$\mathcal{L}_{f\varphi}\to -f\eta\bar{e}e-f_\uparrow\eta\bar{u}u-f_\downarrow\eta\bar{d}'d'+\cdots \tag{2.20}$$

これから質量として次の公式を得る：

$$m_e=f\eta,\qquad m_u=f_\uparrow\eta,\qquad m_{d'}=f_\downarrow\eta \tag{2.21}$$

この近似では d' はまだ質量の固有状態になっている．この方法の欠点は，各々のフェルミオンに対して一つのパラメター f を導入しなければならないことである．従ってこの部分はゲージ原理から外れた現象論のレベルになってしまう．

§3 GIM 機構

さて u, d, s しか考えないクォーク模型では，j_μ^3 の中のハドロン部分は

$$\frac{1}{2}\left\{i\bar{u}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}u-\bar{d}'\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}d'\right\} \tag{3.1}$$

で与えられ，この中には奇妙さを変える部分がある．すなわち第二項の中には

$$-\frac{1}{2}\sin\theta_C\cos\theta_C\left(i\bar{d}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}s+i\bar{s}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}d\right) \tag{3.2}$$

という寄与があり，このような項は奇妙さを変える中性の流れとして次のような崩壊様式を惹起するであろう：

$$\mathrm{K_L^0}\rightarrow\mu^++\mu^- \tag{3.3}$$

実験的にはこの分岐比は $(9.1\pm1.9)\times10^{-9}$ と極めて小さい．そこでこの過程を小さくする何らかの機構が無ければならない．GIM 機構とは，第四のクォーク c が存在して，(2.7) がそれぞれ $SU(2)_L$ の二重項となるという仮定に基づいている．しからば荷電流のハドロン部分は

$$j_\mu=i\bar{d}'\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}u+i\bar{s}'\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}c+\cdots, \tag{3.4}$$

$$j_\mu^\dagger=i\bar{u}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}d'+i\bar{c}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}s'+\cdots \tag{3.5}$$

で与えられ，その結果として中性流のハドロン部分は

$$\begin{aligned}j_\mu^3&=\frac{1}{2}\left\{i\bar{u}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}u+i\bar{c}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}c-i\bar{d}'\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}d'-i\bar{s}'\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}s'\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{i\bar{u}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}u+i\bar{c}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}c-i\bar{d}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}d-i\bar{s}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}s\right\}\end{aligned} \tag{3.6}$$

となり，フレイバーは保存されることになり，中性流ではフレイバーの一種の奇妙さを保存することになる．実際に (3.3) が生起するのは，フレイバーの間の対称性が破れているので，フレイバーは厳密には保存しないからである．上の機構を GIM 機構と呼ぶ．既に第12章§7で述べたように，第四のクォークは後に1974年に Ting と Richter 等により発見された．

§4　異常項とフェルミオンの世代

今までに種々の対称性を古典論ないし摂動論の最低次の近似で調べてきたが，当初このような対称性は一般的に高次補正を入れても成り立つと考えられていた．しかるに1960年代の間に Adler 等の研究により，ある種の対称性は高次補正により，あるいは系の量子化により破られることが明らかになってき

た．すなわち，或る種の対称性は量子化と相容れないのである．場の方程式とか，グリーン関数などを調べてみると，当初存在していた対称性を破る項が生ずることがある．これを異常項と呼ぶ．この詳細については最後の章で述べられるので，この節では極く簡単に触れておくが，異常項の出現により或る種の対称性が失われると，くりこみ可能性までが失われてしまうことがある．そこで異常項が出現しないという条件が，模型に対する制限として用いられることがあり，本節ではその例を挙げよう．

まず，そもそもの発端となった Adler 異常項について述べよう．QED において，軸性ベクトル流 A_μ，擬スカラー流 P，および擬スカラー項 C を

$$A_\mu=i\bar{\psi}\gamma_\lambda\gamma_5\psi,\qquad P=i\bar{\psi}\gamma_5\psi,\qquad C=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}=\frac{i}{8}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}\tag{4.1}$$

で定義し，乗法的にくりこんだとする．すると，Heisenberg 表示で，

$$\partial_\lambda A_\lambda=2mP-\frac{e^2}{2\pi^2}C\tag{4.2}$$

が成り立つ．古典論，あるいは摂動論の最低次では右辺第二項は存在しないので，この項は異常項である．QED においては，軸性ベクトル流は相互作用には現れないので，この異常項は無害であるが，Weinberg-Salam 模型のように，相互作用の中に軸性ベクトル流の現れる理論では，異常項の出現は有害である．重要な対称性を破り，さらにくりこみ可能性を破ってしまう．そこでこの異常項が出現しないような模型を選ばなければならない．ここに出てきた異常項は後に述べるようにフェルミオンのループからの寄与によって生ずるので，まずフェルミオンとゲージ場との相互作用項を書いてみよう．Weinberg-Salam 模型では，ラグランジアン密度における代表項は

$$i\bar{L}\gamma_\mu\left(\frac{g}{2}\hat{C}\,\hat{W}_\mu+\frac{g'}{2}C_0B_\mu\right)L+i\bar{R}\gamma_\mu g'CB_\mu R\tag{4.3}$$

のように書くことができる．ここにレプトン二重項 $(\nu_e,\ e)$，レプトン一重項 e に対して

$$\hat{C}=\hat{\tau},\qquad C_0=1,\qquad D=\frac{1-\tau_3}{2}\tag{4.4}$$

のように書ける．またクォーク二重項と右巻き一重項に対しては

$$\hat{C}=\hat{\tau},\qquad C_0=-\frac{1}{3},\qquad D=-\frac{1}{3}+\frac{1-\tau_3}{2}.\tag{4.5}$$

e を単位として測った荷電 Q との関係はいずれの場合にも，

$$Q=-D=\frac{1}{2}(C_3-C_0) \tag{4.6}$$

で与えられる．さてクォーク，あるいはレプトンの場の演算子を ψ と書き，

$$L=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi, \qquad R=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi \tag{4.7}$$

と書くことにすると，(4.3) は次のように書ける：

$$i\overline{\psi}\gamma_\mu \mathscr{V}_\mu\psi+i\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\mathscr{A}_\mu\psi \tag{4.8}$$

ただし，(4.3) に対応して

$$\mathscr{V}_\mu=\frac{g}{4}\hat{C}\,\hat{W}_\mu-\frac{g'}{4}C_3B_\mu+\frac{g'}{2}C_0B_\mu,$$

$$\mathscr{A}_\mu=\frac{g}{4}\hat{C}\,\hat{W}_\mu+\frac{g'}{4}C_3B_\mu \tag{4.9}$$

この時にフェルミオンのループにより異常項は Bardeen (1969) によると

$$\partial_\lambda(\overline{\psi}\gamma_\lambda\gamma_5C_j\psi)=(\text{正常項})+\frac{1}{4\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\,[C_j\{\cdots\}] \tag{4.10}$$

ただし

$$\{\cdots\}=\frac{1}{4}\mathscr{V}_{\mu\nu}\mathscr{V}_{\rho\sigma}+\frac{1}{12}\mathscr{A}_{\mu\nu}\mathscr{A}_{\rho\sigma}+\frac{2}{3}i(\mathscr{A}_\mu\mathscr{A}_\nu\mathscr{V}_{\rho\sigma}+\mathscr{A}_\mu\mathscr{V}_{\nu\rho}\mathscr{A}_\sigma+\mathscr{V}_{\mu\nu}\mathscr{A}_\rho\mathscr{A}_\sigma)$$
$$-\frac{8}{3}\mathscr{A}_\mu\mathscr{A}_\nu\mathscr{A}_\rho\mathscr{A}_\sigma, \tag{4.11}$$

$$\mathscr{V}_{\mu\nu}=\partial_\mu\mathscr{V}_\nu-\partial_\nu\mathscr{V}_\mu-i[\mathscr{V}_\mu,\mathscr{V}_\nu]-i[\mathscr{A}_\mu,\mathscr{A}_\nu],$$
$$\mathscr{A}_{\mu\nu}=\partial_\mu\mathscr{A}_\nu-\partial_\nu\mathscr{A}_\mu-i[\mathscr{V}_\mu,\mathscr{A}_\nu]-i[\mathscr{A}_\mu,\mathscr{V}_\nu] \tag{4.12}$$

そこでこのような異常項が消えるための条件を考える．それには Tr が消えれば良い．行列の積を交換子と反交換子とに分けて表現すれば，結局 Tr は，SU(3) の時の f_{abc} とか d_{abc} に相当する係数で表現されることになるが，異常項が消えるための条件は，Georgi-Glashow (1972) が論じたように，

$$d_{abc}=0 \tag{4.13}$$

で与えられる．それは，どの Tr も少なくとも一つの因子は d になるからである．そこで C_i $(i=1,2,3)$ と C_0 とに対して上式が成り立てば良い．まず C_0 を考えないと，SU(2) に対して

$$\mathrm{Tr}\{C_i,C_j\}C_k=0 \tag{4.14}$$

ところで C_0 は $\mathscr{A}_\mu$ には含まれていないので，問題になるのは

$$\mathrm{Tr}\,\{C_i, C_j\}C_0 = \mathrm{Tr}\,\{C_i, C_j\}(C_3 - 2Q) \tag{4.15}$$

であるが，これは $i=j$ の時しか残らず，$C_i^2=1$ であるから，結局 Tr が消える条件は

$$\mathrm{Tr}\,Q = 0 \tag{4.16}$$

すなわち，スピン 1/2 のすべての素粒子の荷電の和が消えなければならない．この条件を満たすためには c クォークの存在が望ましい．すなわち，レプトンとクォークとは世代毎に荷電の和が消えるからである．

$$\text{レプトン} \quad : \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \cdots$$

$$\text{クォーク} \quad : \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \cdots$$

各世代のレプトンの荷電の和は，$0-1=-1$ であるが，クォークの方はそれぞれのクォークが三種類のカラーを持つとすると，各世代で荷電の和は，

$$3\times\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=1$$

となり，ちょうどクォークの荷電を打ち消す．これは c クォーク無しでは成り立たない．これが GIM 機構は異常項の打ち消しにも役に立つと述べた理由である．

このように見てくると，一世代は中性のニュートリノと負荷電のレプトン，そして三色の $(2/3)e$ という荷電のクォークと $-(1/3)e$ という荷電のクォークから成り立つと考えることが，異常項の消失という立場から望ましい．またレプトンには，第三世代 (ν_τ, τ^-) が存在するので，クォークについても第三世代を考える必要がある．そこで (t, b) というクォークが考えられた．第三世代については第 12 章 §6 の議論を参照されたい．

また上の議論ではカラーという自由度が重要な役割を果たし，クォークのカラーには三つの状態が存在するという結論が得られた．そこで以下ではこの結論を支持する他の議論を与えることにする．

既に第 7 章 §5 で与えたように $\pi^0 \to 2\gamma$ という崩壊過程の振幅は (7.5.33) で与えられるが，これに対応する有効ハミルトニアン密度は，

$$\mathscr{H}_{\mathrm{eff}} = \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{G}{m}\right)\varphi \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H} \tag{4.17}$$

で与えられることになる．そこでクォーク模型を用いて (4.17) に対応する有効ハミルトニアン密度を導き出し，カラーの存在の証拠を探ってみよう．

クォーク模型に対して電磁的相互作用を摂動として導入し，その影響を調べる．そのため次の軸性ベクトル流を考えてみよう．

$$A_\lambda^a = \sum_q i\bar{q}\gamma_\lambda\gamma_5\frac{\tau_a}{2}q \qquad (q\text{ は第一世代のみ}) \tag{4.18}$$

QCD の範囲内では次の PCAC 関係式が成り立つ．(14.2.23) を参照して，

$$\partial_\lambda \boldsymbol{A}_\lambda^a = -f_\pi\mu^2\boldsymbol{\varphi}_a \tag{4.19}$$

ところで電磁的相互作用を摂動として導入すると，Adler の異常項のために，上式は次の形に変更を受ける：

$$\partial_\lambda \boldsymbol{A}_\lambda^a = -f_\pi\mu^2\boldsymbol{\varphi}_a + b\delta_{a3}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H} \tag{4.20}$$

この係数 b の計算法は，最後の章で示されるが，$\pi^0\to 2\gamma$ の摂動計算と同じで，

$$b = -\frac{2\alpha}{\pi}N_C S \tag{4.21}$$

ただし N_C はクォークのカラーの数であり，S は次式で与えられる：

$$S = \sum_{u,d}\left(\frac{\tau_3}{2}\right)_a Q_a^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6} \tag{4.22}$$

そこで第 14 章 §2 で導入されたシグマ模型で，PCAC 関係式を (4.19) から (4.20) に変えるにはラグランジアン密度にどのような付加項が必要であるかを調べると，

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{b}{f_\pi}\varphi_3\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H} \tag{4.23}$$

この時に，実際 PCAC 関係式は次の形になる：

$$\partial_\lambda \boldsymbol{A}_\lambda^a = -f_\pi\mu^2\boldsymbol{\varphi}_a + b\delta_{a3}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{f_\pi}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H} \tag{4.24}$$

そこで，$\boldsymbol{\sigma}\to\eta$, $f_\pi\to\eta$ と置き換えれば，(4.24) は (4.20) と一致する．

そこでクォーク模型による $\pi^0\to 2\gamma$ の有効ラグランジアン密度 (4.23) を用いてこの崩壊幅を計算して実験と比較すると，

$$\Gamma(\pi^0\to 2\gamma) = \frac{\mu^3}{64\pi^3}\left(\frac{2\alpha}{f_\pi}N_C S\right)^2 = (7.95\pm 0.55)\ \mathrm{eV} \tag{4.25}$$

これから N_C を計算すると，

$$N_C = 3.06\pm 0.10 \tag{4.26}$$

これはカラー状態が3個あることの実験的証拠である．なお上の計算では，π^0 が $q\bar{q}$ という束縛状態であるので計算が難しく，それを避けるためにシグマ模型を援用したので，計算自身は現象論的になっている．

§5 大統一理論

Weinberg-Salam 理論は電磁的相互作用と弱い相互作用をゲージ原理に従って統一するのに成功した．他方強い相互作用はカラー SU(3) にゲージ原理を適用して得られるものと考えられる．この強い相互作用の力学を量子色力学と呼び，QCD(Quantum Chromodynamics) と略称する．このゲージ粒子はクォークを結び付けてハドロンを形成するボゾンなのでグルーオン (gluon) と呼ばれる．glue は膠を意味する．この対称性は破れていないのでグルーオンは質量0であると考えられ，その力は遠距離まで到達し得るものと考えられている．

従って強い相互作用，電磁的相互作用と弱い相互作用を統一した電弱相互作用 (electroweak interaction と称する) を支配するゲージ群は

$$SU(3)\times SU(2)\times U(1) \tag{5.1}$$

で与えられる．そこで上の群をもっと大きい群Gから出発して，対称性の自発的破れによってGが (5.1) まで分解されたと考え，強弱電磁相互作用を統一的に記述し得ないかという考えが浮かぶ．このような理論を大統一理論と呼ぶ．このようなゲージ理論が，ただ一つの結合定数で記述されるためには，群Gが単純であることが望ましい．すなわち，GはG自身と単位元以外には不変部分群を持たないと仮定しよう．そこで，次の条件を満たす単純群Gを探す．

$$G\supset SU(3)\times SU(2)\times U(1)\supset SU(3)_{color}\times U(1)_{em} \tag{5.2}$$

(5.1) の群も対称性の自発的破れにより，最後まで残っている厳密な対称性は，カラー SU(3) と，電磁相互作用の U(1) のみとなるのである．さて SU(3), SU(2), U(1) の階数は，それぞれ 2, 1, 1 であるので，Gの階数は最低4である．このような群としていろいろな提案があったが，ここでは Georgi-Glashow (1974) による SU(5) という群を例として考えてみたい．

なお上述の意味での大統一理論には重力は入っていない．重力が重要となるエネルギーは，

$$E \gtrsim \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} c^2 \sim 10^{19}\mathrm{GeV} \tag{5.3}$$

ここに G は万有引力の定数であり，$(\hbar c/G)^{1/2}$ は Planck 質量と呼ばれる．従って重力抜きの大統一理論，あるいは GUT (Grand Unified Theory) は 10^{19}GeV 以下で定式化されなければならない．

一般に群Gの満たすべき条件は，

1) Gは単純でただ一つの結合定数しか導入できない．

2) クォークとレプトンとの荷電は，次の実験的不等式を満たさなければならない：

$$|(Q_e+Q_p)/Q_p| \lesssim \mathcal{O}(10^{-21}) \tag{5.4}$$

3) Gの階数は4以上で，

$$\mathrm{G} \supset \mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1) \tag{5.5}$$

4) Dirac 粒子を収容するためには，複素表現を含まねばならない．

以下では $G=\mathrm{SU}(5)$ を考える．まず三世代のクォークとレプトンを考える．

Ⅰ． $\begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L, \bar{e}_R, u_R, d_R$

Ⅱ． $\begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu^-\end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix}c\\ s\end{pmatrix}_L, \bar{\mu}_R, c_R, s_R$

Ⅲ． $\begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau^-\end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix}t\\ b\end{pmatrix}_L, \bar{\tau}_R, t_R, b_R$

またすべてのクォークは三種類のカラーを持っている．そこで第一世代を並べてみると，

$$(\nu_e, e, \bar{e}, u_i, d_i, \bar{u}_i, \bar{d}_i)_L \qquad (i=1,2,3) \tag{5.6}$$

ただし，$\bar{u}_L=\overline{(u_R)}$ を意味するものとする．そこで全体で15成分ある．これを基本表現 $\bar{\mathbf{5}}$ と $\mathbf{5}\times\mathbf{5}$ の反対称部分 $\mathbf{10}$ とで表現する．すなわち，(5.6) は

$$\bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10}, \tag{5.7}$$

$$\bar{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix}\bar{d}_R\\ \bar{d}_Y\\ \bar{d}_B\\ e^-\\ \nu\end{pmatrix}_L, \qquad \mathbf{10} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{u}_B & -\bar{u}_Y & -u_R & -d_R\\ -\bar{u}_B & 0 & \bar{u}_R & -u_Y & -d_Y\\ \bar{u}_Y & -\bar{u}_R & 0 & -u_B & -d_B\\ u_R & u_Y & u_B & 0 & -\bar{e}\\ d_R & d_Y & d_B & \bar{e} & 0 \end{pmatrix}_L \tag{5.8}$$

ただし R, Y, B はカラーで，仮に red，yellow，blue という名称を選んでいる．これを SU(3) と SU(2) に関する変換性で表現すると，例えば，

$$\bar{\mathbf{5}}=(\bar{\mathbf{3}},\mathbf{1})+(\mathbf{1},\mathbf{2})=\bar{d}+\begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}_L$$

$$(\mathbf{3},\mathbf{2})=\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L, \qquad (\mathbf{1},\mathbf{1})=\bar{e}_L=\overline{(e_R)}$$

この理論では荷電 Q は，SU(5) の生成演算子の一つなのでトレースが消え，従って，$\bar{\mathbf{5}}$ のメンバーの荷電の和は消える．

$$-3Q_d+Q_e=0 \qquad \text{すなわち} \qquad Q_d=\frac{1}{3}Q_e=-\frac{1}{3} \tag{5.9}$$

そして Q のトレースが 0 なので異常項は無い．

また SU(5) にはゲージ粒子は 24 個存在するが，その中の半数は 8 個のグルーオンと 4 個の電弱ゲージ粒子である．残りはレプトンとクォークを結び付ける役目をする．この種のゲージ粒子を媒介として，核子がレプトンに崩壊し得ることになる．このゲージ粒子をXと呼ぶと，核子崩壊の幅は μ 崩壊に倣って

$$\Gamma(N\to \text{lepton}) \propto \alpha_G^2\left(\frac{m_p{}^5}{M_X{}^4}\right) \tag{5.10}$$

崩壊粒子の質量の 5 乗は μ 崩壊のアナロジーであり，中間ゲージ粒子の質量の 4 乗は，このボゾンの伝播関数の自乗から生ずる．α_G は，大統一理論での結合定数 g を用いて次式で与えられる：

$$\alpha_G=\frac{g^2}{4\pi} \tag{5.11}$$

さて陽子の寿命の下限は，

$$\tau_p>10^{32}\ \text{years} \tag{5.12}$$

より，M_X の下限が出る．

$$M_X\gtrsim 10^{15}\ \text{GeV}\ll \text{Planck mass} \tag{5.13}$$

M_X を評価するにはくりこみ群を用いる．低いエネルギーでは対称性が破れていても，高いエネルギーではその破れがだんだん重要でなくなり，ついにあるエネルギー M_X で対称性が回復すると考えるのである．これは，低温では強磁性体において回転対称性が自発的に破れていても，高温では相変化が生じて，回転対称性が回復するのと同じ事情である．この際に温度に相当するのは，四

元運動量移行の大きさであり，これをQ^2と書くと，有効結合定数はQ^2の関数となる．これは第19章で議論されるくりこみ群の考え方である．従って，群SU(3)，SU(2)，U(1)に対応する低エネルギーでの有効結合定数を，それぞれ$\alpha_3(Q^2), \alpha_2(Q^2), \alpha_1(Q^2)$と書くと，高エネルギーで対称性が回復すれば，

$$\alpha_1(M_X{}^2)=\alpha_2(M_X{}^2)=\alpha_3(M_X{}^2)\equiv\alpha_G(M_X{}^2). \tag{5.14}$$

しかしながら低いエネルギーではお互いに異なっている．Q^2の増加につれて，$\alpha_2(Q^2)$と$\alpha_3(Q^2)$は減少し，$\alpha_1(Q^2)$は増大する．そのQ^2に対する依存性は，くりこみ群の議論を先取りして，

$$\mathrm{SU}(3)\ :\quad \frac{1}{\alpha_3(Q^2)}-\frac{1}{\alpha_3(M_X{}^2)}=-\frac{1}{4\pi}\left(11-\frac{2}{3}n_f\right)\ln\frac{M_X{}^2}{Q^2}, \tag{5.15}$$

$$\mathrm{SU}(2)\ :\quad \frac{1}{\alpha_2(Q^2)}-\frac{1}{\alpha_2(M_X{}^2)}=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{22}{3}-\frac{2}{3}n_f\right)\ln\frac{M_X{}^2}{Q^2}, \tag{5.16}$$

$$\mathrm{U}(1)\ :\quad \frac{1}{\alpha_1(Q^2)}-\frac{1}{\alpha_1(M_X{}^2)}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{3}n_f\right)\ln\frac{M_X{}^2}{Q^2} \tag{5.17}$$

さて低いエネルギーでの$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$が実験的に決定されれば，$M_X$は決められることになる．なお$n_f$はフレイバーの数である．そこでWeinbergの角からM_Xを決めてみよう．

Weinberg-Salam理論での(1.2)式で，Qをeを単位として測り，I_iをT_iと書くことにすると，

$$Q=T_3+\frac{1}{2}Y \tag{5.18}$$

そして$\hat{T}$，$\frac{1}{2}Y$に乗ぜられる結合定数は，それぞれgとg'とであった．$\hat{T}$は$\hat{W}_\mu$に，YはB_μと結合されるが，SU(5)ではYを規格化し直して

$$\mathrm{Tr}\,(T_iT_j)=\frac{1}{2}\delta_{ij}\qquad(i,j=1,2,\cdots,24) \tag{5.19}$$

とする．しからば$\bar{5}$という表現について考えると，

$$Y=cT_Y \tag{5.20}$$

としてやると，cが定まる．そこで次の式の自乗を考える：

$$Q=T_3+\frac{c}{2}T_Y \tag{5.21}$$

しからば，クォークは$\overline{(d_R)}$しかないからT_3には寄与せず，(5.19)より

$$\sum_{\bar{5}}Q^2=3\left(\frac{1}{3}\right)^2+1=\frac{4}{3},\qquad \sum_{\bar{5}}T_3{}^2=\sum_{\bar{5}}T_Y{}^2=\frac{1}{2},\qquad \sum_{\bar{5}}T_3T_Y=0, \tag{5.22}$$

$$\sum_5 Q^2 = \sum_5 \left(T_3 + \frac{c}{2} T_Y\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{c^2}{8} = \frac{4}{3} \tag{5.23}$$

従って c の値が定まり，次式を得る：

$$Y = 2\sqrt{\frac{5}{3}} T_Y \tag{5.24}$$

ところで T_3 の係数は g であり，Y の係数は $g'/2$ である．故に

$$gT_iW_{\mu i} = g_2 T_i W_{\mu i}, \qquad \frac{1}{2} g' Y B_\mu = g_1 T_Y B_\mu \tag{5.25}$$

とおけば，g_2 と g_1 とはそれぞれ SU(2) と U(1) との結合定数であるが，SU(5) が正確な極限では，$g_1 = g_2$ となるはずである．上の式から

$$g' = \sqrt{\frac{3}{5}} g_1 \tag{5.26}$$

が得られる．これらの結合定数は低エネルギーで定義されているものとする．そこで Weinberg の角は

$$\sin^2\theta_W = \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} = \frac{\frac{3}{5}{g_1}^2}{{g_2}^2 + \frac{3}{5}{g_1}^2} \tag{5.27}$$

また e^2 は

$$e^2 = \frac{g^2 g'^2}{g^2 + g'^2} = \frac{\frac{3}{5}{g_1}^2{g_2}^2}{{g_2}^2 + \frac{3}{5}{g_1}^2} \tag{5.28}$$

従って α で表わせば，

$$\alpha = \frac{3}{5} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 + \frac{3}{5}\alpha_1} = \alpha_2 \sin^2\theta_W \tag{5.29}$$

次に (5.16)，(5.17) の差をとれば，

$$\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{22}{3}\right) \ln \frac{M_X^2}{Q^2} \tag{5.30}$$

また (5.27) を α で表わせば

$$\sin^2\theta_W = \frac{\frac{3}{5}\alpha_1}{\alpha_2 + \frac{3}{5}\alpha_1} \tag{5.31}$$

そこで(5.29)，(5.30)，(5.31) から α_1, α_2 を消去することにより，知られた

定数しか出てこない式を得る．

$$\sin^2\theta_W=\frac{3}{8}\left(1-\frac{\alpha}{4\pi}\frac{110}{9}\ln\frac{M_X^2}{Q^2}\right) \tag{5.32}$$

ただし Q^2 は低エネルギーであり，$(\mathrm{GeV})^2$ のオーダーであるとする．しからば

$$M_X\sim10^{16}\,\mathrm{GeV} \tag{5.33}$$

と選べば，θ_W は実験値が再現される．

$$\sin^2\theta_W=0.21 \tag{5.34}$$

しかしながら陽子の寿命は 10^{31} 年程度で，なかなか実験的下限 10^{32} 年には達しない．この模型は簡単であるが，まだ実験と必ずしもうまくいっていない．しかしながら大統一理論に至って初めてクォークもレプトンももともとは同じ種族であるという認識が得られた．その点で第12章§6あたりで議論されていたクォークとレプトンの間の普遍性の問題に対してすっきりとした理解が得られるようになったと思う．

第16章　径路積分の方法

場を量子化するには正統的な正準量子化の方法の外に径路積分の方法があり，多くの問題において両者は一致した結果を与えるが，ゲージ理論の量子化には後者が有効であった．正準量子化法が用いられるようになったのは，後者に関する理解が進んでから後のことである．径路積分の方法は Feynman により開発され，Faddeev と Popov (1967) とによりゲージ理論に応用された．

§1　質点系の量子化

まず最も簡単な質点系の量子化から始めよう．Heisenberg 表示では，演算子は時間変数に依存する．この表示での演算子 Q は

$$Q_H(t) \tag{1.1}$$

と表わされ，その固有状態は，$|q,t\rangle_H$ と表わされる：

$$Q_H(t)|q,t\rangle_H = q|q,t\rangle_H \tag{1.2}$$

ただし q は Q の固有値の一つである．Schrödinger 表示との関係は，

$$Q_H(t) = e^{iHt}Q_S e^{-iHt}, \tag{1.3}$$

$$|q\rangle = e^{-iHt}|q,t\rangle_H, \tag{1.4}$$

$$Q_S|q\rangle = q|q\rangle \tag{1.5}$$

で与えられることになる．そこで変換関数を導入する．

$$F(q',t'\,;\,q,t) = {}_H\langle q',t'|q,t\rangle_H = \langle q'|\exp\{-iH(t'-t)\}|q\rangle \tag{1.6}$$

ここまでは正準形式に基づいているが，これを出発点として径路積分を導入する．

まず $(t'-t)$ を $(n+1)$ 区間に等分する．

$$t' = t+(n+1)\varepsilon, \qquad t_l = t+l\varepsilon \tag{1.7}$$

しからば，$|q_l,t_l\rangle$ の完全性から次式を得る．ただし添字を省略している：

$$F(q',t'\,;\,q,t) = \int dq_1(t_1)\cdots\int dq_n(t_n)\langle q',t'|q_n,t_n\rangle\langle q_n,t_n|q_{n-1},t_{n-1}\rangle\cdots$$
$$\cdots\langle q_1,t_1|q,t\rangle \tag{1.8}$$

ε を十分小さく選べば，

$$\langle q',\varepsilon|q,0\rangle=\langle q'|e^{-i\varepsilon H}|q\rangle=\delta(q'-q)-i\varepsilon\langle q'|H|q\rangle+\mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{1.9}$$

この第一項は，固有状態の直交規格化条件を表わしている．そこで H として

$$H=\frac{1}{2}P^2+V(Q) \tag{1.10}$$

という形を選ぶ．しからば，(1.9) の右辺第二項は，

$$\begin{aligned}\langle q'|H(P,Q)|q\rangle&=\int\frac{dp}{2\pi}\exp\{ip(q'-q)\}\left\{\frac{1}{2}p^2+V(q)\right\}\\&=\int\frac{dp}{2\pi}\exp\{ip(q'-q)\}H\left(p,\frac{q+q'}{2}\right)\end{aligned} \tag{1.11}$$

従って，ε の一次のオーダーでは，

$$\langle q_l,t_l|q_{l-1},t_{l-1}\rangle=\int\frac{dp}{2\pi}\exp\left[ip(q_l-q_{l-1})-i\varepsilon H\left(p,\frac{1}{2}(q_l+q_{l-1})\right)\right] \tag{1.12}$$

そこで，$q_0=q$，$q_{n+1}=q'$ としてこの式を (1.8) に代入すると，

$$\begin{aligned}&F(q',t'\,;q,t)\\&=\lim_{n\to\infty}\int\prod_{j=1}^{n}dq_j\int\prod_{j=1}^{n+1}\frac{dp_j}{2\pi}\exp\left\{i\sum_{l=1}^{n+1}\left[p_l(q_l-q_{l-1})\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-H\left(p_l,\frac{1}{2}(q_l+q_{l-1})\right)(t_l-t_{l-1})\right]\right\}\end{aligned} \tag{1.13}$$

これから分かるように積分変数としての p の数は，q の数より一つ多い．また規格化条件はユニタリー性から決まる．

$$\begin{aligned}&\int dq'F(q',t'\,;q_1,t)F^*(q',t'\,;q_2,t)\\&=\int dq'\langle q',t'|q_1,t\rangle\langle q',t'|q_2,t\rangle^*=\delta(q_1-q_2)\end{aligned} \tag{1.14}$$

このことを頭に留めておき，今後あまり規格化を気にせずに (1.13) の極限を次のように書く：

$$F(q',t'\,;q,t)=\int\mathcal{D}p\mathcal{D}q\exp\left\{i\int_t^{t'}dt(p\dot{q}-H(p,q)\right\} \tag{1.15}$$

ところで前述の H に対して次の公式を適用すると p 積分が実行しうる：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi}\exp\left\{i\left(p\dot{q}-\frac{1}{2}p^2\right)\varepsilon\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi i\varepsilon}}\exp\left(\frac{1}{2}i\dot{q}^2\varepsilon\right) \tag{1.16}$$

しからば

$$F(q',t';q,t)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi i\varepsilon}}\right)^{n+1}\int\prod_{j=1}^{n}dq_j\exp\left\{i\sum_{l=1}^{n+1}\varepsilon\left[\frac{1}{2}\left(\frac{q_l-q_{l-1}}{\varepsilon}\right)^2-V\left(\frac{q_l+q_{l-1}}{2}\right)\right]\right\}$$
$$=\int\mathcal{D}q\exp\left\{i\int_t^{t'}dtL(q,\dot{q})\right\} \tag{1.17}$$

ただし

$$L(q,\dot{q})=\frac{1}{2}\dot{q}^2-V(q) \tag{1.18}$$

であり，指数関数の肩に乗っているのは，ちょうど作用積分になる．

$$S=\int_t^{t'}dtL(q,\dot{q}) \tag{1.19}$$

このように径路積分は Hamilton 形式と Lagrange 形式との両方の形で表わされることになる．しかし上の導出から明らかなように，Hamilton 形式の方がより基本的であり，Lagrange 形式の場合には上の公式が多少変更を受ける場合がある．例えば，次のラグランジアンを考えてみよう：

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2f(q), \tag{1.20}$$

$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}=\dot{q}f(q),\qquad H(p,q)=p\dot{q}-L=\frac{1}{2}p^2[f(q)]^{-1} \tag{1.21}$$

この時の変換関数は，

$$F(q',t';q,t)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int\prod_{j=1}^{n}dq_j\int\prod_{j=1}^{n+1}dp_j\exp\left[i\left\{\sum_{l=1}^{n+1}p_l(q_l-q_{l-1})-\frac{1}{2}\varepsilon p_l^2\left[f\left(\frac{q_l+q_{l-1}}{2}\right)\right]^{-1}\right\}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int\prod_{j=1}^{n}dq_j\prod_{j=1}^{n+1}\sqrt{f\left(\frac{q_j+q_{j-1}}{2}\right)\Big/2\pi i\varepsilon}\exp\left[i\sum_{l=1}^{n+1}\varepsilon\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{q_l-q_{l-1}}{\varepsilon}\right)^2f\left(\frac{q_l+q_{l-1}}{2}\right)\right\}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi i\varepsilon}}\right)^{n+1}\int\prod_{j=1}^{n}dq_j\exp\left[i\sum_{l=1}^{n+1}\varepsilon\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{q_l-q_{l-1}}{\varepsilon}\right)^2f\left(\frac{q_l+q_{l-1}}{2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{i}{2\varepsilon}\ln f\left(\frac{q_l+q_{l-1}}{2}\right)\right\}\right]$$
$$=\int\mathcal{D}q\exp(iS_{\text{eff}}) \tag{1.22}$$

ただし，

$$S_{\text{eff}}=\int_t^{t'}dt\left\{L(q,\dot{q})-\frac{i}{2}\delta(0)\ln \mathrm{f}(q)\right\} \tag{1.23}$$

この結果を得るのには，次の置き換えをしている：

$$\sum \varepsilon \to \int dt, \qquad \frac{1}{\varepsilon} \to dt^{-1} \to \delta(0) \tag{1.24}$$

この方法は，上で見たように Feynman 式計算に用いられる有効ラグランジアンを求めるのに用いられる．ここで大切なことは，Hamilton 形式から Lagrange 形式に移る時に，dq が途中で次の置き換えを受けることである：

$$dq \to dq\sqrt{f(q)} \tag{1.25}$$

この形は一般座標変換に対して不変な形式である．実際 Riemann 幾何学で，

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \tag{1.26}$$

の形の線素が与えられた時に，一般座標変換に対して不変な体積要素は，

$$dV = \sqrt{|g|}\,dx^1 \cdots dx^n \tag{1.27}$$

で与えられるが，(1.25)はその特別な場合になっている．ここに g は行列式で

$$g = \det\,(g_{ij}) \tag{1.28}$$

により定義される．(1.25) は，(1.27) で $n=1$ と置いたものに相当する．この結果は後に場の理論に拡張され，第10章§5の結論を再現するのに利用される．また，今までの結果を自由度 N の系に拡張することは容易である．

次に演算子の行列要素について考える．そこで次の条件を導入する：

$$t' > t_0 > t \tag{1.29}$$

この時に，$Q(t_0)$ の行列要素は，

$$\begin{aligned}\langle q', t' | Q(t_0) | q, t\rangle = &\int dq_1(t_1)\cdots \int dq_n(t_n) \langle q', t' | q_n, t_n\rangle \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1}\rangle \cdots \\ &\cdots \langle q_{i+1}, t_{i+1} | q_i, t_i\rangle \langle q_i, t_i | Q(t_i) | q_{i-1}, t_{i-1}\rangle \cdots \langle q_1, t_1 | q, t\rangle\end{aligned} \tag{1.30}$$

ただし $t_0 = t_i$ とする．しからば，

$$\langle q_i, t_i | Q(t_i) | q_{i-1}, t_{i-1}\rangle = q_i \langle q_i, t_i | q_{i-1}, t_{i-1}\rangle \tag{1.31}$$

従って，

$$\langle q', t' | Q(t_0) | q, t\rangle = \int \mathscr{D}p\mathscr{D}q\, q(t_0) \exp\left\{i\int_t^{t'} dt[p\dot{q} - H(p, q)]\right\} \tag{1.32}$$

次に，二つの演算子 $Q(t_1), Q(t_2)$ を次の条件下で考える：

$$t' > t_1 > t_2 > t \tag{1.33}$$

しからば $\langle q', t' | Q(t_1)Q(t_2) | q, t\rangle$ も (1.32) と同じような形に書ける．一般に，

$$\begin{aligned}&\langle q', t' | T^*[Q(t_1)\cdots Q(t_N)] | q, t\rangle \\ &= \int \mathscr{D}p\mathscr{D}q\, q(t_1)\cdots q(t_N) \exp\left\{i\int_t^{t'} dt[p\dot{q} - H(p, q)]\right\}\end{aligned} \tag{1.34}$$

ただし，$t_1, \cdots, t_N$ は，t' と t との間にあるものとする．このように (1.34) 式の右辺を計算すると自然に時間的順序付けのされた演算子積の行列要素になる．

次に系の基底状態に関する行列要素を求めてみよう．

$$T' > t' > t > T \tag{1.35}$$

を仮定して，t' と t との間に外場を与えて $J(t)q(t)$ という付加項を加える．

$$\begin{aligned}\langle Q', T' | Q, T\rangle_J &= \int \mathscr{D}p\mathscr{D}q \exp\left\{i\int_T^{T'} dt[p\dot{q} - H(p,q) - Jq]\right\} \\ &= \int dq' dq \langle Q', T' | q', t'\rangle \langle q', t' | q, t\rangle_J \langle q, t | Q, T\rangle \end{aligned} \tag{1.36}$$

そこで $|n\rangle$ をエネルギーの固有状態として，次のように置く：

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \qquad \langle q|n\rangle = \varphi_n(q) \tag{1.37}$$

しからば，

$$\begin{aligned}\langle q, t | Q, T\rangle &= \langle q | \exp\{-iH(t-T)\} | Q\rangle \\ &= \sum_n \varphi_n(q)\varphi_n^*(Q) \exp\{-iE_n(t-T)\}\end{aligned} \tag{1.38}$$

この和から基底状態を取り出すために $T \to i\infty$ と置くと，熱力学の第三法則と同様に $n=0$ のみが残る．$n=0$ は基底状態を表わす．

$$\lim_{T\to i\infty} \exp(-iE_0T)\langle q, t | Q, T\rangle = \varphi_0(q, t)\varphi_0^*(Q) \tag{1.39}$$

ただし，$\varphi_0(q, t) = \varphi_0(q)\exp(-iE_0t)$ である．同様にして，

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{T'\to -i\infty \\ T\to i\infty}} \frac{\langle Q', T' | Q, T\rangle}{\exp\{-iE_0(T'-T)\}\varphi_0^*(Q)\varphi_0(Q')} \\ &= \int dq \int dq' \varphi_0^*(q', t')\langle q', t' | q, t\rangle_J \varphi_0(q, t)\end{aligned} \tag{1.40}$$

この右辺は $\langle 0|0\rangle_J$ と書くことができる．これは母汎関数なので，

$$\mathcal{T}[J] = \langle 0|0\rangle_J \tag{1.41}$$

と書くことにする．しからば定義から

$$\begin{aligned}\left(\frac{\delta^n \mathcal{T}[J]}{\delta J(t_1)\cdots\delta J(t_n)}\right)_{J=0} &= \langle 0| T^*[Q(t_1)\cdots Q(t_n)] |0\rangle \\ &= (-i)^n \int dq \int dq' \varphi_0^*(q', t')\varphi_0(q, t) \\ &\quad \times \int \mathscr{D}p\mathscr{D}q q(t_1)\cdots q(t_n) \exp\left\{i\int_t^{t'} dt[p\dot{q} - H(p,q)]\right.\end{aligned} \tag{1.42}$$

更に J に依らない因子を除いては

$$\mathcal{T}[J] \sim \lim_{\substack{T'\to -i\infty \\ T\to i\infty}} \langle Q', T'|Q, T\rangle_J \tag{1.43}$$

しかるに $\mathcal{T}[0]=\langle 0|0\rangle=1$ と規格化されているから，以下で極限操作 lim は常に $T'\to -i\infty$，$T\to i\infty$ を意味するものとして，

$$\mathcal{T}[J]=\frac{\lim \langle Q', T'|Q, T\rangle_J}{\lim \langle Q', T'|Q, T\rangle_{J=0}}$$
$$=\frac{\lim\int \mathcal{D}q \exp\left\{i\int_T^{T'} dt[L_{\rm eff}(q, \dot{q})-J(t)q(t)]\right\}}{\lim\int \mathcal{D}q \exp\left\{i\int_T^{T'} dt L_{\rm eff}(q, \dot{q})\right\}} \tag{1.44}$$

この極限をとることは，t の実軸を原点のまわりに90度右回りに回転させることに対応するので，この解析接続をするには，t を $t(1-i\varepsilon)$ で置き換えて，$\varepsilon\to +0$ の極限をとることと考えても良い．例えば，$V=\frac{1}{2}\omega^2q^2$ の時の作用積分を考えると，

$$\exp\left(-\frac{i}{2}\omega^2\int_T^{T'} dtq^2\right) \tag{1.45}$$

の t を $t(1-i\varepsilon)$ で置き換えることは，その代りに ω^2 を次のように置き換えることと同じである：

$$\omega^2 \to \omega^2(1-i\varepsilon)=\omega^2-i\varepsilon \tag{1.46}$$

そしてこの置換えをした母関数の $\varepsilon\to +0$ の極限が，正しい解析接続を与える母関数となる．

§2 場の量子化

場の理論では，空間の各点での場の量 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ が独立な力学変数である．従って

$$q_n(t) \to \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) \tag{2.1}$$

という置換えをすれば今までと全く同じである．母汎関数 $\mathcal{T}[J]$ は，極限で

$$\mathcal{T}[J] \sim \lim\int \mathcal{D}\boldsymbol{\varphi}\mathcal{D}\pi \exp\left\{i\int d^4x(\pi(x)\dot{\boldsymbol{\varphi}}(x)-\mathcal{H}(\boldsymbol{\varphi}(x), \pi(x))-J(x)\boldsymbol{\varphi}(x))\right\}, \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{\delta^n\mathcal{T}[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\right)_{J=0}=(-i)^n\langle 0|T^*[\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]|0\rangle \tag{2.3}$$

特に，簡単な線形理論においては，

$$\mathcal{T}[J]\sim\lim\int\mathcal{D}\varphi\exp\left\{i\int d^4x[\mathcal{L}(\varphi(x))-J(x)\varphi(x)]\right\}\tag{2.4}$$

そこで質点系の時と同様に，極限をとる代りに解析接続をするために，$m^2\to m^2-i\varepsilon$ という置換えをしておく．例として自由なスカラー場について考えよう．

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}[(\partial_\lambda\varphi)^2+m^2\varphi^2]\tag{2.5}$$

まず準備として次の積分を考える．ただし A は実対称行列とする：

$$I=\int\prod_j dx_j\exp\left[-i\left(\sum_{j,k}\frac{1}{2}A_{jk}x_jx_k+\sum_j x_jy_j\right)\right]\tag{2.6}$$

この積分を行うために次の変数変換を導入する：

$$x_i=-(A^{-1})_{ij}y_j+z_i\tag{2.7}$$

しからば，

$$\frac{1}{2}\sum_{j,k}A_{jk}x_jx_k+\sum_j x_jy_j=\frac{1}{2}\sum_{j,k}A_{jk}z_jz_k-\frac{1}{2}\sum_{j,k}(A^{-1})_{jk}y_jy_j\tag{2.8}$$

故に，

$$\begin{aligned}I&=\int\prod_j dz_j\exp\left[-i\left(\frac{1}{2}\sum_{j,k}A_{jk}z_jz_k-\frac{1}{2}\sum_{j,k}(A^{-1})_{jk}y_jy_k\right)\right]\\&\propto\exp\left[\frac{i}{2}\sum_{j,k}(A^{-1})_{jk}y_jy_k\right]\end{aligned}\tag{2.9}$$

そこで次の置き換えをする：

$$x_i\to\varphi(x),\quad y_i\to J(x),\quad \sum\to\int d^4x,\quad A_{jk}\to A(x-y)\tag{2.10}$$

すると，

$$\begin{aligned}&A(x-y)=-(\Box_x-m^2)\delta^4(x-y),\\&A^{-1}(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{p^2+m^2-i\varepsilon}=i\Delta_F(x-y)\end{aligned}\tag{2.11}$$

従って，

$$\mathcal{T}[J]=\exp\left[-\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right].\tag{2.12}$$

この時には，規格化の条件は自動的に成り立っている．すなわち，

$$\mathcal{T}[0]=1.\tag{2.13}$$

相互作用がある時には，結合定数について巾級数に展開すれば良い．

次に第10章§5で議論した有効ラグランジアンを径路積分の方法で導いて

みよう．C を D の逆行列とすると，

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}D_{ab}(\varphi)\partial_\lambda\varphi_a\cdot\partial_\lambda\varphi_b-V(\varphi), \tag{2.14}$$

$$\pi_a=D_{ab}\dot{\varphi}_b, \tag{2.15}$$

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}C_{ab}\pi_a\pi_b+\frac{1}{2}D_{ab}\nabla\varphi_a\nabla\varphi_b+V \tag{2.16}$$

そして母汎関数 $\mathcal{T}[J]$ は次の形になる：

$$\mathcal{T}[J]=\int\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\pi\exp\left\{i\int d^4x(\pi_a(x)\dot{\varphi}_a(x)-\mathcal{H}(x)-J_a(x)\varphi_a(x))\right\} \tag{2.17}$$

そして π に関する積分を行うために次の変数変換を行う：

$$\pi_a=\Pi_a+D_{ab}\dot{\varphi}_b, \tag{2.18}$$

$$\pi_a\dot{\varphi}_a-\frac{1}{2}C_{ab}\pi_a\pi_b=D_{ab}\dot{\varphi}_a\dot{\varphi}_b-\frac{1}{2}C_{ab}\Pi_a\Pi_b \tag{2.19}$$

しからば

$$\mathcal{T}[J]=\int\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\Pi\exp\left\{i\int d^4x\left(\mathcal{L}(x)-\frac{1}{2}C_{ab}\Pi_a(x)\Pi_b(x)-J_a(x)\varphi_a(x)\right)\right\} \tag{2.20}$$

そこで Π について積分すると，次の因子を生ずる：

$$\begin{aligned}\prod_x\sqrt{\frac{\det C^{-1}}{2\pi i\Delta}}&\propto\prod_x\sqrt{\det D},\qquad \Delta=d^4x\\&=\exp\left(\frac{1}{\Delta}\sum_x\frac{\Delta}{2}\ln\det D\right)\\&=\exp\left(\delta^4(0)\int d^4x\frac{1}{2}\ln\det D\right)\end{aligned} \tag{2.21}$$

これは $\mathcal{L}(x)$ を次の有効ラグランジアン密度で置き換えることに相当する：

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}=\mathcal{L}-\frac{i}{2}\delta^4(0)\ln\det D \tag{2.22}$$

これは (10.5.29) 式を全ラグランジアン密度について書いたものになっている．正準形式に基づく導出は複雑であったが，径路積分の方法は極めて直観的で簡単であり，径路積分の方法の利点を表わしている．

第17章　径路積分法によるゲージ場の量子化

最も簡単なゲージ場である電磁場の量子化については第4章で議論された．その際に生じた問題は，ゲージ不変なラグランジアン密度を用いて第3章で展開された量子化の一般論を適用すると，(3.4.2)式で定義される演算子 $D(\partial)$ が逆を持たないということであった．従って径路積分の方法でもそれに対応する困難が生ずるはずである．この困難をいかにして回避するかということがこの章の主題である．

§1　ゲージ場の量子化

ゲージ場の量子化を径路積分の方法で初めて与えたのは Faddeev と Popov とである．今一つの場 A が与えられた時に，グリーン関数その他を計算するにはまず作用積分 $S[A]$ を導入しなければならない．

$$S[A]=\int d^4x\mathscr{L}(x) \tag{1.1}$$

そして場の演算子 A を含む任意の演算子の真空期待値は次式で与えられる：

$$\langle F[A]\rangle=\int \mathscr{D}AF[A]\exp\{iS[A]\}\Big/\int \mathscr{D}A\exp\{iS[A]\} \tag{1.2}$$

ところが，この分母・分子は共に発散する．その理由は，ゲージ場が含まれている場合に，一つのゲージ場の配置から出発してゲージ変換でお互いに移り変われるすべての配置は，物理的に全く同じ状態に対応するので，同じ物理的状態が無限回，繰り返して出現するからである．この発散は，微分演算子 $D(\partial)$ が逆を持たないということに対応する．しかしながら，$F[A]$ がゲージ不変量とであれば，この発散は，分母と分子の間で打ち消し合うことになる．

そこでゲージ関数 Ω を導入し，対応するゲージ場 A の変換を

$$A(x)\to A^{\Omega}(x) \tag{1.3}$$

と書いた時に，(1.2) の中の分母・分子におけるそれぞれの径路積分を

$$\int \mathcal{D}\Omega \tag{1.4}$$

で除してやることができれば良い．その方法を与えたのが Faddeev と Popov とである．そして一つのゲージ場の配置が一つの物理的状態に対応するようにしてやる．この一つの配置を取り出すための条件をゲージ条件と呼ぶ．

1) ゲージ条件を与える方法

ゲージ条件を A の汎関数 $f[A]$ を用いて次の形に与える：

$$f[A]=0 \tag{1.5}$$

あるいは，任意の A に対して Ω を適当に選べば，

$$f[A^{\Omega}]=0 \tag{1.6}$$

が満たされると考えても良い．そこで次の式により $\Delta_f[A]$ というゲージ不変な汎関数を定義する：

$$\Delta_f[A]\int \mathcal{D}\Omega\delta(f[A^{\Omega}])=\text{const} \tag{1.7}$$

しからば

$$\int \mathcal{D}A\exp\{iS[A]\}\Big/\int \mathcal{D}\Omega \sim \int \mathcal{D}A\exp\{iS[A]\}\Delta_f[A]\delta(f[A]) \tag{1.8}$$

そこで外場を導入すると，グリーン関数の母関数は，

$$\mathcal{T}_f[J]\sim\int \mathcal{D}A\exp\left\{i\int d^4x(\mathcal{L}(x)-J(x)A(x))\right\}\Delta_f[A]\delta(f[A]) \tag{1.9}$$

2) 付加項の方法

S に付加項を付けて

$$\varphi[A]\int \mathcal{D}\Omega\exp\{i\Delta S[A^{\Omega}]\}=\text{const} \quad \left(\Delta S=\int d^4x\Delta\mathcal{L}(x)\right) \tag{1.10}$$

と置けば，1) と同様に (1.9) に対応する式は，

$$\mathcal{T}[J]\sim\int \mathcal{D}A\exp\left\{i\int d^4x(\mathcal{L}(x)+\Delta\mathcal{L}(x)-J(x)A(x)\right\}\varphi[A] \tag{1.11}$$

これがゲージ場量子化の一般論であり，次に具体例を挙げよう．

§2 電磁場の量子化

前節に述べたゲージ場の量子化法を，可換ゲージ場として最も良く知られた電磁場に対して適用する．正準量子化法による電磁場の量子化は良く知られて

いるが，径路積分法により同じ結果が再現されるかどうかを調べる．

$$\mathcal{L}=-\overline{\psi}[\gamma_\mu(\partial_\mu-ieA_\mu)+m]\psi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu},\quad (F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)$$

$$=\mathcal{L}_f+\mathcal{L}_{\mathrm{int}},\tag{2.1}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}}=ie\overline{\psi}\gamma_\mu\psi\cdot A_\mu=j_\mu\cdot A_\mu\tag{2.2}$$

このラグランジアン密度は，次のゲージ変換に対して不変である：

$$A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\partial_\mu\lambda(x),\quad \psi(x)\to e^{ie\lambda(x)}\psi(x),\quad \overline{\psi}(x)\to e^{-ie\lambda(x)}\overline{\psi}(x)\tag{2.3}$$

ここに $\lambda(x)$ は任意の実関数で，ゲージ関数と呼ばれる．

1)　ゲージ条件を与える方法

ここで Lorentz ゲージと Coulomb ゲージ（輻射ゲージ）とを考える．

$$f_L[A]=\partial_\mu A_\mu=0\quad あるいは\quad f_R[A]=\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0\tag{2.4}$$

いずれの場合にしても，$-\lambda$ というゲージ関数でゲージ変換をしてやると，

$$\Delta_L[A]\int\mathcal{D}\lambda\delta(\partial_\mu A_\mu-\Box\lambda)=\mathrm{const},\tag{2.5}$$

$$\Delta_R[A]\int\mathcal{D}\lambda\delta(\mathrm{div}\boldsymbol{A}-\Delta\lambda)=\mathrm{const}\tag{2.6}$$

であるが，Δ はいずれの場合にも A には依存しない．このために QED は簡単になる．そこで Lorentz ゲージにおける母関数を考えよう．

$$\mathcal{T}[J,\eta,\overline{\eta}]$$

$$\sim\int\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}\exp\left\{i\int d^4x(\mathcal{L}-\overline{\eta}\psi-\overline{\psi}\eta-J_\mu A_\mu)\right\}\delta(\partial_\mu A_\mu)\tag{2.7}$$

そこでまず $e=0$ と置いて，自由場に対する径路積分を実行する．

まず電子の方は，η と $\overline{\eta}$ は反可換な c 数として，

$$\int\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}\exp\left\{-i\int d^4x(\overline{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta)\right\}\tag{2.8}$$

この積分を実行するには，前章§2の例を少し一般化する．まず内積を

$$(x,Ax)=\sum_{j,k}x_j^*A_{jk}x_k\tag{2.9}$$

で定義し，(16.2.6) の積分の一般化を次の形に書く：

$$I=\int\prod_j dx_j\prod_k dx_k^*\ \exp\{-i[(x,Ax)+(x,y)+(y,x)]\}\tag{2.10}$$

そして次の変数変換を導入することにより積分を遂行する：

$$x_j=-(A^{-1})_{jk}y_k+z_j,\tag{2.11}$$

$$I=\int\prod_j dz_j\prod_k dz_k^*\exp\{-i[(z, Az)-(y, A^{-1}y)]\}\propto\exp\{i(y, A^{-1}y)\}\tag{2.12}$$

そこで（16.2.10）と同様な置換えをしてやると，

$$A^{-1}(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{ip\cdot\gamma+m-i\varepsilon}=iS_F(x-y)\tag{2.13}$$

従って（2.8）の積分は次の形になる：

$$\exp\left(-\int d^4x\int d^4y\bar{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)\right)\tag{2.14}$$

この結果を得るには，実は変数 $\psi, \bar{\psi}, \eta, \bar{\eta}$ の反可換性を考慮に入れなければならないが，ここでは対応論的に結果のみを与えた．次に電磁場の方は，

$$\delta(\partial_\mu A_\mu)\sim\int\mathscr{D}B\ \exp\left(i\int d^4x\ B(x)\partial_\mu A_\mu(x)\right)\tag{2.15}$$

という式を用いると，上の指数部分で部分積分を用いて次の形に書ける：

$$\int\mathscr{D}A_\mu\mathscr{D}B\exp\left\{-i\int d^4x\left(\frac{1}{2}[A_\mu(\partial_\mu\partial_\nu-\delta_{\mu\nu}\Box)A_\nu+\partial_\mu B\cdot A_\mu\right.\right.$$
$$\left.\left.-B\partial_\mu A_\mu]+J_\mu A_\mu\right)\right\}\tag{2.16}$$

そこで A_{ij} に相当する演算子は，(A_μ, B) という組に対して次のような行列で表わされることになる：

$$\begin{pmatrix}\partial_\mu\partial_\nu-\delta_{\mu\nu}\Box & \partial_\mu\\ -\partial_\nu & 0\end{pmatrix}\tag{2.17}$$

従って伝播関数に現れるのはその逆行列であるから，それを求めると

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\Box}\left(\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box}-\delta_{\mu\nu}\right) & -\frac{\partial_\mu}{\Box}\\ \frac{\partial_\nu}{\Box} & 0\end{pmatrix}\tag{2.18}$$

そこで，これを代入すると，(2.16)の径路積分は，

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4yJ_\mu(x)D_{\mu\nu}(x-y)J_\nu(y)\right),\tag{2.19}$$

$$D_{\mu\nu}(x)=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{1}{k^2-i\varepsilon}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-i\varepsilon}\right)e^{ik\cdot x}\tag{2.20}$$

ここに出てきた伝播関数は，ゲージ条件（2.4）に対応して Landau ゲージのものである．補助場 B の導入については，既に第 14 章 §5 で議論されている．

2)　付加項の方法

付加項として次の形を選ぶ:

$$\varDelta S=\int d^4x\varDelta\mathcal{L}, \qquad \varDelta\mathcal{L}=-\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2 \tag{2.21}$$

しからば $\varphi[A]$ は A に依存しないので簡単になる.

$$\mathcal{T}[J,\eta,\bar{\eta}]\sim\int\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}\exp\left\{i\int d^4x(\mathcal{L}+\varDelta\mathcal{L}-J_\mu A_\mu-\bar{\eta}\psi-\overline{\psi}\eta)\right\} \tag{2.22}$$

ψ の部分は 1) と同じであるが，電磁場の伝播関数は

$$D_{\mu\nu}(x)=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{1}{(k^2-i\varepsilon)^2}[k^2\delta_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu+\alpha k_\mu k_\nu]e^{ik\cdot x} \tag{2.23}$$

ここに α はゲージ・パラメターであり，この形は，既に (11.8.48) で与えられた積分表示で $\sigma=0$ と置いたものと一致する.

3)　Ward-高橋の恒等式

径路積分法は量子化に関して正準量子化と同等な結果を与えるが，他の性質，例えば，Ward-高橋の恒等式の導出にも用いることができる.

まず Landau ゲージでの電子の伝播関数については

$$\langle\boldsymbol{\psi}(x)\overline{\boldsymbol{\psi}}(y)\rangle_L=\frac{1}{N_L}\int\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}\psi(x)\overline{\psi}(y)e^{iS[\psi,\overline{\psi},A]}\,\delta(\partial_\mu A_\mu) \tag{2.24}$$

ただし N_L は規格化因子であり，

$$N_L=\int\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}\,e^{iS[\psi,\overline{\psi},A]}\,\delta(\partial_\mu A_\mu) \tag{2.25}$$

そこで次の変数変換を導入する:

$$\psi\to\psi'=e^{ie\lambda}\psi, \quad \overline{\psi}\to\overline{\psi}'=e^{-ie\lambda}\overline{\psi} \tag{2.26}$$

積分変数を $\psi',\overline{\psi}'$ に書き直し，次いで $\psi',\overline{\psi}'$ を再び $\psi,\overline{\psi}$ と記すことにすると，(2.24) の表式は次のようになる:

$$\langle\boldsymbol{\psi}(x)\overline{\boldsymbol{\psi}}(y)\rangle_L=\frac{1}{N_L}\int\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}\psi(x)\overline{\psi}(y)\,e^{iS[\psi,\overline{\psi},A]}\,\delta(\partial_\mu A_\mu)$$
$$\times\exp\left[ie(\lambda(x)-\lambda(y))-i\int d^4z j_\mu(z)\partial_\mu\lambda(z)\right] \tag{2.27}$$

ただし最後の項は，ラグランジアン密度の電子部分から生ずるものである．この式を，$\lambda(z)$ につき汎関数微分して，その後で $\lambda=0$ と置くと，

$$ie(\delta^4(x-z)-\delta^4(y-z))\langle\boldsymbol{\psi}(x),\overline{\boldsymbol{\psi}}(y)\rangle_L+i\partial_\mu\langle\boldsymbol{j}_\mu(z),\boldsymbol{\psi}(x),\overline{\boldsymbol{\psi}}(y)\rangle_L=0 \tag{2.28}$$

これをフーリエ変換すると，(11.7.28) という Ward-高橋の恒等式を得る.

$$-i(p-q)_\mu S'_F(p)\Gamma_\mu(p,q)S'_F(q)=S'_F(p)-S'_F(q) \tag{2.29}$$

上の導出法では電子部分のみの議論で話が済み，電磁場のことには触れていないので，この結果はどんなゲージでも成り立つことになる．

次にグリーン関数に対するゲージ変換を導入してみよう．

4) グリーン関数に対するゲージ変換

次に異なるゲージにおけるグリーン関数の間にはどのような関係があるのであろうか？ 例として Landau ゲージと輻射ゲージとの関係を調べる．

$$\langle\boldsymbol{\psi}(x)\overline{\boldsymbol{\psi}}(y)\rangle_R=\frac{1}{N_R}\int\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}\,\psi(x)\overline{\psi}(y)e^{iS[\psi,\overline{\psi},A]}\delta(\mathrm{div}\boldsymbol{A}), \tag{2.30}$$

$$N_R=\int\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}\;e^{iS[\psi,\overline{\psi},A]}\,\delta(\mathrm{div}\;\boldsymbol{A}) \tag{2.31}$$

そこで分母と分子に次の因子を挿入する：

$$\int\mathcal{D}\lambda\delta(\Box\lambda-\partial_\mu A_\mu)=\mathrm{const} \tag{2.32}$$

そしてゲージ変換を行うと，$S, \mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}$ は不変であり，積分内で

$$\delta(\Box\lambda-\partial_\mu A_\mu)\to\delta(\partial_\mu A_\mu),\quad \delta(\mathrm{div}\boldsymbol{A})\to\delta(\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\Delta\lambda) \tag{2.33}$$

となり，また分子には次の因子が生ずる：

$$\exp\{ie(\lambda(x)-\lambda(y))\} \tag{2.34}$$

さてλに対する制限は，(2.33) により

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\Delta\lambda=0 \tag{2.35}$$

であるから，この方程式を解くことにより，

$$\lambda(x)=\int d^4z\,\boldsymbol{\phi}(x-z)\cdot\boldsymbol{A}(z), \tag{2.36}$$

$$\boldsymbol{\phi}(x)=-\delta(x_0)\nabla\left(\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|}\right) \tag{2.37}$$

そこでλについて汎関数積分すると，$\delta(\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\Delta\lambda)$ が無くなるから，

$$\langle\boldsymbol{\psi}(x)\overline{\boldsymbol{\psi}}(y)\rangle_R=\langle\boldsymbol{\psi}(x)\overline{\boldsymbol{\psi}}(y)\;\exp\left\{ie\int d^4z[\boldsymbol{\phi}(x-z)-\boldsymbol{\phi}(y-z)]\boldsymbol{A}(z)\right\}\rangle_L \tag{2.38}$$

かくして輻射ゲージの量が，Landau ゲージの量で表わされることになる．

§3 非可換ゲージ場の量子化

次にゲージ場の量子化の一般論に従って非可換ゲージ場の量子化を考える．

1)　ゲージ条件を与える方法

ゲージ条件としてまず次の形を選んでみよう：

$$f[A]=\partial_\mu A_\mu^a=0 \tag{3.1}$$

無限小ゲージ変換を考えると，(13.2.9) により

$$\delta A_\mu^a=\frac{1}{g}\partial_\mu\lambda^a+f_{abc}A_\mu^b\lambda^c\equiv\frac{1}{g}(D_\mu\lambda)^a \tag{3.2}$$

従って無限小ゲージ変換に対して

$$(\partial_\mu A_\mu^a)^\Omega=\partial_\mu(A_\mu^a+\delta A_\mu^a)=\partial_\mu[A_\mu^a+\frac{1}{g}(D_\mu\lambda)^a] \tag{3.3}$$

そこで一般論に従って $\varDelta_f[A]$ を計算することにしよう．まず公式 (1.7) を用いると，

$$\begin{aligned}\int\mathcal{D}\Omega\delta[(\partial_\mu A_\mu^a)^\Omega]&=\int\mathcal{D}\lambda\delta[(\partial_\mu A_\mu^a)^\Omega]\\&=\int\mathcal{D}[(\partial_\mu A_\mu^a)^\Omega]\left[\frac{\mathcal{D}[(\partial_\mu A_\mu^a)^\Omega]}{\mathcal{D}\lambda}\right]^{-1}\delta[(\partial_\mu A_\mu^a)^\Omega]\\&=\left[\frac{\mathcal{D}[(\partial_\mu A_\mu^a)^\Omega]}{\mathcal{D}\lambda}\right]^{-1}\end{aligned} \tag{3.4}$$

従って $\varDelta_f[A]$ は，次の汎関数ヤコビアンで与えられる：

$$\varDelta_f[A]=\frac{\mathcal{D}[(\partial_\mu A_\mu^a)^\Omega]}{\mathcal{D}\lambda}=\det\left(-\frac{1}{g}\partial_\mu D_\mu\right) \tag{3.5}$$

この行列式を $A_\mu^a=0$ の時に1になるように規格化すると，

$$\varDelta_f[A]=\det\left(\frac{\partial_\mu D_\mu}{\Box}\right) \tag{3.6}$$

この表式を計算するのに，'t Hooft の方法 (1971) を用いる．まずグリーン関数の母汎関数は次式で与えられる：

$$\mathcal{T}[J]=\int\mathcal{D}A_\mu\exp\{iS[A,J]\}\varDelta_f[A]\delta(\partial_\mu A_\mu), \tag{3.7}$$

$$S[A,J]=S[A]-\int d^4x A_\mu^a(x)J_\mu^a(x) \tag{3.8}$$

また積分中の δ 関数は，次の表現を持つ．ただし規格化は議論しない：

$$\delta(\partial_\mu A_\mu)\sim\int\mathcal{D}B\exp\left(i\int d^4x\ \ B(x)\,\partial_\mu A_\mu(x)\right) \tag{3.9}$$

また，次の公式を用いる：

$$\int\prod_j dx_j dy_j\ \exp\{i(x,Ay)\}=(2\pi)^n(\det A)^{-1} \tag{3.10}$$

そこで次の式を得る：

$$\det\left(\frac{\partial_\mu D_\mu}{\Box}\right)^{-1}\sim\int\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\overline{\varphi}\ \exp\left(i\int d^4x\overline{\varphi}(x)\partial_\mu D_\mu\varphi(x)\right) \tag{3.11}$$

ところで (3.11) は，(3.6) の逆数である．そこで逆を求める方法を考えよう．(3.11) の表式は，スカラー場 φ と $\overline{\varphi}$ とを縮約したループの寄与の和と考えることができる．そしてゲージ場 A が外線として出ているのである．この和は，第10章§2の議論によれば，連結部分を e の肩に乗せたものであるから，逆を求めるには連結部分の符号を逆転させれば良い．ところが連結部分は，A が量子化される以前には，φ と $\overline{\varphi}$ とを縮約して得られる一つのループから成る．従って各ループの符号が逆転すれば良い．ところで第7章§4で述べたように，この逆転は φ と $\overline{\varphi}$ とが反可換である場合，すなわちフェルミ統計に従う場合に起きる．お互いに反可換ないわゆる Grassmann 数に関する径路積分については別に論ずる必要があるが，ここでは深入りせずに結果を記すに止めることにする．この時には，

$$\Delta_f[A]\sim\int\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\overline{\varphi}\ \exp\left(i\int d^4x\ \overline{\varphi}(x)\partial_\mu D_\mu\varphi(x)\right). \tag{3.12}$$

φ と $\overline{\varphi}$ とは，スカラー場であるのにフェルミ統計に従うことになり，その結果として不定計量を導入することになる．この理論の有効ラグランジアン密度は，

$$\mathcal{L}[A]+\overline{\varphi}\partial_\mu D_\mu\varphi+B\partial_\mu A_\mu \tag{3.13}$$

で与えられることになる．ただし成分を表わす添字 a については和をとることとし，それを陽には書いていない．このラグランジアンは QED における Landau ゲージに相等する．φ と $\overline{\varphi}$ とを Faddeev-Popov のゴースト場と呼ぶ．

2)　付加項の方法

ここでは $\Delta\mathcal{L}$ が $\partial_\mu A_\mu$ で表わされているとする．そこで $\varphi[A]$ を定義する．

$$\varphi[A]\int\mathcal{D}\Omega\exp\{i\Delta S[(\partial_\mu A_\mu)^\Omega]\}=\text{const} \tag{3.14}$$

これを計算するのに次の表式を用いる．

$$\exp\{i\Delta S[(\partial_\mu A_\mu)^\Omega]\}\sim\int\mathcal{D}Ce^{i\Delta S[C]}\delta[(\partial_\mu A_\mu)^\Omega-C] \tag{3.15}$$

しからばこの計算は上例のものに帰着し，$\varphi[A]$ が直ちに計算される．その結

果として有効ラグランジアン密度は，第一項をゲージ不変項として，

$$\mathscr{L}[A]+\bar{\varphi}\partial_\mu D_\mu\varphi+\Delta\mathscr{L} \tag{3.16}$$

そこで $\Delta\mathscr{L}$ として次の形を選ぶ．

$$\Delta\mathscr{L}=-\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2 \tag{3.17}$$

しからば，全ラグランジアン密度は，

$$\mathscr{L}[A]+\bar{\varphi}\partial_\mu D_\mu\varphi-\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2. \tag{3.18}$$

3)　ラグランジアン密度のエルミート化

今までの議論では，S行列とかグリーン関数を計算するための有効ラグランジアン密度を考えたが，演算子形式ではラグランジアン密度はエルミートでなければならない．(3.18) での Faddeev-Popov のゴースト場の項はエルミートではない．この項は部分積分すると，

$$\mathscr{L}_{\mathrm{FP}}\sim-\partial_\mu\bar{\varphi}\cdot D_\mu\varphi=-\partial_\mu\bar{\varphi}^a(\partial_\mu\varphi^a+gf_{abc}A_\mu^b\varphi^c). \tag{3.19}$$

以後 φ と $\bar{\varphi}$ とをそれぞれエルミートであると考えると，(3.18) は明らかにエルミートではない．それは φ と $\bar{\varphi}$ とが反可換なスカラー場だからである．そこでこの部分の位相を変えてみよう．

$$\mathscr{L}_{\mathrm{FP}}\to e^{i\alpha}\mathscr{L}_{\mathrm{FP}} \tag{3.20}$$

この結果として，ゴーストの伝播関数とゴーストとゲージ場との結合定数の位相が次のように変わる：

$$\langle\varphi(x)\bar{\varphi}(y)\rangle=D_F(x-y)\to e^{-i\alpha}D_F(x-y), \tag{3.21}$$

$$g\to ge^{i\alpha} \tag{3.22}$$

ところで φ と $\bar{\varphi}$ とが閉じたループにしか現れない場合には，D_F の数と g の数とは同じであるから，S行列とかグリーン関数に対する寄与は上の位相変換によって変わらない．すなわち位相 α は自由に選べることになる．そこで $e^{i\alpha}=-i$ と選び，φ と $\bar{\varphi}$ との代りに c と $\bar{c}$ と記すことにすると，(式(3.4.48)参照)

$$c^\dagger=c,\qquad \bar{c}^\dagger=\bar{c}, \tag{3.23}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{FP}}=i\partial_\mu\bar{c}\cdot D_\mu c \tag{3.24}$$

このラグランジアン密度はエルミートになっている．

一般のゲージにおけるラグランジアン密度は

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{\mathrm{inv}}+\mathscr{L}_{\mathrm{GF}}+\mathscr{L}_{\mathrm{FP}} \tag{3.25}$$

ただし，ゲージ場に対する添字を省略して，

$$\mathcal{L}_{\rm inv}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu}, \tag{3.26}$$

$$\mathcal{L}_{\rm GF}=\partial_\mu B\cdot A_\mu+\frac{\alpha}{2}B\cdot B, \quad \text{あるいは} \quad -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2, \tag{3.27}$$

$$\mathcal{L}_{\rm FP}=i\partial_\mu\bar{c}\cdot D_\mu c \tag{3.28}$$

(3.25) の第一項はゲージ不変な項，第二項はゲージ固定項，第三項はゴースト項である．この形は，九後と小嶋 (1978) によって与えられたものである．

4) グリーン関数に対するゲージ変換

前節において異なるゲージ条件で定義されるグリーン関数の間の関係を QED の場合について調べた．ここでは異なる付加項で定義されるグリーン関数の間の関係式について議論しよう．ただしゲージ不変項は共通であり，物理的に同値な理論を二つの異なるゲージで取り扱うことになる．そこで二つのラグランジアン密度，および二つの作用積分を導入する．

$$\mathcal{L}_{\rm II}=\mathcal{L}_{\rm I}+\Delta\mathcal{L}, \quad S_{\rm II}=S_{\rm I}+\Delta S \tag{3.29}$$

そして $A, B, C, \cdots$ という場の演算子を考え，それらを含むグリーン関数を第二のゲージで導入する．

$$\langle ABC\cdots\rangle_{\rm II}=\frac{1}{N_{\rm II}}\int\mathcal{D}A_\mu\cdots ABC\cdots\exp(iS_{\rm II}), \tag{3.30}$$

$$N_{\rm II}=\int\mathcal{D}A_\mu\cdots\exp(iS_{\rm II}) \tag{3.31}$$

そこで (3.29) により，$S_{\rm II}$ を分解し，ΔS を摂動として扱い，$\exp(i\Delta S)$を A, $B, C, \cdots$と同格に扱う．しからば，

$$\begin{aligned}\langle ABC\cdots\rangle_{\rm II}&=\frac{1}{N_{\rm II}}\int\mathcal{D}A_\mu\cdots ABC\cdots\exp(i\Delta S)\exp(iS_{\rm I})\\&=\frac{N_{\rm I}}{N_{\rm II}}\cdot\frac{1}{N_{\rm I}}\int\mathcal{D}A_\mu\cdots ABC\cdots\exp(i\Delta S)\exp(iS_{\rm I})\\&=\frac{N_{\rm I}}{N_{\rm II}}\langle ABC\cdots\exp(i\Delta S)\rangle_{\rm I},\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}\frac{N_{\rm II}}{N_{\rm I}}&=\frac{1}{N_{\rm I}}\int\mathcal{D}A_\mu\cdots\exp(i\Delta S)\exp(iS_{\rm I})\\&=\langle\exp(i\Delta S)\rangle_{\rm I}\end{aligned} \tag{3.33}$$

従って次の公式を得る．

$$\langle ABC\cdots\rangle_{\rm II}=\langle ABC\cdots\exp(i\varDelta S)\rangle_{\rm I}/\langle\exp(i\varDelta S)\rangle_{\rm I} \tag{3.34}$$

これは異なる二つのゲージにおけるグリーン関数の間の関係式を与える．例えば，(3.25) を考えて，$\mathscr{L}_{\rm I}$ を $\alpha=0$ なる Landau ゲージに，$\mathscr{L}_{\rm II}$ を $\alpha\neq0$ なるゲージに選ぶと，Landau ゲージを添字 L で区別すると，

$$\langle ABC\cdots\rangle_{\alpha}=\left\langle ABC\cdots\exp\left(\frac{i\alpha}{2}\int d^4x\boldsymbol{B}(x)\cdot\boldsymbol{B}(x)\right)\right\rangle_L\Big/ \left\langle\exp\left(\frac{i\alpha}{2}\int d^4x\boldsymbol{B}(x)\cdot\boldsymbol{B}(x)\right)\right\rangle_L \tag{3.35}$$

この式は，任意のグリーン関数の α 依存性を示すことになる．なお以上の議論で出てきた演算子は，**くりこまれていないもの**と解釈すべきであろう．なお，添字 L は Landau ゲージでの Heisenberg 表示でこれらのグリーン関数を評価すべきことを意味し，添字 α は $\alpha\neq0$ なるゲージでの Heisenberg 表示でのグリーン関数を表わしているのである．この公式は，種々のグリーン関数のゲージ不変性の議論に基礎を与える．

§4　軸性ゲージ

前節において共変的ゲージにおいて有効ラグランジアン密度を導出し，その結果として Faddeev-Popov のゴーストが必要なことを知った．しかしながら明白な共変性という要求をしなければ，ゴースト無しで量子化し得るゲージが存在する．これが軸性ゲージである．

前節で論じたゲージ条件 (3.1) を次の形で置き換える：

$$n_\mu A_\mu^a=0 \tag{4.1}$$

ただし n_μ は定数ベクトルである．無限小ゲージ変換 (3.2) に対して

$$\delta(n_\mu\cdot A_\mu^a)=\frac{1}{g}n_\mu\partial_\mu\lambda^a+f_{abc}(n_\mu A_\mu^b)\lambda^c \tag{4.2}$$

ところが，(4.1) というゲージ条件下では

$$\delta(n_\mu\cdot A_\mu^a)=\frac{1}{g}n_\mu\partial_\mu\lambda^a \tag{4.3}$$

これは A_μ と全く無関係である．従って，

$$\int\mathscr{D}\Omega\delta[(n_\mu A_\mu^a)^\Omega]$$

は A_μ を含まず，$\varDelta_f[A]$ は定数になってしまう．すなわち，Faddeev-Popov の

ゴースト項は生じないことになる．そこで付加項の方法に従って，

$$\Delta S[A]=-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x(n_\mu A_\mu^a)^2 \tag{4.4}$$

を選び，

$$\varphi[A]\int\mathscr{D}\Omega\exp\{iS[A^\Omega]\}=\text{const} \tag{4.5}$$

とすると，$\varphi[A]$ は再び A_μ を含まない．そこで

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{\text{inv}}-\frac{1}{2\alpha}(n_\mu A_\mu^a)^2 \tag{4.6}$$

という有効ラグランジアン密度を考える．量子化のため二次形式の項のみを残して変分原理を適用すると，

$$D_{\mu\nu}(\partial)A_\nu^a=0 \tag{4.7}$$

ただし，

$$D_{\mu\nu}(\partial)=(\delta_{\mu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\nu)-\frac{1}{\alpha}n_\mu n_\nu \tag{4.8}$$

あるいは，運動量空間で $\partial_\mu\partial_\nu\to-k_\mu k_\nu$ と置き換えれば，

$$D_{\mu\nu}(k)=-k^2\delta_{\mu\nu}+k_\mu k_\nu-\frac{1}{\alpha}n_\mu n_\nu, \tag{4.9}$$

$$\left[\delta_{\mu\lambda}-\frac{n_\mu k_\lambda+n_\lambda k_\mu}{n\cdot k}+\frac{n^2+\alpha k^2}{(n\cdot k)^2}k_\mu k_\lambda\right]D_{\lambda\nu}(k)=-k^2\delta_{\mu\nu} \tag{4.10}$$

従って伝播関数は，

$$\frac{1}{k^2-i\varepsilon}\left[\delta_{\mu\nu}-\frac{n_\mu k_\nu+n_\nu k_\mu}{n\cdot k}+\frac{n^2+\alpha k^2}{(n\cdot k)^2}k_\mu k_\nu\right] \tag{4.11}$$

で与えられることになる．このゲージの問題点は $n\cdot k=0$ という極をどのように取扱うかということと，種々の物理量の計算結果が n の選択に依存しないことを示すことである．

§5 共変的ゲージにおける Feynman の規則

次に (3.25) のラグランジアン密度に対する Feynman の規則を導入する．さて

$$F_{\mu\nu}^a=\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a+g(A_\mu\times A_\nu)^a, \tag{5.1}$$

$$(D_\mu c)^a=\partial_\mu c^a+g(A_\mu\times c)^a \tag{5.2}$$

以後は，ゲージ群の添字に対して，内積と外積の記号を用いる．

$$A\cdot B=\sum_{a}A^{a}B^{a},\qquad (A\times B)^{a}=\sum_{b,c}f_{abc}A^{b}B^{c} \tag{5.3}$$

そこで (3.25) のラグランジアン密度を自由部分 $\mathscr{L}_{\mathrm{f}}$ と相互作用部分 $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}$ とに分けることにする．

$$\mathscr{L}_{\mathrm{f}}=-\frac{1}{4}(\partial_{\mu}A_{\nu}^{a}-\partial_{\nu}A_{\mu}^{a})^{2}-\frac{1}{2\alpha}(\partial_{\mu}A_{\mu}^{a})^{2}+i\partial_{\mu}\bar{c}\cdot\partial_{\mu}c, \tag{5.4}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{int}}=-g\partial_{\mu}A_{\nu}\cdot(A_{\mu}\times A_{\nu})-\frac{1}{4}g^{2}(A_{\mu}\times A_{\nu})\cdot(A_{\mu}\times A_{\nu})+ig\partial_{\mu}\bar{c}\cdot(A_{\mu}\times c) \tag{5.5}$$

Feynman の規則をラグランジアン形式で表わすことにすると，各頂点には $i(2\pi)^{4}$，伝播関数には $-i/(2\pi)^{4}$，そしてゴーストの閉じたループには (-1) という因子を付けることになる．そして伝播関数は，ゲージ粒子をグルーオンとして，

$$\text{グルーオン：}\quad \frac{\delta_{ab}}{k^{2}-i\varepsilon}\left[\delta_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^{2}-i\varepsilon}\right] \tag{5.6}$$

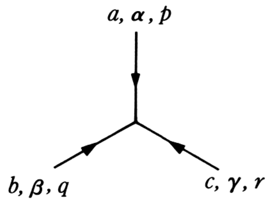
$$\text{ゴースト：}\quad \frac{i\delta_{ab}}{k^{2}-i\varepsilon} \tag{5.7}$$

また頂点関数としては次の三種類が考えられる：

(1) 3-グルーオン頂点　(2) 4-グルーオン頂点，

(3) ゴースト・グルーオン頂点

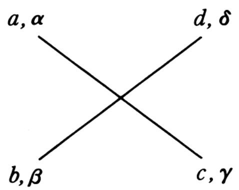
1) 3-グルーオン頂点



グルーオンの運動量をすべて向心的にとると，頂点関数は，

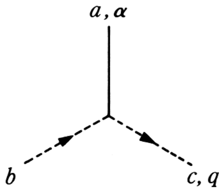
$$-igf_{abc}[\delta_{\beta\gamma}(r-q)_{\alpha}+\delta_{\gamma\alpha}(p-r)_{\beta}+\delta_{\alpha\beta}(q-p)_{\alpha}] \tag{5.8}$$

2) 4-グルーオン頂点



$$\begin{aligned}&-g^{2}f_{gac}f_{gbd}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})\\&-g^{2}f_{gad}f_{gbc}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}-\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta})\\&-g^{2}f_{gab}f_{gcd}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})\end{aligned} \tag{5.9}$$

3)　ゴースト・グルーオン頂点



ゴースト線は $\bar{c}$ から c へ向き，q を向心的運動量として，

$$-gf_{abc}q_{\alpha} \tag{5.10}$$

以上の伝播関数と頂点関数とを組み合わせてS行列要素とかグリーン関数とかを計算することができる．その際に各頂点においては四元運動量が保存されるようにしなければならず，全体の振幅には四元運動量の保存に対応して，

$$\delta^4(P_f - P_i) \tag{5.11}$$

が乗ぜられる．また，四元運動量の保存則から定まらない閉じたループ内の四元運動量 $\boldsymbol{k}_i$ については積分をしなければならない．すなわち，

$$\int d^4\boldsymbol{k}_1 \cdots \int d^4\boldsymbol{k}_l \tag{5.12}$$

ただし l は閉じたループの数である．

第18章　Becchi-Rouet-Stora 変換

ゲージ場と基本的なフェルミ粒子とが相互作用をしている系を考える．この場合にゲージ場とフェルミ場とに対しては局所的ゲージ変換が定義される．しかしながら，この場を量子化するためにはゲージ固定項と Faddeev-Popov のゴースト項を導入しなければならない．その結果として，局所的ゲージ変換に対する不変性は破れてしまう．しかしながら，その代りに新しい大局的不変性が生ずる．これが Becchi，Rouet および Stora (1976) により発見された BRS 変換である．本章においては，この変換の性質について論ずる．

§1　BRS 変換

ゲージ場とフェルミ場とが相互作用をしている系のラグランジアン密度は，

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\mathrm{inv}}+\mathcal{L}_{\mathrm{GF}}+\mathcal{L}_{\mathrm{FP}} \tag{1.1}$$

の如く書けることは，(17.3.25) の場合と同様である．ゲージ固定項とゴースト項に関しては (17.3.27) と (17.3.28) と同じであるが，ゲージ不変項は，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{inv}}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu}-\overline{\psi}(\gamma_\mu D_\mu+m)\psi \tag{1.2}$$

ただしフェルミ場に対する共変微分は

$$D_\mu\psi=(\partial_\mu-igt\cdot A_\mu)\psi=(\partial_\mu-ig\sum_a t_a A_\mu^a)\psi. \tag{1.3}$$

さてゲージ場とかフェルミ場に対しては局所的ゲージ変換が定義されており，このような場を基本場と呼ぶ．基本場に対する無限小ゲージ変換は，無限小ゲージ関数を $\lambda(x)$ とした時に，次式で与えられる：

$$\delta A_\mu^a(x)=\frac{1}{g}(D_\mu\lambda(x))^a,\quad \delta\psi(x)=i(\lambda(x)\cdot t)\psi(x) \tag{1.4}$$

そこで次の置き換えをしたものを BRS 変換と呼ぶ：

$$\lambda^a(x)\to gc^a(x) \tag{1.5}$$

以下ではこの変換も (1.4) と同じく δ で表わしておく．

cは反可換な場であるので，この変換は場の演算子の統計を変えてしまう．そこで基本場のBRS変換は次式で与えられることになる：

$$\delta A_\mu = D_\mu c, \qquad \delta\psi = ig(c\cdot t)\psi, \qquad \delta\overline{\psi} = -ig\overline{\psi}(c\cdot t) \tag{1.6}$$

これから直ちに次式を得る：

$$\delta F_{\mu\nu} = gF_{\mu\nu}\times c, \tag{1.7}$$

$$\delta\mathscr{L}_{\mathrm{inv}} = 0 \tag{1.8}$$

ところで補助場$B, c, \overline{c}$に対しては局所的ゲージ変換は定義されていないので(1.5)の置き換えでBRS変換を定義することはできない．そこでBRS変換を，全ラグランジアン密度(1.1)を不変にするという要請により導入することにしよう．そのために，まず(1.1)から変分原理により導かれる場の方程式を書き下してみよう．

$$D_\mu F_{\mu\nu} + \partial_\nu B - ig\partial_\nu\overline{c}\times c + ig\overline{\psi}\gamma_\nu t\psi = 0, \tag{1.9}$$

$$\partial_\mu A_\mu = \alpha B, \tag{1.10}$$

$$\partial_\mu D_\mu c = D_\mu\partial_\mu\overline{c} = 0 \tag{1.11}$$

(1.10)および(1.11)よりδと∂_μとの可換性を仮定して，

$$\alpha\delta B = \delta(\partial_\mu A_\mu) = \partial_\mu\delta A_\mu = \partial_\mu D_\mu c = 0$$

従って

$$\delta B = 0 \tag{1.12}$$

また(1.11)を書き換えると，

$$0 = \delta(\partial_\mu D_\mu c) = \partial_\mu\delta(D_\mu c) = \partial_\mu\delta^2 A_\mu$$

そこで次のように置いても良いであろう：

$$\delta(D_\mu c) = \delta^2 A_\mu = 0 \tag{1.13}$$

そして最終的に次の要請をおく．(1.8)を考慮して，

$$\delta\mathscr{L} = \delta(\mathscr{L}_{\mathrm{GF}} + \mathscr{L}_{\mathrm{FP}}) = 0. \tag{1.14}$$

さて(1.12)と(1.13)とを考慮すると，

$$\begin{aligned}\delta(\mathscr{L}_{\mathrm{GF}} + \mathscr{L}_{\mathrm{FP}}) &= \delta(\partial_\mu B\cdot A_\mu + i\partial_\mu\overline{c}\cdot D_\mu c)\\ &= \partial_\mu B\cdot D_\mu c + i\partial_\mu(\delta\overline{c})\cdot D_\mu c\\ &= \partial_\mu(B + i\delta\overline{c})\cdot D_\mu c\end{aligned}$$

この式が消えるためには次のように置けば良い：

$$\delta\overline{c} = iB \tag{1.15}$$

最後に，δc を決定するために次の式を考慮する：

$$\delta(D_\mu c)=\delta(\partial_\mu c)+g(D_\mu c)\times c+gA_\mu\times\delta c$$
$$=D_\mu\left(\delta c+\frac{1}{2}gc\times c\right)=0$$

これから

$$\delta c=-\frac{1}{2}gc\times c \tag{1.16}$$

これですべての補助場の BRS 変換が決定されたことになる．

$$\delta B=0,\qquad \delta\bar{c}=iB,\qquad \delta c=-\frac{1}{2}gc\times c \tag{1.17}$$

そして全ラグランジアン密度は，BRS 変換に対して不変である．

§2 BRS 荷電

さて理論が BRS 不変であれば，Noether の定理によりこの不変性に対応する保存量があるはずである．これを BRS 荷電と呼び，Q_B と記すことにし，以下でこの量の表現を求めることにする．まず量子化を行うのに必要な同時刻正準交換関係を与えておこう．ゲージ場の自変数として A_j^a ($j=1,2,3$) と B^a とを用いると，それぞれに共役な場の演算子は，

$$\pi_j^a=iF_{4j}^a,\qquad \pi_B^a=A_0^a=-iA_4^a \tag{2.1}$$

により与えられる．従って $x_0=y_0$ に対しては，

$$[A_4^a(x),B^b(y)]=\delta_{ab}\delta^3(x-y),\quad [A_j^a(x),F_{4k}^b(y)]=\delta_{ab}\delta_{jk}\delta^3(x-y) \tag{2.2}$$

またゴースト場に対しても $x_0=y_0$ の時に，

$$\{c^a(x),\dot{\bar{c}}^b(y)\}=-\delta_{ab}\,\delta^3(x-y),\quad \{D_4c^a(x),\ \bar{c}^b(y)\}=-i\delta_{ab}\delta^3(x-y) \tag{2.3}$$

次に Noether の流れを作る．

$$J_\mu^B=\sum_\alpha\delta\varphi_\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{\alpha:\mu}}=-D_\nu c\cdot F_{\mu\nu}-ig\bar{\psi}\gamma_\mu(c\cdot t)\psi-B\cdot D_\mu c+\frac{i}{2}g\partial_\mu\bar{c}\cdot(c\times c)$$
$$=-\partial_\nu(F_{\mu\nu}\cdot c)-B\cdot D_\mu c+\partial_\mu B\cdot c-\frac{i}{2}g\partial_\mu\bar{c}\cdot(c\times c) \tag{2.4}$$

この流れは保存量であり，その時間成分の空間積分が Q_B である．

$$\partial_\mu J_\mu^B=0, \tag{2.5}$$

$$Q_B=\int d^3xJ_0^B=\int d^3x\left(B\cdot\dot{c}-\dot{B}\cdot c-gB\cdot(A_0\times c)+\frac{i}{2}g\dot{\bar{c}}\cdot(c\times c)\right) \tag{2.6}$$

しからばBRS変換は次の形に書ける：

$$\delta\phi=i[Q_B,\phi]_{\mp} \tag{2.7}$$

ただし ϕ が c と $\bar{c}$ について偶数次ならば(−)，奇数次ならば(+)を採る．

また次の式は容易に確かめられる：

$$\delta\left(-B\cdot D_\mu c+\partial_\mu B\cdot c-\frac{i}{2}g\partial_\mu\bar{c}\cdot(c\times c)\right)=0 \tag{2.8}$$

従って

$$\delta Q_B=\int d^3x\delta J_0^B=0 \tag{2.9}$$

すなわち，

$$\delta Q_B=i\{Q_B,Q_B\}=2iQ_B{}^2=0$$

これは Q_B の巾零性を示している．

$$Q_B{}^2=0 \tag{2.10}$$

これが BRS 荷電の最も著しい特徴である．この性質は BRS 変換自身も持っている．すなわち (2.10) を用いると，

$$\begin{aligned}\delta^2\phi&=-\{Q_B,[Q_B,\phi]\}=0, &&\phi\text{ が }c,\bar{c}\text{ について偶数次}\\ &=-[Q_B,\{Q_B,\phi\}]=0, &&\phi\text{ が }c,\bar{c}\text{ について奇数次}\end{aligned} \tag{2.11}$$

従ってBRS変換自身も巾零性 (nilpotency) を持っていることになる．

さてゴースト場はゴースト項にしか出現せず，かつこの項はスケール変換

$$c\to e^{\lambda}c,\qquad \bar{c}\to e^{-\lambda}\bar{c} \tag{2.12}$$

に対して不変である．c も $\bar{c}$ もエルミートなので位相変換は導入できない．この変換に対応する Noether の流れは，

$$J_\mu^c=\left(c\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_{:\mu}}-\bar{c}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{c}_{:\mu}}\right)=i(\partial_\mu\bar{c}\cdot c-\bar{c}\cdot D_\mu c), \tag{2.13}$$

$$\partial_\mu J_\mu^c=0 \tag{2.14}$$

そこで Q_c という保存量を導入する．

$$Q_c=\int d^3xJ_0^c=i\int d^3x(\bar{c}\cdot\dot{c}-\dot{\bar{c}}\cdot c-g\bar{c}\cdot(A_0\times c)) \tag{2.15}$$

この量は次の交換関係を満たす：

$$i[Q_c,c(x)]=c(x),\qquad i[Q_c,\bar{c}(x)]=-\bar{c}(x) \tag{2.16}$$

そして Q_c は他のすべての場と可換である．従って一般に

$$i[Q_c, \phi]=N\phi \tag{2.17}$$

ただし Nは，ϕ の中に因子として含まれる c の数から $\bar{c}$ の数を減じたものであり，Nを ϕ のゴースト数と呼ぶ．また Q_B も Q_c もエルミートである．

$$Q_B^\dagger=Q_B, \qquad Q_c^\dagger=Q_c \tag{2.18}$$

また Q_B の構造（2.6）からそのゴースト数は1であり，従って（2.17）より

$$i[Q_c, Q_B]=Q_B \tag{2.19}$$

(2.10) と（2.19）とを併せて BRS 代数と呼ぶ．これは交換関係と反交換関係とが共存しているので Lie 代数ではなく，graded Lie algebra と呼ばれる．

§3　もう一つの BRS 変換

BRS 変換は無限小ゲージ関数をゴースト場 c に置き換えることにより得られる．このことは（1.5）式の示す通りである．それでは，もしも無限小ゲージ関数を $\bar{c}$ で置き換えたらどうであろうか？　この問題は Curci と Ferrari (1976)，小嶋（1980)，Bonora と Tonin (1981) などによって調べられた．そこでこのような変換を $\bar{\delta}$ と記すことにすると，基本場に対して

$$\bar{\delta}A_\mu=D_\mu\bar{c}, \qquad \bar{\delta}\psi=ig(\bar{c}\cdot t)\psi, \qquad \bar{\delta}\bar{\psi}=-ig\bar{\psi}(\bar{c}\cdot t) \tag{3.1}$$

この変換が，ゲージ不変項を不変に保つことは δ の場合と全く同様である．そこで補助場の変換を定めるために次の恒等式に注意する：

$$i\partial_\mu\bar{c}\cdot D_\mu c+\partial_\mu B\cdot A_\mu=iD_\mu\bar{c}\cdot\partial_\mu c-\partial_\mu\bar{B}\cdot A_\mu \tag{3.2}$$

ただし $\bar{B}$ は次式で定義される：

$$B+\bar{B}-igc\times\bar{c}=0 \tag{3.3}$$

しからば，補助場の変換は次式で与えられることが容易に示される：

$$\bar{\delta}\bar{B}=0, \qquad \bar{\delta}c=i\bar{B}, \qquad \bar{\delta}\bar{c}=-\frac{1}{2}g\bar{c}\times\bar{c} \tag{3.4}$$

この変換に対応する BRS 荷電を $\bar{Q}_B$ と書くと，前節に述べた BRS 代数は次のように拡張される：

$$Q_B{}^2=\bar{Q}_B{}^2=Q_B\bar{Q}_B+\bar{Q}_BQ_B=0, \tag{3.5}$$

$$i[Q_c, Q_B]=Q_B, \qquad i[Q_c, \bar{Q}_B]=-\bar{Q}_B \tag{3.6}$$

また（3.5）から次の式を得る：

$$\delta^2=\bar{\delta}^2=\bar{\delta}\delta+\bar{\delta}\delta=0 \tag{3.7}$$

特に最後の式は次の恒等式より得られる:

$$\{Q_B, [\overline{Q}_B, \phi]\} + \{\overline{Q}_B, [Q_B, \phi]\} = [\{Q_B, \overline{Q}_B\}, \phi],$$

ϕ が $c, \bar{c}$ について偶数次

$$[Q_B, \{\overline{Q}_B, \phi\}] + [\overline{Q}_B, \{Q_B, \phi\}] = [\{Q_B, \overline{Q}_B\}, \phi], \tag{3.8}$$

ϕ が $c, \bar{c}$ について奇数次

なおこの外に大局的ゲージ変換，すなわちゲージ関数が定数の場合，に対する不変性が自発的に破れていないならば，次のようなカラー荷電 Q^a が保存される:

$$J_\mu = -A_\nu \times F_{\mu\nu} - A_\mu \times B + i\overline{\psi}\gamma_\mu t\psi + i(\bar{c} \times D_\mu c) - i(\partial_\mu \bar{c} \times c), \tag{3.9}$$

$$Q^a = \int d^3x J_0^a \tag{3.10}$$

この J_μ は次式の意味で，ゲージ場の源となっている:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = -gJ_\nu + i\delta\bar{\delta}A_\nu \tag{3.11}$$

そして Q^a は次のような交換関係を満たしている:

$$[\psi(x), Q^a] = t^a \psi(x), \cdots \tag{3.12}$$

$$[Q^a, Q^b] = if_{abc}Q^c \tag{3.13}$$

さて $Q_B, \overline{Q}_B, Q_c$ はいずれもカラーを持たないので Q^a と可換である.

$$[Q^a, Q_B] = [Q^a, \overline{Q}_B] = [Q^a, Q_c] = 0 \tag{3.14}$$

換言すれば，カラー荷電はBRS不変量である.

$$\delta Q^a = \bar{\delta} Q^a = 0 \tag{3.15}$$

§4　BRS恒等式と Slavnov-Taylor の恒等式

ゲージ場を含む系に対して対称性が自発的に破れている場合でもBRS不変性は破れないと考えられている．すなわち Q^a などの保存則が破れても Q_B の保存則は成立していると考えられている．その根拠は，後に示すようにS行列のユニタリー性はBRS不変性に基づいているからである．その結果，真空 $|\mathbf{0}\rangle$ に対して次式が成り立つ:

$$Q_B |\mathbf{0}\rangle = 0 \tag{4.1}$$

この結果として，任意の場の演算子 $\boldsymbol{O}_1(x_1), \cdots, \boldsymbol{O}_n(x_n)$ に対して

$$\langle \mathbf{0} | \delta T[\boldsymbol{O}_1(x_1) \cdots \boldsymbol{O}_n(x_n)] | 0 \rangle = 0 \tag{4.2}$$

これを BRS 恒等式と呼ぶ．以下においてその応用例を挙げよう．今後は

$$\langle 0|T[\boldsymbol{O}_1(x_1)\cdots\boldsymbol{O}_n(x_n)]|0\rangle=\langle\boldsymbol{O}_1(x_1)\cdots\boldsymbol{O}_n(x_n)\rangle$$

という記号を導入することにする．

演算子の組 $\boldsymbol{O}_1(x_1),\cdots,\boldsymbol{O}_n(x_n)$ および $\boldsymbol{O}(x)$ に対して

$$\delta\boldsymbol{O}_1(x_1)=\cdots=\delta\boldsymbol{O}_n(x_n)=0,\qquad \boldsymbol{O}(x)=\delta\boldsymbol{P}(x) \tag{4.3}$$

が成り立つならば，(4.2) により

$$\langle\boldsymbol{O}(x)\boldsymbol{O}_1(x_1)\cdots\boldsymbol{O}_n(x_n)\rangle=0 \tag{4.4}$$

そこで (17.3.35) について考えてみよう．くりこまれていない Landau ゲージで，

$$\delta\boldsymbol{B}(x)=0,\qquad \boldsymbol{B}(x)=-i\delta\bar{\boldsymbol{c}}(x) \tag{4.5}$$

により，任意の個数の $\boldsymbol{B}$ を含むグリーン関数が消えることになり，

$$\left\langle\exp\left(\frac{i\alpha}{2}\int d^4x\boldsymbol{B}(x)\cdot\boldsymbol{B}(x)\right)\right\rangle_L=1 \tag{4.6}$$

更に (17.3.35) において

$$\delta\boldsymbol{A}=\delta\boldsymbol{B}=\delta\boldsymbol{C}=\cdots=0 \tag{4.7}$$

であれば，**くりこまれていないグリーン関数**に対して

$$\langle\boldsymbol{ABC}\cdots\rangle_\alpha=\langle\boldsymbol{ABC}\cdots\rangle_L \tag{4.8}$$

すなわち，BRS 不変量のくりこまれていないグリーン関数は，くりこまれていないゲージ・パラメター α によらない．この結果は更に一般化される．

第 17 章 §3 で考えたように，ゲージ不変項を共有するラグランジアン密度のクラスを考える．もしもこのクラスに属する任意の二つのラグランジアン密度の差が，ある演算子の BRS 変換として書けるとする．

$$\varDelta\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\rm II}-\mathcal{L}_{\rm I}=\delta\mathcal{M}, \tag{4.9}$$

$$\varDelta S=S_{\rm II}-S_{\rm I}=\delta\int d^4x\mathcal{M} \tag{4.10}$$

この時には再び (17.3.34) において

$$\langle\exp(i\varDelta S)\rangle_{\rm I}=1 \tag{4.11}$$

かつ (4.7) が満たされていれば，くりこまれていないグリーン関数に対して，

$$\langle\boldsymbol{ABC}\cdots\rangle_{\rm II}=\langle\boldsymbol{ABC}\cdots\rangle_{\rm I} \tag{4.12}$$

この結果は大切である．後に述べるようにS行列のような観測可能量を LSZ の簡約公式で計算する時には BRS 不変量のグリーン関数から出発する．そし

てその規格化は (10.6.7) のようなくりこみ条件で決めるので結果としては, (4.10) の条件を満たすクラス内ではS行列がゲージの選び方に依らないことになる.

その他の応用としては,

$$-i\delta T[A_\mu^a(x), \bar{c}^b(y)] = T[A_\mu^a(x), B^b(y)] - iT[D_\mu c^a(x), \bar{c}^b(y)] \tag{4.13}$$

から BRS 恒等式として次式を得る:

$$\langle \boldsymbol{A}_\mu^a(x), \boldsymbol{B}^b(y)\rangle = i\langle D_\mu \boldsymbol{c}^a(x), \bar{\boldsymbol{c}}^b(y)\rangle \tag{4.14}$$

この式の四元発散は, 場の方程式と正準交換関係を用いると, 直ちに $-i\delta_{ab}\delta^4(x-y)$ に等しいことが分かり, 第14章§1の議論を繰り返すと,

$$\langle \boldsymbol{A}_\mu^a(x), \boldsymbol{B}^b(y)\rangle = -\delta_{ab}\partial_\mu D_F(x-y) \tag{4.15}$$

を得る. この式はくりこまれた形式でもくりこまれていない形式でも同じ形になるので重要である.

BRS 恒等式から出発してグリーン関数の間に成り立つ一組の関係式を導き出すことができる. これは QED における Ward- 高橋の恒等式に相当し, QCD では Slavnov-Taylor の恒等式と呼ばれる. まず外場を導入する.

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = & J_\mu\cdot \boldsymbol{A}_\mu + \bar{J}_\alpha\cdot\boldsymbol{\psi}_\alpha + J_\alpha\cdot\bar{\boldsymbol{\psi}}_\alpha + \bar{J}_c\cdot \boldsymbol{c} + J_{\bar{c}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}} + J_B\cdot \boldsymbol{B}\\ & + K_\mu\cdot\delta \boldsymbol{A}_\mu + \bar{K}_\alpha\cdot\delta\boldsymbol{\psi}_\alpha + K_\alpha\cdot\delta\bar{\boldsymbol{\psi}}_\alpha + K_c\cdot\delta \boldsymbol{c}\end{aligned} \tag{4.16}$$

$\delta\bar{\boldsymbol{c}}$ は $i\boldsymbol{B}$ に等しいので (4.16) には既に入っている. $\mathcal{S}$ をボゾン的とすると, $J_\alpha, \bar{J}_\alpha, K_\alpha, \bar{K}_\alpha$ はフェルミ場と反可換, $\bar{J}_c, J_{\bar{c}}, K_\mu, K_\alpha, \bar{K}_\alpha$ はゴースト場と反可換な外場となる. これらは反可換な外場と考えられる. そこで,

$$\exp(-iW) = \langle \boldsymbol{0}|T\exp\left(-i\int d^4x\mathcal{S}(x)\right)|\boldsymbol{0}\rangle. \tag{4.17}$$

さてこの場合の BRS 恒等式は

$$\langle \boldsymbol{0}|T\left[\int d^4x\,\delta\mathcal{S}(x),\ \exp\left(-i\int d^4y\mathcal{S}(y)\right)\right]|\boldsymbol{0}\rangle = 0 \tag{4.18}$$

そこで次の記号を導入する:

$$\begin{aligned}\langle O(x)\rangle \equiv & \langle \boldsymbol{0}|T\left[\boldsymbol{O}(x),\ \exp\left(-i\int d^4y\mathcal{S}(y)\right)\right]|\boldsymbol{0}\rangle\\ & \Big/ \langle \boldsymbol{0}|T\exp\left(-i\int d^4y\mathcal{S}(y)\right)|\boldsymbol{0}\rangle\end{aligned} \tag{4.19}$$

そこで BRS 変換の巾零性と, $\bar{J}_c, J_{\bar{c}}$ が Q_B と反可換であることを使うと,

$$\langle\delta\mathcal{S}\rangle = J_\mu\langle\delta A_\mu\rangle + \bar{J}_\alpha\langle\delta\psi_\alpha\rangle + J_\alpha\langle\delta\bar{\psi}_\alpha\rangle - \bar{J}_c\langle\delta c\rangle - J_{\bar{c}}\langle\delta\bar{c}\rangle = 0 \tag{4.20}$$

さて反可換な外場について左から微分すると，

$$\frac{\delta W}{\delta J_\mu}=\langle A_\mu\rangle,\qquad \frac{\delta W}{\delta \bar{J}_\alpha}=\langle \psi_\alpha\rangle,\qquad \frac{\delta W}{\delta J_\alpha}=\langle \bar{\psi}_\alpha\rangle,$$
$$\frac{\delta W}{\delta J_B}=\langle B\rangle,\qquad \frac{\delta W}{\delta \bar{J}_c}=\langle c\rangle,\qquad \frac{\delta W}{\delta J_{\bar{c}}}=\langle \bar{c}\rangle \tag{4.21}$$

次に J, K の代りに $\langle\varphi\rangle, K$ を自変数にするために次の Legendre 変換を導入する：

$$\Gamma=W-J_\mu\cdot\langle A_\mu\rangle-\bar{J}_\alpha\cdot\langle\psi_\alpha\rangle-J_\alpha\cdot\langle\bar{\psi}_\alpha\rangle-\bar{J}_c\cdot\langle c\rangle-J_{\bar{c}}\cdot\langle\bar{c}\rangle-J_B\cdot\langle B\rangle \tag{4.22}$$

この左微分をとると，

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\phi\rangle}=-J_\phi\quad(\phi=A_\mu, B)\ ;\qquad \frac{\partial\Gamma}{\delta\langle\phi\rangle}=J_\phi\quad(\phi=c,\bar{c},\psi_\alpha,\bar{\psi}_\alpha) \tag{4.23}$$

また K についての微分は，

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta K}=\frac{\delta W}{\delta K} \tag{4.24}$$

これから

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta K_\mu}=\langle\delta A_\mu\rangle,\qquad \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{K}_\alpha}=\langle\delta\psi_\alpha\rangle,\qquad \frac{\delta\Gamma}{\delta K_\alpha}=\langle\delta\bar{\psi}_\alpha\rangle,\qquad \frac{\delta\Gamma}{\delta K_c}=\langle\delta c\rangle \tag{4.25}$$

であり，$\langle\delta\bar{c}\rangle$ については Γ の微分ではなくて

$$\langle\delta\bar{c}\rangle=i\langle B\rangle \tag{4.26}$$

により与えられる．(4.20) を Γ を用いて表わすと，

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle A_\mu\rangle}\langle\delta A_\mu\rangle-\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\psi_\alpha\rangle}\langle\delta\psi_\alpha\rangle-\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\bar{\psi}_\alpha\rangle}\langle\delta\bar{\psi}_\alpha\rangle+\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle c\rangle}\langle\delta c\rangle+\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\bar{c}\rangle}\langle\delta\bar{c}\rangle\\
&=\langle\delta A_\mu\rangle\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle A_\mu\rangle}+\langle\delta\psi_\alpha\rangle\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\psi_\alpha\rangle}+\langle\delta\bar{\psi}_\alpha\rangle\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\bar{\psi}_\alpha\rangle}+\langle\delta c\rangle\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle c\rangle}+\langle\delta\bar{c}\rangle\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\bar{c}\rangle}\\
&=\frac{\delta\Gamma}{\delta K_\mu}\cdot\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle A_\mu\rangle}+\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{K}_\alpha}\cdot\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\psi_\alpha\rangle}+\frac{\delta\Gamma}{\delta K_\alpha}\cdot\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\bar{\psi}_\alpha\rangle}+\frac{\delta\Gamma}{\delta K_c}\cdot\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle c\rangle}+i\langle B\rangle\cdot\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\bar{c}\rangle}\\
&=0
\end{aligned} \tag{4.27}$$

この関係式を Slavnov-Taylor の恒等式と呼ぶ．

また外場のある時の場の方程式より

$$-J_B=\partial_\mu\langle A_\mu\rangle-\alpha\langle B\rangle,\qquad J_{\bar{c}}=i\partial_\mu\langle D_\mu c\rangle \tag{4.28}$$

これは外場のある時の Γ に対する次の拘束条件を与える：

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle B\rangle}=\partial_\mu\langle A_\mu\rangle-\alpha\langle B\rangle,\qquad i\partial_\mu\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta K_\mu}\right)=\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\bar{c}\rangle}\tag{4.29}$$

もしも B を使わなければ，$\langle B\rangle$ を次のように置き換えれば良い:

$$\langle B\rangle\to\frac{1}{\alpha}\partial_\mu\langle A_\mu\rangle\tag{4.30}$$

これは初めから $J_B=0$ と置くことに相当する．(4.27) を外場で微分し，外場を 0 と置けば，グリーン関数の間の多くの恒等式を得る．

§5　BRS 代数の表現

ゲージ理論の量子化を完成させ，その構造を知るためには BRS 代数の表現を知ることが大切である．まず $\overline{Q}_B$ を除いた代数:

$$i[Q_c,Q_B]=Q_B,\qquad Q_B{}^2=0\tag{5.1}$$

の表現を調べよう．ただし抽象的な表現ではなくてゲージ理論で実現されるもののみに限定する．Q_c も Q_B も共にエルミート演算子であることは既に述べたところであり，これが表現を求めるための鍵となる．

まずゲージ理論におけるすべての演算子は

$$i[Q_c,\phi]=N\phi\tag{5.2}$$

を満たすような演算子の和に分解することができる．ところで状態 $\phi|0\rangle$ は

$$iQ_c\phi|0\rangle=N\phi|0\rangle\qquad(N\text{ は整数})\tag{5.3}$$

ただし真空 $|0\rangle$ は Q_c によって消されると仮定する:

$$Q_c|0\rangle=0\tag{5.4}$$

(5.3) 式は，エルミート演算子 Q_c のすべての固有値が純虚数であることを示している．またエルミート演算子 Q_B も自乗すると 0 になる．これらの事実は，いずれも不定計量の導入が不可避であることを示している．このことについては第 4 章の議論を参照していただきたい．以下では第 4 章の結果を用いる．

この代数の表現問題で大切なことは，演算子 Q_B, Q_c の表現行列と同時に計量行列 η も求めなければならないことである．

Q_B と iQ_c の表現行列を，それぞれ q, n と書くことにすると，Q_B と Q_c のエルミート性の条件は次のように書ける．(4.2.18) より，

$$\eta q=q^{+}\eta,\qquad \eta n=-n^{+}\eta\tag{5.5}$$

そして BRS 代数の表現は，

$$[n, q]=q, \qquad q^2=0 \tag{5.6}$$

そこで n を対角形にする表現を採用する．これは状態ベクトル空間 $\mathcal{V}$ の基底として (5.3) 式を満たすようなものを選ぶことに相当する．従って

$$n^{\dagger}=n \tag{5.7}$$

この n の対角要素は整数であることは既に述べたところである．(5.5) によれば，n は η と反可換である．従って $\mathcal{V}$ を n の固有値 N により分解して，

$$\mathcal{V}=\sum_{N=-\infty}^{\infty}\oplus\mathcal{V}^{(N)}, \tag{5.8}$$

$$\mathcal{V}^{(N)}=\{|x\rangle\,|\,(iQ_c-N)|x\rangle=0,\ |x\rangle\in\mathcal{V}\} \tag{5.9}$$

n と η とが反可換であるということは，あるベクトルに η という行列を作用させると，$\mathcal{V}^{(N)}$ が $\mathcal{V}^{(-N)}$ に変わることを意味する．

$$\eta\mathcal{V}^{(N)}=\mathcal{V}^{(-N)} \tag{5.10}$$

ただし行列をベクトルに作用させるということは，次のように定義される．

$\{|e_j\rangle\}$ を基底ベクトルの組とした時に，任意のベクトル $|x\rangle$ は次のように表現される：

$$|x\rangle=\sum_j x_j|e_j\rangle \tag{5.11}$$

この時に η を乗ずるということは，次のことを意味する：

$$\eta|x\rangle=\sum_{j,k}\eta_{jk}x_k|e_j\rangle \tag{5.12}$$

更に η としては，第 4 章で述べた標準形に選ぶ．すなわち，

$$\eta^2=1. \tag{5.13}$$

次に表現行列 q を求めなければならない．そのためにまず九後と小嶋によって与えられた BRS 一重項と BRS 二重項との定義を与え，それをもっと精密化することにしよう．

1)　BRS 一重項

$|f\rangle$ というベクトルが，$|f\rangle=Q_B|g\rangle$ という形に書けず，かつ

$$Q_B|f\rangle=0 \tag{5.14}$$

を満たす時に，$|f\rangle$ を BRS 一重項と呼ぶ．

2)　BRS 二重項

$|f\rangle, |g\rangle$ というベクトルがあって，

$$|f\rangle=Q_B|g\rangle\neq 0, \quad 従って \quad Q_B|f\rangle=0 \tag{5.15}$$

という関係を満たす時に，$|f\rangle$ と $|g\rangle$ とは BRS 二重項をなすと言う．また $|g\rangle$ を親ベクトル(親状態)，$|f\rangle$ を子ベクトル（子状態）と呼ぶ．

以上の定義の欠点は，一意性の欠除である．一重項，二重項の親と子の状態をそれぞれ $|s\rangle$，$|p\rangle$，$|d\rangle$ とした時に，$|s\rangle+|d\rangle$ も 1) の条件を満たし，$|p\rangle+|s\rangle$ も 2) の親の条件を満たすことである．これらを与えられた表現内で一意的に定義するには計量行列 η を利用する．

次のような二つの部分空間を定義しよう：

$$\mathcal{V}_d=q\mathcal{V}=\{q|x\rangle\,|\,|x\rangle\in\mathcal{V}\}, \tag{5.16}$$

$$\mathcal{V}_p=q^{\dagger}\mathcal{V}=\{q^{\dagger}|x\rangle\,|\,|x\rangle\in\mathcal{V}\} \tag{5.17}$$

まず $Q_B|x\rangle=q|x\rangle$ であるが，Q_B は一重項と子の状態を消すので，$\mathcal{V}_d$ はすべての子状態を尽くすはずであり，その意味で子状態の集合ということになる．そこで $\mathcal{V}_d$ の任意のベクトル $|y\rangle$ を考えると，必ず次の形に書ける：

$$\mathcal{V}_d\ni|y\rangle=Q_B|x\rangle \tag{5.18}$$

さて $|\tilde{y}\rangle=\eta|y\rangle$ を導入すると，η の定義から

$$\langle x|Q_B|\tilde{y}\rangle=\langle y|\tilde{y}\rangle=\sum_{j,k,l}y_j^*\eta_{jk}\eta_{kl}y_l=\sum_j|y_j|^2\neq0 \tag{5.19}$$

ただし（5.13）式を用いた．これから

$$Q_B|\tilde{y}\rangle=q|\tilde{y}\rangle\neq0 \tag{5.20}$$

これは $\eta|y\rangle$ が親ベクトルであることを示している．実際，

$$\eta\mathcal{V}_d=\eta q\mathcal{V}=q^{\dagger}\eta\mathcal{V}=q^{\dagger}\mathcal{V}=\mathcal{V}_p \tag{5.21}$$

ただし η が非縮退であることを意味する次の関係式を用いている：

$$\eta\mathcal{V}=\mathcal{V} \tag{5.22}$$

これで $\mathcal{V}_p$ が親状態の集りであることが分かった．あるいは(5.16)と(5.17)とが子状態と親状態を定義していると考えることもできるし，あるいは(5.21)により親状態は子状態から η を作用させて生み出されると考えることもできる．

また η が標準形であれば，(5.21) から

$$\eta\mathcal{V}_p=\mathcal{V}_d \tag{5.23}$$

次に $\mathcal{V}$ を三つの部分空間の直和に分解する．$\mathcal{V}_S$ を一重項の集りとして，

$$\mathcal{V}=\mathcal{V}_S\oplus\mathcal{V}_p\oplus\mathcal{V}_d \tag{5.24}$$

しからば（5.21)，（5.22)，（5.23）から

$$\eta\mathcal{V}_S=\mathcal{V}_S \tag{5.25}$$

これは一重項状態と二重項状態とが直交することを意味し，η の構造は，

$$\eta = \begin{array}{c|c|c|c} & S & p & d \\ \hline & \blacksquare & 0 & 0 & S \\ \hline & 0 & 0 & \blacksquare & p \\ \hline & 0 & \blacksquare & 0 & d \end{array} \qquad \text{影部分は非縮退行列} \tag{5.26}$$

これから分かることは，$\mathcal{V}_p$ に属する親ベクトルも $\mathcal{V}_d$ に属する子ベクトルもノルムが0となることである．内積が生き残るのは親ベクトルと子ベクトルの間か，あるいは一重項同士の間のみである．

さて Q_B は一重項を消すから，$\{0\}$ をゼロベクトルのみからなる集合として，

$$q\mathcal{V}_S = \{0\} \tag{5.27}$$

しからば

$$q^\dagger\mathcal{V}_S = q^\dagger\eta\mathcal{V}_S = \eta q\mathcal{V}_S = \{0\} \tag{5.28}$$

従って一重項状態は，q と $q^\dagger$ のいずれによっても消されることになる．また q も $q^\dagger$ も自乗すると消えるから，

$$q\mathcal{V}_d = q^\dagger\mathcal{V}_p = \{0\} \tag{5.29}$$

従って，

$$q\mathcal{V}_p = q\mathcal{V}_p \oplus q\mathcal{V}_d \oplus q\mathcal{V}_S = q\mathcal{V} = \mathcal{V}_d, \tag{5.30}$$

$$q^\dagger\mathcal{V}_d = q^\dagger\mathcal{V}_d \oplus q^\dagger\mathcal{V}_p \oplus q^\dagger\mathcal{V}_S = q^\dagger\mathcal{V} = \mathcal{V}_p \tag{5.31}$$

これらの関係は q の表現行列を定めるのに用いられる．次にゴースト数 N を導入して

$$\mathcal{V}_p^{(N)} = \mathcal{V}_p \cap \mathcal{V}^{(N)} \tag{5.32}$$

のような部分空間を導入する．しからば n と q との交換関係より，

$$q\mathcal{V}_p^{(N)} = \mathcal{V}_d^{(N+1)} \tag{5.33}$$

また η に対しては，

$$\eta\mathcal{V}_p^{(N)} = \mathcal{V}_d^{(-N)}, \qquad \eta\mathcal{V}_d^{(N+1)} = \mathcal{V}_p^{(-N-1)} \tag{5.34}$$

これらの関係式と q に対する条件 (5.5) とを考慮すると，n を対角化した表示で

$$q=\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & h & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & h^{\dagger} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} (N+1,d) \\ (N,p) \\ (-N,d) \\ (-N-1,p) \end{array} \tag{5.35}$$

（列：$(N+1,d)$　(N,p)　$(-N,d)$　$(-N-1,p)$）

ただし $h, h^{\dagger}$ は非縮退行列である．それぞれの部分空間内で適当に基底を選べば，最終的に二重項空間内での既約表示は次の形になる．

$$\eta=\left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \end{array}\right),\quad n=\left(\begin{array}{cc|cc} N+1 & 0 & & \\ 0 & N & & \\ \hline & & -N & 0 \\ & & 0 & -N-1 \end{array}\right),$$

$$q=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & a & & \\ 0 & 0 & & \\ \hline & & 0 & a \\ & & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{5.36}$$

ただし a は実数であるが，(5.6) 式のみでは決まらない．またブランクは零行列．

かくして 4 個の状態がこの表現の基礎となるということは，九後と小嶋による四重項表現と一致する．以上は BRS 二重項に対する表現であったが，一重項に対しては次のように二種類の表現が得られる．

$N\neq 0$：

$$n=\begin{pmatrix} N & \\ & -N \end{pmatrix},\qquad \eta=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\qquad q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.37}$$

$N=0$：

$$n=(0),\quad \eta=(\pm 1),\quad q=(0) \tag{5.38}$$

以下においてゲージ理論を定式化する際には，次の要請を導入する：

要請　BRS 一重項の部分空間 $\mathcal{V}_S$ は，正定値計量に属する．

この仮定を受け入れるならば，ゲージ理論における BRS 一重項の表現は，

$$n=(0),\quad \eta=(1),\quad q=(0) \tag{5.39}$$

に限られることになる．

§6 S行列のユニタリー性

ゲージ理論は不定計量に属する場を多く含むので，これらをどのようにしてS行列から消去するかが問題である．ここでは九後－小嶋の方法に基づいてこの問題を議論してみよう．九後と小嶋は物理的状態空間$\mathcal{V}_{\text{phys}}$を次のようにして定義した：

$$\mathcal{V}_{\text{phys}}=\{|x\rangle \mid Q_B|x\rangle=0, |x\rangle\in\mathcal{V}\} \tag{6.1}$$

しからば前節の議論から明らかなように，

$$\mathcal{V}_{\text{phys}}=\mathcal{V}_S\oplus\mathcal{V}_d \tag{6.2}$$

そこでηの構造から明らかなように，$|f\rangle$と$|g\rangle$とが$\mathcal{V}_{\text{phys}}$に属するならば，

$$\langle f|g\rangle=\langle f|P(\mathcal{V}_S)|g\rangle \tag{6.3}$$

ただし$P(\mathcal{V}_S)$はBRS一重項部分空間$\mathcal{V}_S$への射影演算子である．

次にQ_Bは保存量であるからS行列と可換である．すなわち，

$$[Q_B, S]=0 \tag{6.4}$$

そこで$|f\rangle$と$|g\rangle$とが$\mathcal{V}_S$に属するならば，

$$Q_BS|f\rangle=0, \qquad Q_BS|g\rangle=0 \tag{6.5}$$

従って

$$S|f\rangle, S|g\rangle\in\mathcal{V}_{\text{phys}} \tag{6.6}$$

そこでユニタリー性条件を（6.3）式を用いて変形すると，

$$\langle f|g\rangle=\langle f|S^{\dagger}S|g\rangle=\langle f|S^{\dagger}P(\mathcal{V}_S)S|g\rangle \tag{6.7}$$

すなわち，S行列のユニタリー性条件が，正定値計量に属する$\mathcal{V}_S$の状態のみを用いて表現されることになり，BRS二重状態は完全に消去される．

上の議論はQEDにも適用される．QEDに対しても（1.1）の形のラグランジアン密度を用いることにする．この場合にゲージ群はU(1)であるので，構造定数fは0になってしまう．そこでゴースト部分は

$$\mathcal{L}_{\text{FP}}=i\partial_\mu\bar{c}\cdot\partial_\mu c \tag{6.8}$$

となり，ゴースト場は自由場になってしまう．

$$\Box c=\Box\bar{c}=0 \tag{6.9}$$

更に今までのQEDになかったゴースト場を消去するために，物理的状態を

$$c^{(+)}(x)|\text{phys}\rangle=\bar{c}^{(+)}(x)|\text{phys}\rangle=0 \tag{6.10}$$

で制限した上で更にQ_Bを用いて定義することにする．

$$Q_B|\mathrm{phys}\rangle=0 \tag{6.11}$$

そこで (6.10) と (6.11) との間の無矛盾性が問題となる．まずQEDでは

$$\{Q_B, c^{(+)}(x)\}=0, \qquad \{Q_B, \bar{c}^{(+)}(x)\}=B^{(+)}(x) \tag{6.12}$$

であるので (6.11) は

$$B^{(+)}(x)|\mathrm{phys}\rangle=0 \tag{6.13}$$

という条件を要求することになるが，これはまさに第4章§4に導入された Lorentz 条件である．Q_B は $B^{(+)}(x)$ と可換であるのでこれ以上の条件は出ない．またこの場合の Q_B の形は

$$Q_B=\int d^3x(B\dot{c}-\dot{B}c) \tag{6.14}$$

で与えられるので，(6.10) と (6.13) が満たされれば (6.11) は自動的に満たされてしまうことになる．すなわち，QEDでは，九後-小嶋の条件はゴーストの無い状態に対する Lorentz 条件と一致することになる．

§7　拡張されたBRS代数の表現

§5において $\overline{Q}_B$ を除いたBRS代数の表現について調べたが本節では $\overline{Q}_B$ を含めたBRS代数，(3.5) と (3.6) とで定義される代数，の表現について付言する．

まず状態空間を一重項と二重項とに分解する．

$$\mathcal{V}=\mathcal{V}_S\oplus\mathcal{V}_D \tag{7.1}$$

この分解は，Q_B についても $\overline{Q}_B$ についても共通であり，二重項空間は

$$\mathcal{V}_D=\mathcal{V}_p\oplus\mathcal{V}_d=\mathcal{V}_{\bar{p}}\oplus\mathcal{V}_{\bar{d}} \tag{7.2}$$

のように分解することができる．ただし $\bar{q}$ を $\overline{Q}_B$ の表現とした時に，

$$\mathcal{V}_{\bar{p}}=\bar{q}^{\dagger}\mathcal{V}=\bar{q}^{\dagger}\mathcal{V}_D, \qquad \mathcal{V}_{\bar{d}}=\bar{q}\mathcal{V}=\bar{q}\mathcal{V}_D \tag{7.3}$$

により新しい部分空間が定義されている．そこで Q_B と $\overline{Q}_B$ とについてそれぞれ p と d への分解を導入する．さて部分空間，

$$Q_B\overline{Q}_B\mathcal{V}=\overline{Q}_BQ_B\mathcal{V}=\mathcal{V}^{(d,d)} \tag{7.4}$$

は，$Q_B, \overline{Q}_B$ のいずれについても子状態の集りである．従って

$$\mathcal{V}^{(d,d)}=\mathcal{V}_d\cap\mathcal{V}_{\bar{d}} \tag{7.5}$$

この部分空間に η を作用させれば，Q_B, $\overline{Q}_B$ のいずれについても親状態の集り

となる．すなわち，

$$\eta\mathcal{V}^{(d,d)}=\mathcal{V}^{(p,p)}=\mathcal{V}_p\cap\mathcal{V}_{\bar{p}} \tag{7.6}$$

この部分空間から出発して次の二つの部分空間が導入される．

$$Q_B\mathcal{V}^{(p,p)}=\mathcal{V}^{(d,p)},\qquad \overline{Q}_B\mathcal{V}^{(p,p)}=\mathcal{V}^{(p,d)}, \tag{7.7}$$

$$\eta\mathcal{V}^{(d,p)}=\mathcal{V}^{(p,d)} \tag{7.8}$$

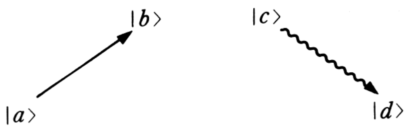
従って二重項空間は次のように分解される：

$$\mathcal{V}_D=\mathcal{V}^{(p,p)}\oplus\mathcal{V}^{(p,d)}\oplus\mathcal{V}^{(d,p)}\oplus\mathcal{V}^{(d,d)} \tag{7.9}$$

これに対して一重項空間は次の性質を持っている：

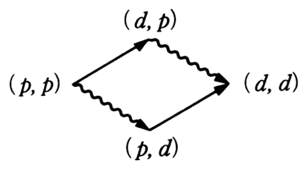
$$Q_B\mathcal{V}_S=\overline{Q}_B\mathcal{V}_S=\{0\},\qquad \eta\mathcal{V}_S=\mathcal{V}_S \tag{7.10}$$

この節の議論は証明抜きの描写的なものであるが，もっと詳しくは後の節で述べることにする．ところで (7.9) の分解は，また4個の部分空間の間に一対一の対応があることを意味する．今後 $\mathcal{V}_D$ の要素を $Q_B,\overline{Q}_B$ に対する変換性により (p,d) の如く表わすことにし $Q_B|a\rangle\sim|b\rangle$，$\overline{Q}_B|c\rangle\sim|d\rangle$ のような関係，ただし $\sim$ は数係数を除き等しい，を図式的に次のように表わそう：



(7.11)

しからば (7.9) の4個の部分空間の要素は，次の図式の意味で一対一の対応がある：



(7.12)

この4個の要素は四重項を形成している．

§8 補助場に対するBRS変換の表現

今まで状態ベクトルに対してBRS一重項とか二重項とかを考えたが，これを演算子に対しても拡張することができる．すなわち演算子の分類を，演算子を真空に対して作用させて得られる状態を用いて行うことができる．しかしながら Heisenberg 演算子は一般に既約でないので，漸近場を考えた方が簡単で

ある．既に（4.14）と（4.15）とで示されたように，$A_\mu, B, D_\mu c, \bar{c}$ を真空に作用させると質量 0 のスカラー粒子状態を生成する．そこでこの粒子を創り出すような演算子が含まれているはずであるので，それを漸近場と考え，

$$\boldsymbol{A} \to \partial_\mu \chi, \quad \boldsymbol{B} \to \beta, \quad \boldsymbol{D}_\mu c \to \partial_\mu \gamma, \quad \bar{\boldsymbol{c}} \to \bar{\gamma} \tag{8.1}$$

のように書くことしよう．同様にして次の漸近場も導入する：

$$\bar{\boldsymbol{B}} \to \bar{\beta}, \quad D_\mu \bar{\boldsymbol{c}} \to \partial_\mu \bar{\Gamma}, \quad \boldsymbol{c} \to \Gamma \tag{8.2}$$

これらがやはり質量 0 の粒子を創り出すことは容易に Landau ゲージで確かめることができる．しからば Heisenberg 演算子に対する BRS 変換より

$$\delta\chi=\gamma, \qquad \delta\bar{\gamma}=i\beta, \qquad \delta\gamma=0, \qquad \delta\beta=0, \tag{8.3}$$

$$\bar{\delta}\chi=\bar{\Gamma}, \qquad \bar{\delta}\Gamma=i\bar{\beta}, \qquad \bar{\delta}\bar{\Gamma}=0, \qquad \bar{\delta}\bar{\beta}=0 \tag{8.4}$$

これらの漸近場から次の式が得られる．ただし以下 Landau ゲージを採用する：

$$\begin{aligned}\langle \chi^a(x), \beta^b(y)\rangle &= -\langle \chi^a(x), \bar{\beta}^b(y)\rangle = i\langle \gamma^a(x), \bar{\gamma}^b(y)\rangle = i\langle \Gamma^a(x), \bar{\Gamma}^b(y)\rangle \\ &= -\delta_{ab} D_F(x-y)\end{aligned} \tag{8.5}$$

以下では二つの場合について考える．

1)　四重項表現

摂動論においては次の条件が成り立つ：

$$\gamma=\Gamma, \qquad \bar{\Gamma}=\bar{\gamma} \tag{8.6}$$

この時には，

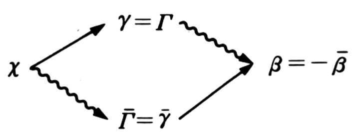
$$\bar{\delta}\delta\chi=\bar{\delta}\gamma=\bar{\delta}\Gamma=i\bar{\beta},$$

$$\delta\bar{\delta}\chi=\delta\bar{\Gamma}=\delta\bar{\gamma}=i\beta$$

従って δ と $\bar{\delta}$ との反可換性を考慮すると，

$$\bar{\beta}=-\beta \tag{8.7}$$

この時には補助場は次の図式に示されるような四重項を形成する．



(8.8)

この四重項表現は，九後と小嶋により導入されたものである．

2)　八重項表現

次に γ と Γ, $\bar{\Gamma}$ と $\bar{\gamma}$ が異なるものとした時にどうなるかを考えてみよう．

$$\gamma \neq \Gamma, \qquad \bar{\Gamma} \neq \bar{\gamma} \tag{8.9}$$

この時にはβを入れると，補助場の数が少なくとも5個あるから，少なくとも四重項を2個導入しないとすべての補助場を収容し切れない．またこの時には式（8.3）と（8.4）とを含むBRS変換の式を倍数書いてやらなければならない．そこで（8.9）の4個の漸近場の外に，$\beta, \bar{\beta}$および$d, \bar{d}$という2個の新しい漸近場を導入して

$$\begin{aligned} &\delta\Gamma = id, \quad &&\bar{\delta}\Gamma = i\beta, \quad &&\delta\bar{\beta} = -\gamma, \quad &&\bar{\delta}d = \gamma, \\ &\delta\bar{\gamma} = i\beta, \quad &&\bar{\delta}\bar{\gamma} = -i\bar{d}, \quad &&\delta\bar{d} = \bar{\Gamma}, \quad &&\bar{\delta}\beta = \Gamma \end{aligned} \tag{8.10}$$

この式は（8.3），(8.4）を含んでいる．なおχが消えてしまったが，χは

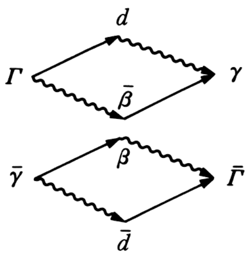
$$\chi = \beta - \bar{\beta} + (\text{一重項}) \tag{8.11}$$

と解釈すれば，やはり（8.3），(8.4）と矛盾はしない．またdと$\bar{d}$とは次の節での議論から明らかになるように，$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}$，$\bar{\boldsymbol{c}}\times\bar{\boldsymbol{c}}$の質量0の漸近場になっている．

またdと$\bar{d}$とに対しては

$$\langle \bar{d}^a(x), d^b(y)\rangle = \delta_{ab}D_F(x-y) \tag{8.12}$$

が成り立っていることは直ちに示せる．そこで（8.10）に対応する八重項の図式を作ると，



(8.13)

この八重項は九後によって考えられた．それでは四重項とか八重項のような表現が得られたが，どのような表現が存在するかについてもっと一般的に調べられないであろうか？　この問題については次節で議論することにしよう．

§9　BRSNO 代数の表現

一般のゲージにおいては拡張されたBRS不変性が成り立ち，保存量が拡張されたBRS代数を形成することを述べたが，Landau ゲージにおいては更に

2個の保存量が存在することが，中西と小嶋（1980）によって指摘された．このゲージではゲージ固定項とゴースト項の和は，

$$\mathscr{L}_{\mathrm{GF}}+\mathscr{L}_{\mathrm{FP}}=\partial_\mu B\cdot A_\mu+i\partial_\mu\bar{c}\cdot D_\mu c \tag{9.1}$$

このラグランジアン密度は，補助場の間での次のような変換に対し不変である：

$$\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}-ig(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c})\lambda,\qquad \bar{\boldsymbol{c}}\to\bar{\boldsymbol{c}}-2\boldsymbol{c}\lambda,\qquad \boldsymbol{c}\to\boldsymbol{c} \tag{9.2a}$$

ここに λ は変換のパラメターである．もう一つの変換は，

$$\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}+ig(\bar{\boldsymbol{c}}\times\bar{\boldsymbol{c}})\lambda,\qquad \boldsymbol{c}\to\boldsymbol{c}+2\bar{\boldsymbol{c}}\lambda,\qquad \bar{\boldsymbol{c}}\to\bar{\boldsymbol{c}} \tag{9.2b}$$

これらの変換のエルミートな生成演算子をそれぞれ $Q(c,c)$ と $Q(\bar{c},\bar{c})$ と記すと，

$$i[Q(c,c),\boldsymbol{B}]=-ig\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c},\ \ i[Q(c,c),\bar{\boldsymbol{c}}]=-2\boldsymbol{c},\ \ i[Q(c,c),\boldsymbol{c}]=0, \tag{9.3a}$$

$$i[Q(\bar{c},\bar{c}),\boldsymbol{B}]=ig\bar{\boldsymbol{c}}\times\bar{\boldsymbol{c}},\ \ i[Q(\bar{c},\bar{c}),\boldsymbol{c}]=2\bar{\boldsymbol{c}},\ \ i[Q(\bar{c},\bar{c}),\bar{\boldsymbol{c}}]=0 \tag{9.3b}$$

それに反して基本場はこれらの変換に対して不変である．そこで拡張されたBRS代数（3.5）と（3.6）に $Q(c,c)$ と $Q(\bar{c},\bar{c})$ とを付加すると，次のような関係を得る：

$$\begin{aligned}
&i[Q_c,Q(c,c)]=2Q(c,c),\qquad i[Q_c,Q(\bar{c},\bar{c})]=-2Q(\bar{c},\bar{c}),\\
&[Q(c,c),\overline{Q}_B]=2iQ_B,\qquad [Q(\bar{c},\bar{c}),Q_B]=-2iQ_B,\\
&[Q(c,c),Q_B]=0,\qquad [Q(\bar{c},\bar{c}),\overline{Q}_B]=0,\\
&[Q(c,c),\ \ Q(\bar{c},\bar{c})]=4iQ_c
\end{aligned} \tag{9.4}$$

$Q(c,c)$ と $Q(\bar{c},\bar{c})$ との具体的な形を与えることもできるが，ここでは必要でないので省略する．Landau ゲージでは $Q(c,c)$ も $Q(\bar{c},\bar{c})$ も保存量となるが，他のゲージでは保存量にならない．しかしながら上に与えた交換関係は依然として成り立つ．そこで拡張されたBRS代数を（9.4）によって拡張した代数を，BRSNO代数と呼び，代数 $\mathscr{A}$ と略称することにする．更に $Q_B,\overline{Q}_B$ のような反可換なものを除き，$Q_c, Q(c,c), Q(\bar{c},\bar{c})$ のみよりなる部分代数を $\mathscr{B}$ と記すことにする．これは代数 $\mathscr{A}$ のボーズ部分と考えることができる．

さて代数 $\mathscr{A}$ の表現を求めるために次のような記号の書換えを行う：

$$\begin{gathered}
iQ_c\to 2J_z,\qquad Q(c,c)\to 2J_+,\qquad Q(\bar{c},\bar{c})\to 2J_-,\\
iQ_B\to\alpha,\qquad \overline{Q}_B\to\beta
\end{gathered} \tag{9.5}$$

またこれからの議論は，代数 $\mathscr{A}$ の抽象的表現でなく，ゲージ理論において実現し得るものに限ることにする．まず Lie 代数 $\mathscr{B}$ の表現を求める．そこで $\mathscr{B}$ を特徴付ける交換関係を上の記号で書いてみると，

$$[J_z, J_+]=J_+, \qquad [J_z, J_-]=-J_-, \qquad [J_+, J_-]=2J_z \tag{9.6}$$

これは正に角運動量の3成分の間の交換関係と一致する．そこでゲージ理論の範囲内で，かつ Landau ゲージにおいて，$\mathcal{B}$ の表現が角運動量のそれと一致することを証明する．そのために次の要請から出発する：

1) 真空状態 $|0\rangle$ は次の条件を満たす：

$$J_+|0\rangle=J_-|0\rangle=J_z|0\rangle \tag{9.7}$$

2) 真空状態は，基本場および補助場から形成される代数に関して循環的である．すなわち，真空に場の演算子の積を作用させた状態を組み合わせることにより，状態ベクトル空間 $\mathcal{V}$ を張ることができる．

さて，基本場および $B-\overline{B}$ は，$\mathcal{B}$ の三要素と可換であるから，これらは $\mathcal{B}$ の1次元表現に属する．そこでそれ以外の表現を作るには，$\boldsymbol{c}, \bar{\boldsymbol{c}}$ および $\boldsymbol{B}+\overline{\boldsymbol{B}}$ あるいは $\boldsymbol{c}\times\bar{\boldsymbol{c}}$ を用いなければならない．そこで次の交換関係を利用する：

$$\begin{aligned}
&[J_z, \boldsymbol{c}]=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}, \qquad [J_z, \bar{\boldsymbol{c}}]=-\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{c}},\\
&i[J_+, \bar{\boldsymbol{c}}]=-\boldsymbol{c}, \qquad i[J_+, \boldsymbol{c}]=0,\\
&i[J_-, \boldsymbol{c}]=\bar{\boldsymbol{c}}, \qquad i[J_-, \bar{\boldsymbol{c}}]=0
\end{aligned} \tag{9.8}$$

そこで二重項および三重項を次式で定義する：

$$\phi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)=i\boldsymbol{c}, \qquad \phi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)=\bar{\boldsymbol{c}}, \tag{9.9}$$

$$\phi(1,1)=\frac{i}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}), \quad \phi(1,0)=\boldsymbol{c}\times\bar{\boldsymbol{c}}, \quad \phi(1,-1)=-\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\boldsymbol{c}}\times\bar{\boldsymbol{c}}) \tag{9.10}$$

しからば直ちに次の関係式が得られる：

$$\begin{aligned}
&[J_z, \ \phi(j, m)]=m\phi(j, m),\\
&[J_+, \phi(j, m)]=\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\,\phi(j, m+1),\\
&[J_-, \phi(j, m)]=\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,\phi(j, m-1)
\end{aligned} \tag{9.11}$$

これらはいずれも角運動量の場合と同じであるから，二重項と三重項から出発して角運動量に対する Clebsch-Gordan の係数を用いて積表現を作ることができる．

$$\phi(J, M, c)=\sum_{m_1+m_2=M}\phi(j_1, m_1, a)\phi(j_2, m_2, b)\langle j_1, j_2, m_1, m_2|j_1, j_2, J, M\rangle \tag{9.12}$$

ただし a, b, c は他の量子数を表わす．このような積表現が (9.11) を再び満たすことは明らかである．そこで

$$J^2=\frac{1}{2}(J_+J_-+J_-J_+)+J_z{}^2 \tag{9.13}$$

とすれば，(9.7)，(9.11) より明らかに場の演算子の多項式 $\phi(j,m,a)$ に対して

$$\begin{aligned} &J^2\phi(j,m,a)|0\rangle=j(j+1)\phi(j,m,a)|0\rangle, \\ &J_z\phi(j,m,a)|0\rangle=m\phi(j,m,a)|0\rangle \end{aligned} \tag{9.14}$$

かくして $\mathcal{B}$ の表現は全く角運動量の表現と同じであることが分かった．そこで次に α と β とを導入しよう．交換関係として

$$[J_z,\alpha]=\frac{1}{2}\alpha,\ [J_z,\beta]=-\frac{1}{2}\beta,\ [J_+,\beta]=\alpha,\ [J_-,\alpha]=\beta \tag{9.15}$$

これから $\alpha\beta$ という積を作ると，

$$[J_+,\alpha\beta]=[J_-,\alpha\beta]=[J_z,\alpha\beta]=0 \tag{9.16}$$

さて $\mathcal{V}^{(d,d)}$ という部分空間は $\alpha\beta\mathcal{V}$ と書けるが，(9.16) から

$$J\mathcal{V}^{(d,d)}\subset\mathcal{V}^{(d,d)} \tag{9.17}$$

このことは $\mathcal{B}$ の既約表現を $\mathcal{V}^{(d,d)}$ の内部で作れることを意味する．次に計量行列 η を導入し，J_+, J_-, J_z の表現行列も同じ文字で表わすことにすると，

$$\eta J_+\eta=J_+^\dagger,\quad \eta J_-\eta=J_-^\dagger,\quad \eta J_z\eta=-J_z^\dagger \tag{9.18}$$

がエルミート性を表現する．なお η は標準形に選んであるとする．また，

$$\eta\beta\eta=\beta^\dagger,\qquad \eta\alpha\eta=-\alpha^\dagger \tag{9.19}$$

ところで角運動量の表現では，

$$J_z^\dagger=J_z,\qquad J_+^\dagger=J_-,\qquad J_-^\dagger=J_+ \tag{9.20}$$

であるから，(9.18) と (9.20) とを組み合わせると，

$$\eta J_z\eta=-J_z,\qquad \eta J_+\eta=J_-,\qquad \eta J_-\eta=J_+ \tag{9.21}$$

従って

$$\eta J^2\eta=J^2 \tag{9.22}$$

となり，計量行列は量子数 j の値が同じ状態を結び付けることが分かる．さて η は $\mathcal{V}^{(d,d)}$ を $\mathcal{V}^{(p,p)}$ に移すことは (7.6) 式に示されているから，(9.17) より

$$J\mathcal{V}^{(p,p)}\subset\mathcal{V}^{(p,p)} \tag{9.23}$$

従って $\mathcal{B}$ の既約表現を $\mathcal{V}^{(p,p)}$ の内部でも作れることになる．そこで一つの j に対する $\mathcal{B}$ の既約表現を $\mathcal{V}^{(p,p)}$ の内部で作り，その基底を

$$|j,m,a\rangle\in\mathcal{V}^{(p,p)}\qquad (m=-j,\cdots,j) \tag{9.24}$$

と書くことにする．しからば

$$\alpha|j, m, a\rangle \in \mathscr{V}^{(d,p)}, \qquad \beta|j, m, a\rangle \in \mathscr{V}^{(p,d)} \tag{9.25}$$

更に

$$\alpha\beta|j, m, a\rangle \in \mathscr{V}^{(d,d)} \tag{9.26}$$

かくして代数 $\mathscr{A}$ の表現を作るための $4(2j+1)$ 個の基底ベクトルがそろったことになり，この基底ベクトルの組は $\mathscr{A}$ の演算に対して閉じている．すなわち，

$$|j, m, a\rangle, \quad \alpha|j, m, a\rangle, \quad \beta|j, m, a\rangle, \quad \alpha\beta|j, m, a\rangle \tag{9.27}$$

上の組で m を固定すると，一つの BRS 四重項となる．また m を変えた場合に $\{|j, m, a\rangle\}$ および $\{\alpha\beta|j, m, a\rangle\}$ は3次元回転群の表現 D_j に属するが，$\{\alpha|j, m, a\rangle\}$ および $\{\beta|j, m, a\rangle\}$ は $D_{j+1/2}$ と $D_{j-1/2}$ の一次結合となる．

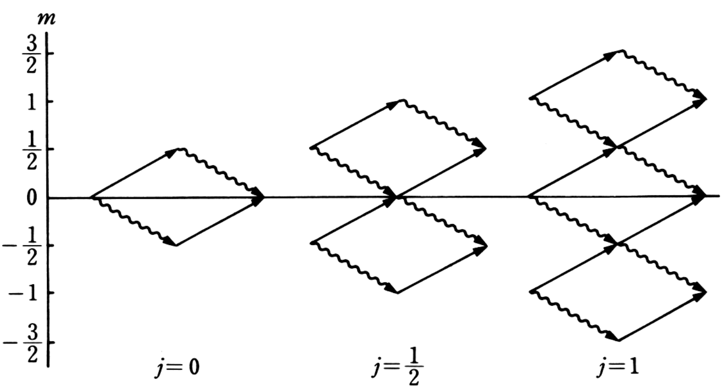
$$\begin{aligned} |j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, a\rangle &= \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+1}}\alpha|j, m, a\rangle + \sqrt{\frac{j-m}{2j+1}}\beta|j, m, a\rangle, \\ |j-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}, a\rangle &= \sqrt{\frac{j-m}{2j+1}}\alpha|j, m, a\rangle + \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+1}}\beta|j, m, a\rangle \end{aligned} \tag{9.28}$$

このようにして与えられる $\mathscr{A}$ の表現を $\mathscr{D}_j$ と書くことにする．$\mathscr{A}$ の表現は，従って一重項を除くと，すべて一つの量子数 j により指定されることになる．そこで表現 $\mathscr{D}_j$ を図式的に表わすことにする．その際に $J_z = \frac{i}{2}Q_c$ より，

$$m = \frac{1}{2}N \tag{9.29}$$

すなわち，m はゴースト数の半分であることに注意する．

第12図 代数 $\mathscr{A}$ の既約表現 $\mathscr{D}_j$



これから分かることは，前節で導入した四重項と八重項とは，それぞれ表現 $\mathcal{D}_0$ および $\mathcal{D}_1$ に属することである．特に補助場に関して述べると，j が整数であるか，半整数であるかにより次の差異が生ずる．

$$j=\text{整}\quad\text{数}\;:\quad \beta+\bar{\beta}=0 \tag{9.30}$$

$$j=\text{半整数}\;:\quad \beta+\bar{\beta}\neq 0 \tag{9.31}$$

特に後者においては，$c\times c$ および $\bar{c}\times\bar{c}$ が，(9.3) により質量 0 の漸近場を持つことになる．同様に (3.3) により $c\times\bar{c}$ も質量 0 の漸近場を持ち，(9.9) により $\mathcal{B}$ の三重項に属することになる．第 20 章の議論により，j が半整数の時にはカラーの閉じ込めが成立する．

さて不定計量の理論では，計量行列 η の表現も定めなければならない．ところで表現 $\mathcal{D}_j$ は η に対して閉じているとは限らない．一つの表現 $\mathcal{D}_j(a)$ は他の表現 $\mathcal{D}_j(b)$ に移されることがある．この時には，

$$\eta\mathcal{D}_j(a)=\mathcal{D}_j(b),\qquad \eta\mathcal{D}_j(b)=\mathcal{D}_j(a) \tag{9.32}$$

のような二つの既約表現が必要であり，次のように位相を定める：

$$\eta|j,m,a\rangle=\alpha\beta|j,-m,b\rangle \tag{9.33}$$

しからば自動的に次の関係が得られる：

$$\begin{aligned}\eta(\alpha|j,m,a\rangle)&=-\beta|j,-m,b\rangle,\\ \eta(\beta|j,m,a\rangle)&=-\alpha|j,-m,b\rangle,\\ \eta(\alpha\beta|j,m,a\rangle)&=|j,-m,b\rangle\end{aligned} \tag{9.34}$$

このようにすれば，(9.20) が満たされることが示せる．

既約表現 $\mathcal{D}_j$ に対して，§5 の記号に戻り，

$$\alpha=iq,\qquad \beta=\bar{q} \tag{9.35}$$

と書くことにすると，

$$\begin{aligned}&q^2=\bar{q}^2=(q^\dagger)^2=(\bar{q}^\dagger)^2=0,\\ &\{q,\bar{q}\}=\{q^\dagger,\bar{q}^\dagger\}=\{q,\bar{q}^\dagger\}=\{q^\dagger,\bar{q}\}=0\end{aligned} \tag{9.36}$$

が成立することが示される．そこで (9.27) を基底に選ぶと，この規格化に対応して次の式を得る：

$$\Delta=qq^\dagger+q^\dagger q=\bar{q}\bar{q}^\dagger+\bar{q}^\dagger\bar{q}=1 \tag{9.37}$$

この Δ は実は $\mathcal{A}$ のすべての要素と可換な Casimir 演算子である．しかしながら Δ は，一重項に対しては消えるので，

$$\Delta|f\rangle=\begin{cases}|f\rangle, & |f\rangle\in\mathcal{V}_D \\ 0, & |f\rangle\in\mathcal{V}_S\end{cases} \tag{9.38}$$

また容易に示されるように，Δ は η とも可換である．

第19章　くりこみ群

単にくりこみ群と言ってもその意味するところは誠に多様である．種々の異なる変換が差別なしにこの名前で呼ばれているからである．また物理学の異なる分野でそれぞれ少しずつ違った使われ方をしている．例えば，くりこみ群の変換に対する種々の量の変換性が問題となるが，対象となる量が物性論では自由エネルギーであったり，素粒子論ではグリーン関数であったりする．くりこみ群の最大公約数的性質は何かと問われれば，それは長さ，あるいは運動量等の尺度変換であると言うことができるであろう．またくりこみ群は文字通り数学での群であり，**くりこみ**という接頭辞は，この群がくりこみという操作と関係していることに由来している．素粒子論では大別して二種類のくりこみ群が考えられている．第一種のくりこみ群は，一つの世界の中での問題として設定される．同じ運動方程式を解くのに基本的な量，例えばグリーン関数を異なる境界条件下で定義する．境界条件は何らかのパラメターにより区別されるが，いずれのグリーン関数も本質的に運動方程式の解に関する知識を含んでおり，観測可能量はいずれのグリーン関数を用いても表現し得るものとする．しからば観測可能量は，境界条件を区別するパラメターによらないことになり，このようなパラメターの変化に対する不変量となる．他方パラメターの異なるグリーン関数同士にも関係が付けられ，パラメターの変分に対するグリーン関数の応答を調べることができる．このパラメターの変換のなす群が第一種のくりこみ群である．この変換は一つの世界の中で閉じている．観測可能量は，このくりこみ群の不変量であるが，この変換を受ける量は力学変数でないパラメターであるために何らの保存則にも対応しない．第二種のくりこみ群では，第一種の場合と違い話が一つの世界の中で閉じない．例を古典物理学に求めると，流体力学における Reynolds の相似法則が挙げられる．流体を特徴付ける粘性率，密度その他が違っていても Reynolds 数が同じであれば，異種流体の流れでも一つの流体の流れの様子が分かっていれば，適当な翻訳規則によって

他の流れの様子も分かるということである．素粒子の世界では，素粒子の質量や結合定数を変えるというようなことを考えると，これは一つの世界の中で閉じてはいない．

§1　QEDにおけるくりこみ群

上述の意味での第一種のくりこみ群は，まず QED において Stueckelberg と Petermann (1953)，次いで Gell-Mann と Low によって導入された．これについては Bogoliubov と Shirkov による教科書，*Introduction to the Theory of Quantized Fields*, (Interscience Publisher, New York, 1959) の第 8 章に詳しい記述がある．

以下においては，くりこまれていない場の演算子や物理量に添字 0 を付けてくりこまれた量と区別する．しからば QED のラグランジアン密度は，

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(0)}F_{\mu\nu}^{(0)}-\frac{1}{2\alpha_0}(\partial_\mu A_\mu^{(0)})^2-\overline{\psi}^{(0)}(\gamma_\mu D_\mu+m_0)\psi^{(0)} \tag{1.1}$$

そしてくりこみは次の式で定義される：

$$A_\mu^{(0)}(x)=Z_3^{1/2}A_\mu(x), \qquad \psi^{(0)}(x)=Z_2^{1/2}\psi(x) \tag{1.2}$$

またパラメターのくりこみは，

$$e_0{}^2=Z_3^{-1}e^2, \qquad \alpha_0=Z_3\alpha \tag{1.3}$$

ただしここでは Ward の恒等式を用いている：

$$Z_1=Z_2 \tag{1.4}$$

そこで質量殻上でくりこまれたものに添字 C を付けてグリーン関数を導入する：

$$\langle 0|T[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k\ e^{ik\cdot(x-y)}D_{FC}(k)_{\mu\nu}, \tag{1.5}$$

$$D_{FC}(k)_{\mu\nu}=\frac{1}{k^2-i\varepsilon}\left[\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-i\varepsilon}\right)d_C(k^2)+\alpha\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-i\varepsilon}\right] \tag{1.6}$$

そしてこの d_C は次の形を持つ：

$$d_C(k^2)=1+k^2\int d\kappa^2\frac{C(\kappa^2)}{k^2+\kappa^2-i\varepsilon} \tag{1.7}$$

最低次における $C(\kappa^2)$ の形は（11.8.46）式により，

$$C(\kappa^2)=\frac{e^2}{12\pi^2}\cdot\frac{1}{\kappa^2}\left(1+\frac{2m^2}{\kappa^2}\right)\sqrt{1-\frac{4m^2}{\kappa^2}}\theta(\kappa^2-4m^2) \tag{1.8}$$

さてグリーン関数を計算する時には，Feynman 図形に対応する寄与を伝播関数や頂点関数，および結合定数の組み合わせで表現する．そこで S_F, D_F, Γ_μ などの規格化を変更し，その変更分を結合定数に押し付けることを考える．しかしグリーン関数全体としてはその変更分が完全に吸収し切れず，全体としての規格化が変更を受けることになる．この特別な場合がくりこみである．

$$S'_F(p, e_0{}^2)=Z_2S_{FC}(p, e^2), \tag{1.9}$$

$$D'_F(k, e_0{}^2)=Z_3D_{FC}(k, e^2), \tag{1.10}$$

$$\Gamma'_\mu(p, q, k, e_0{}^2)=Z_1^{-1}\Gamma_{\mu C}(p, q, k, e^2) \tag{1.11}$$

ここに S_{FC}, D_{FC} は $p\cdot\gamma=im$, $k^2=0$ において規格化されている．そこで規格化点を空間的運動量に選び直すことにしよう．

$$p\cdot\gamma=\lambda', \qquad k^2=\lambda^2 \tag{1.12}$$

すなわち，

$$(ip\cdot\gamma+m)S_F(\lambda, \lambda', p)\equiv s(\lambda, \lambda', p), \tag{1.13}$$

$$(\delta_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu)D_F(\lambda, \lambda', k)_{\nu\sigma}\equiv\left(\delta_{\mu\sigma}-\frac{k_\mu k_\sigma}{k^2}\right)d(\lambda, \lambda', k) \tag{1.14}$$

を導入し，次のように規格化されているものとする：(1.12) に対して，

$$s(\lambda, \lambda', p)=1, \qquad d(\lambda, \lambda', k)=1 \tag{1.15}$$

(1.13) と (1.14) で導入した S_F, D_F は，S_{FC}, D_{FC} と規格化においてのみずれているものである．そこでくりこまれていないグリーン関数と上のグリーン関数とを結ぶ式を (1.9)，(1.10) にならって書くことができる．

$$S'_F(p, e_0{}^2)=Z_2(\lambda, \lambda'\,;\, e_\lambda{}^2)S_F(\lambda, \lambda'\,;\, p, e_\lambda{}^2), \tag{1.16}$$

$$D'_F(p, e_0{}^2)=Z_3(\lambda, \lambda'\,;\, e_\lambda{}^2)D_F(\lambda, \lambda'\,;\, k, e_\lambda{}^2), \tag{1.17}$$

$$e_\lambda{}^2=Z_3(\lambda, \lambda'\,;\, e_\lambda{}^2)e_0{}^2 \tag{1.18}$$

ここに $e_\lambda{}^2$ は摂動展開のパラメターである．質量殻は次式で与えられる：

$$\lambda'=im, \qquad \lambda=0 \tag{1.19}$$

そこで (1.16) で $\lambda'=im$, (1.17) で $\lambda=0$ と置くと，

$$S'_F(p, e_0{}^2)=Z_2(\lambda, im, e_\lambda{}^2)S_{FC}(p, e^2), \tag{1.20}$$

$$D'_F(k, e_0{}^2)=Z_3(0, \lambda', e^2)D_{FC}(k, e^2) \tag{1.21}$$

そこで次の比を導入する：

$$z_2(\lambda, \lambda', e^2)=Z_2(\lambda, \lambda'\,;\, e_\lambda{}^2)/Z_2(\lambda, im\,;\, e_\lambda{}^2), \tag{1.22}$$

$$z_3(\lambda, \lambda', e^2) = Z_3(\lambda, \lambda' ; e_\lambda{}^2)/Z_3(0, \lambda' ; e^2) \tag{1.23}$$

しからば極因子を除いた伝播関数に対して

$$z_2(\lambda, \lambda' ; e^2) s(\lambda, \lambda', p, e_\lambda{}^2) = s_C(p, e^2), \tag{1.24}$$

$$z_3(\lambda, \lambda' ; e^2) d(\lambda, \lambda', k, e_\lambda{}^2) = d_C(k, e^2) \tag{1.25}$$

ここに z_2, z_3 は有限な因子である．さて（1.15）より

$$z_2(\lambda, \lambda' ; e^2) = s_C(\lambda', e^2), \qquad z_3(\lambda, \lambda' ; e^2) = d_C(\lambda, e^2) \tag{1.26}$$

そして

$$e_\lambda{}^2 = e^2 d_C(\lambda, e^2) \tag{1.27}$$

さてくりこみ群の基礎は，(1.24)～(1.27) で尽くされている．

§2 くりこみ群に対する近似的方程式

前節で導入したくりこみ群の方程式で m^2 が小さいとした時に s と d とを求めてみよう．

1) 真空偏極を無視する近似

まず真空偏極を無視する近似とは，

$$d_C = 1 \tag{2.1}$$

この時に s に対する方程式は，(1.24), (1.26), (2.1) より

$$s(\lambda', p, e^2) = s_C(p, e^2)/s_C(\lambda', e^2) \tag{2.2}$$

そこで s_C を次の形に置く：

$$s_C(p, e^2) = s_C\left(\frac{p^2}{m^2}, e^2\right), \qquad s_C(\lambda', e^2) = s_C\left(\frac{\lambda'^2}{m^2}, e^2\right) \tag{2.3}$$

そして $s(\lambda', p, e^2)$ が m^2 **に依らない**とすると，

$$s(\lambda', p, e^2) = s\left(\frac{p^2}{\lambda'^2}, e^2\right) \tag{2.4}$$

これは，λ' も p も m よりもずっと大きい時の近似になる．

$$s\left(\frac{p^2}{\lambda'^2}, e^2\right) = s_C\left(\frac{p^2}{m^2}, e^2\right) \Big/ s_C\left(\frac{\lambda'^2}{m^2}, e^2\right) \tag{2.5}$$

この解は，

$$s_C\left(\frac{p^2}{m^2}, e^2\right) = C(e^2)\left(\frac{p^2}{m^2}\right)^{\gamma(e^2)}, \quad s_C\left(\frac{\lambda'^2}{m^2}, e^2\right) = C(e^2)\left(\frac{\lambda'^2}{m^2}\right)^{\gamma(e^2)} \tag{2.6}$$

ただし摂動論では $C(e^2)$ は赤外発散を含んでいる．しかし次式は含まない：

$$s\left(\frac{p^2}{\lambda'^2}, e^2\right)=\left(\frac{p^2}{\lambda'^2}\right)^{\gamma(e^2)} \tag{2.7}$$

指数 $\gamma(e^2)$ は実はゲージの選び方に依存する．このように質量が0の理論でも質量殻からずれた点で規格化すれば，赤外発散は出てこない．なお (3.28) 参照．

2)　真空偏極を考慮する近似

ここでも s は m^2 に依らないと仮定する．これも従って高エネルギーの近似である．この時に s を次の形に書く：

$$s(\lambda, \lambda', p, e_\lambda{}^2)\approx s\left(\frac{p^2}{\lambda^2}, \frac{p^2}{\lambda'^2}, e_\lambda{}^2\right) \tag{2.8}$$

しからばこの近似でのくりこみ群の方程式は，

$$s\left(\frac{p^2}{\lambda^2}, \frac{p^2}{\lambda'^2}, e_\lambda{}^2\right)=s_C\left(\frac{p^2}{m^2}, e^2\right)\Big/ s_C\left(\frac{\lambda'^2}{m^2}, e^2\right) \tag{2.9}$$

また d に対しては，やはり m^2 に依らないとして次の近似を導入する：

$$d(\lambda, k, e_\lambda{}^2)=d\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{m^2}{\lambda^2}, e_\lambda{}^2\right)\approx d\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, e_\lambda{}^2\right) \tag{2.10}$$

しからば d に対する近似方程式は，

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, e_\lambda{}^2\right)=d_C\left(\frac{k^2}{m^2}, e^2\right)\Big/ d_C\left(\frac{\lambda^2}{m^2}, e^2\right), \tag{2.11}$$

$$e_\lambda{}^2=e^2 d_C\left(\frac{\lambda^2}{m^2}, e^2\right) \tag{2.12}$$

ここではゲージ・パラメターは入っていないので Landau ゲージと考えて良い．一般のゲージでは，次のパラメターが入ってくる：

$$\alpha_\lambda e_\lambda{}^2=\alpha e^2 \tag{2.13}$$

さて (2.11) と (2.12) とを組み合わせると，

$$e^2 d_C\left(\frac{k^2}{m^2}, e^2\right)=e^2 d_C\left(\frac{\lambda^2}{m^2}, e^2\right) d\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, e^2 d_C\left(\frac{\lambda^2}{m^2}, e^2\right)\right) \tag{2.14}$$

この方程式を変形するために

$$e^2 d_C\left(\frac{k^2}{m^2}, e^2\right)=g\left(\frac{k^2}{m^2}, e^2\right) \tag{2.15}$$

と置くと，上の方程式は次の形になる：

$$g\left(\frac{k^2}{m^2}, e^2\right)=Q\left(\frac{k^2}{\lambda^2},\ g\left(\frac{\lambda^2}{m^2}, e^2\right)\right) \tag{2.16}$$

この関数方程式は次に述べるように解くことができる．(2.16)を書き換えると，

$$g(x,e^2)=Q\left(\frac{x}{y},g(y,e^2)\right) \tag{2.17}$$

そこで $g=g(x,e^2)$, $g'=g(y,e^2)$ から逆に x と y とを g と g' とで表わすと,

$$x=h(g,e^2),\qquad y=h(g',e^2) \tag{2.18}$$

これを (2.17) に代入すると,

$$g=Q\left(\frac{h(g,e^2)}{h(g',e^2)},g'\right) \tag{2.19}$$

これは h の比が e^2 に依らないことを意味するので, h は g の関数と e^2 の関数との積, あるいは比の形に書ける.

$$h(g,e^2)=G(g)/\phi(e^2),\qquad h(g',e^2)=G(g')/\phi(e^2) \tag{2.20}$$

すなわち,

$$G(e_\lambda{}^2)=\frac{\lambda^2}{m^2}\phi(e^2) \tag{2.21}$$

そこで G の逆関数を F とすれば,

$$e_\lambda{}^2=e^2d_C\left(\frac{\lambda^2}{m^2},e^2\right)=F\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\phi(e^2)\right) \tag{2.22}$$

あるいは,

$$e^2d_C\left(\frac{k^2}{m^2},e^2\right)=g\left(\frac{k^2}{m^2},e^2\right)=F\left(\frac{k^2}{m^2}\phi(e^2)\right)=F\left(\frac{k^2}{\lambda^2}\cdot\frac{\lambda^2}{m^2}\phi(e^2)\right) \tag{2.23}$$

(2.21) と (2.23) とを組み合わせると,

$$e^2d_C\left(\frac{k^2}{m^2},e^2\right)=F\left(\frac{k^2}{\lambda^2}G(e_\lambda^2)\right) \tag{2.24}$$

ところで (2.12) より

$$e^2d_C\left(\frac{\lambda^2}{m^2},e^2\right)d\left(\frac{k^2}{\lambda^2},e^2d_C\left(\frac{\lambda^2}{m^2},e^2\right)\right)=e_\lambda^2d\left(\frac{k^2}{\lambda^2},e_\lambda^2\right) \tag{2.25}$$

これを (2.14), (2.24) と比較すると,

$$F\left(\frac{k^2}{\lambda^2}G(e_\lambda^2)\right)=e_\lambda^2d\left(\frac{k^2}{\lambda^2},e_\lambda^2\right), \tag{2.26}$$

$$\frac{k^2}{\lambda^2}G(e_\lambda^2)=G\left(e_\lambda^2d\left(\frac{k^2}{\lambda^2},e_\lambda^2\right)\right) \tag{2.27}$$

従って

$$\ln\frac{k^2}{\lambda^2}=\ln G\left(e_\lambda^2d\left(\frac{k^2}{\lambda^2},e_\lambda^2\right)\right)-\ln G(e_\lambda^2) \tag{2.28}$$

そこで Gell-Mann と Low によって導入された関数 $\psi(x)$ を定義する.

$$\frac{1}{\psi(x)}=\frac{d}{dx}\ln G(x) \tag{2.29}$$

しからば

$$\ln\frac{k^2}{\lambda^2}=\int_{e_\lambda{}^2}^{e_\lambda{}^2 d\left(\frac{k^2}{\lambda^2},\, e_\lambda{}^2\right)}\frac{dx}{\psi(x)} \tag{2.30}$$

同様にして (2.23) 式より出る式

$$\frac{k^2}{m^2}\phi(e^2)=G\left(e^2 d_C\left(\frac{k^2}{m^2}, e^2\right)\right) \tag{2.31}$$

も次の形に書くことができる:

$$\ln\frac{k^2}{m^2}=\int_{F(\phi(e^2))}^{e^2 d_C\left(\frac{k^2}{m^2},\, e^2\right)}\frac{dx}{\psi(x)} \tag{2.32}$$

ただし摂動論では,

$$F(\phi(e^2))=e^2 d_C(1, e^2)=e^2-\frac{5}{36\pi^2}e^4+\cdots\equiv e'^2 \tag{2.33}$$

さて (2.23) より直ちに

$$\left(m\frac{\partial}{\partial m}+\beta(e)\frac{\partial}{\partial e}\right)e^2 d_C\left(\frac{k^2}{m^2}, e^2\right)=0 \tag{2.34}$$

ただし

$$e\beta(e)=\phi(e^2)/\phi'(e^2) \tag{2.35}$$

また (2.32) より

$$\left(m\frac{\partial}{\partial m}+\frac{\psi(e'^2)}{e'}\frac{\partial}{\partial e'}\right)e^2 d_C\left(\frac{k^2}{m^2}, e^2\right)=0 \tag{2.36}$$

これから

$$\frac{\psi(e'^2)}{e'}\frac{\partial}{\partial e'}=\beta(e)\frac{\partial}{\partial e} \tag{2.37}$$

(2.34) は後に出てくるが質量挿入項を無視した Callan-Symanzik 方程式である.

また ψ と β とは, 摂動論で計算すると,

$$\psi(x)=\frac{1}{12\pi^2}\left(x^2+\frac{3}{16\pi^2}x^3+\cdots\right), \tag{2.38}$$

$$\beta(e)\approx\frac{\psi(e^2)}{e}\approx\frac{e^3}{12\pi^2} \tag{2.39}$$

実は d 関数は QED においてはゲージ・パラメター α に依存しないので上の議論は任意のゲージにおいて成り立つ．しかし s 関数は α に依存する．

以上の準備の後に s の方程式に戻る．d に対する結果を用いて (2.8) 式を書き換えると，

$$s\left(\frac{p^2}{\lambda^2},\frac{p^2}{\lambda'^2},e_\lambda{}^2\right)=s\left(\frac{p^2}{\lambda^2},\frac{p^2}{\lambda'^2},F\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\phi(e^2)\right)\right) \tag{2.40}$$

ところが (2.9) 式によれば，この関数は λ に依存しないはずであるので，この式の右辺は

$$\frac{p^2}{m^2}\phi(e^2),\quad \frac{p^2}{\lambda'^2} \tag{2.41}$$

のみの関数となるはずである．従って，

$$s\left(\frac{p^2}{\lambda^2},\frac{p^2}{\lambda'^2},e_\lambda{}^2\right)=R\left(\frac{p^2}{\lambda'^2},\frac{p^2}{m^2}\phi(e^2)\right) \tag{2.42}$$

Landau ゲージ以外では，この外に変数 αe^2 にも依存する．この式は λ に依存しないので α は常に $\alpha_\lambda e_\lambda{}^2=\alpha e^2$ という組み合わせで入るはずだからである．

$$s_C\left(\frac{p^2}{m^2},e^2,\alpha e^2\right)=A(e^2,\alpha e^2)H\left(\frac{p^2}{\lambda'^2},\alpha e^2,\frac{p^2}{m^2}\phi(e^2)\right) \tag{2.43}$$

と置けば (2.9) 式から (2.42) 式が満たされることが分かる．この H は次の式を満たす:

$$\mathscr{D}H\equiv\left(m\frac{\partial}{\partial m}+\beta(e)\frac{\partial}{\partial e}+\delta(e,\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)H=0 \tag{2.44}$$

ただし

$$\delta(e,\alpha)=-\frac{2\alpha}{e}\beta(e) \tag{2.45}$$

次に γ_{el} を定義する:

$$\mathscr{D}\ln A=-2\gamma_{\mathrm{el}}(e,\alpha) \tag{2.46}$$

しからば，

$$(\mathscr{D}+2\gamma_{el})s_C\left(\frac{p^2}{m^2}, e^2, \alpha e^2\right)=0 \tag{2.47}$$

この式もやはり質量挿入項を無視した Callan-Symanzik 方程式である.

この節では質量 m^2 が四元運動量やくりこみ点に対応する質量に比べて小さいという近似で第一種のくりこみ群を扱った. その結果は質量に関する微分が入ってしまったが, これは実は四元運動量に関する微分の代用と考えれば, 質量を固定した世界の中で閉じた話と考えることができる. この節では m^2 が小さい時にのみ成り立つ近似を取扱ったが, もしもこの近似を仮定しなければ, くりこみ群の方程式はどのような形になるであろうか？ この問題を次節において考察することにしよう.

§3 Ovsianikov の方程式

まず m を無視しない d の方程式から出発する.

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{m^2}{\lambda^2}, e_\lambda{}^2\right)=d_C\left(\frac{k^2}{m^2}, e^2\right)\Big/d_C\left(\frac{\lambda^2}{m^2}, e^2\right) \tag{3.1}$$

この式から d_C を消去すると

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda_2{}^2}, \frac{m^2}{\lambda_2{}^2}, e_2{}^2\right)=d\left(\frac{k^2}{\lambda_1{}^2}, \frac{m^2}{\lambda_1{}^2}, e_1{}^2\right)\Big/d\left(\frac{\lambda_2{}^2}{\lambda_1{}^2}, \frac{m^2}{\lambda_1{}^2}, e_1{}^2\right), \tag{3.2}$$

$$e_2{}^2=e_1{}^2d\left(\frac{\lambda_2{}^2}{\lambda_1{}^2}, \frac{m^2}{\lambda_1{}^2}, e_1{}^2\right) \tag{3.3}$$

ただし e_1, e_2 はそれぞれ λ_1, λ_2 に対応する e_λ を表わすものとし, 次式を用いた:

$$d\left(1, \frac{m^2}{\lambda^2}, e_\lambda{}^2\right)=1 \tag{3.4}$$

また次の組み合わせは, λ に依存しないので不変荷電と呼ぶ:

$$e_\lambda{}^2d\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{m^2}{\lambda^2}, e_\lambda{}^2\right)=e^2d_C\left(\frac{k^2}{m^2}, e^2\right) \tag{3.5}$$

そこで次の変数を導入する:

$$t=\frac{\lambda_2{}^2}{\lambda_1{}^2}, \quad x=\frac{k^2}{\lambda^2}, \quad y=\frac{m^2}{\lambda_1{}^2}, \quad e^2=e_1{}^2 \tag{3.6}$$

しからば (3.2) 式は次の形の厳密な方程式となる:

$$e^2d(x, y, e^2)=e^2d(t, y, e^2)d\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, e^2d(t, y, e^2)\right) \tag{3.7}$$

同様に他の関数についても似たような方程式が得られる.

$$S_F(\lambda,\lambda',p,e_\lambda{}^2)=\frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon}\Big(-ip\cdot\gamma a(\lambda,\lambda',p,e_\lambda{}^2)+mb(\lambda,\lambda',p,e_\lambda{}^2)\Big) \quad (3.8)$$

に対して，a と b とを区別無しに s と書く：

$$s(x,y,a,e^2), \quad (3.9)$$

$$x=\frac{p^2}{\lambda^2},\qquad y=\frac{m^2}{\lambda^2},\qquad a=\frac{m^2}{\lambda'^2},\qquad e^2=e_\lambda{}^2 \quad (3.10)$$

以下では a と αe^2 は陽に書かないことにする．しからば s の方程式は，

$$\frac{s(x,y,e^2)}{s(t,y,e^2)}=\frac{s\left(\dfrac{x}{t},\dfrac{y}{t},e^2d(t,y,e^2)\right)}{s\left(1,\dfrac{y}{t},e^2d(t,y,e^2)\right)} \quad (3.11)$$

似たような式は頂点関数に対しても成り立つ．頂点関数を共変的多項式に展開し，

$$\Gamma_\mu(p,q,k)=\sum_A c_\mu^A(p,q,\gamma)\Gamma_A(p^2,q^2,k^2) \quad (3.12)$$

としてその係数関数を $\Gamma_A(x,y,z,u,e^2)$ の如く記すと，

$$\frac{\Gamma_A(x,y,z,u,e^2)}{\Gamma_A(t,y,z,u,e^2)}=\frac{\Gamma_A\left(\dfrac{x}{t},\dfrac{y}{t},\dfrac{z}{t},\dfrac{u}{t},e^2d(t,u,e^2)\right)}{\Gamma_A\left(1,\dfrac{y}{t},\dfrac{z}{t},\dfrac{u}{t},e^2d(t,u,e^2)\right)} \quad (3.13)$$

のような式が得られる．ただし変数は，

$$x=\frac{p^2}{\lambda^2},\quad y=\frac{q^2}{\lambda^2},\quad z=\frac{k^2}{\lambda^2},\quad u=\frac{m^2}{\lambda^2},\quad e^2=e_\lambda{}^2 \quad (3.14)$$

これらの式では (3.4) のような条件が使えないために，$s(1,\cdots)$，$\Gamma_A(1,\cdots)$ のような表式を消去することはできない．そこで次のような関数を導入する：

$$\Phi(y,e^2)=\left[\frac{\partial}{\partial x}d(x,y,e^2)\right]_{x=1}, \quad (3.15)$$

$$\Psi(y,e^2)=\left[\frac{\partial}{\partial x}\ln s(x,y,e^2)\right]_{x=1} \quad (3.16)$$

さて関数方程式 (3.7), (3.11) を x について微分し，$t=x$ と置くと，

$$\frac{\partial}{\partial x}e^2d(x,y,e^2)=\frac{e^2d(x,y,e^2)}{x}\Phi\left(\frac{y}{x},e^2d(x,y,e^2)\right) \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}s(x,y,e^2)=\frac{s(x,y,e^2)}{x}\Psi\left(\frac{y}{x},e^2d(x,y,e^2)\right) \quad (3.18)$$

これらを Ovsianikov の方程式と呼ぶ．共に極めて非線形な方程式であるが，

その特徴は，Φ とか Ψ とかが d と s とに対して $x=1$ における初期条件を定めるだけでなく，その微分方程式の形まで決めてしまうということである.

そこで $k^2 \gg m^2$，すなわち $x \gg y$ として y に対する依存性を無視すると，前節の結果と一致する.

1) y を無視した場合

$$\frac{\partial}{\partial x} e^2 d(x, e^2) = \frac{e^2 d(x, e^2)}{x} \Phi(e^2 d(x, e^2)), \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} s(x, e^2) = \frac{s(x, e^2)}{x} \Psi(e^2 d(x, e^2)) \tag{3.20}$$

故に，

$$\ln x = \int_{e^2}^{e^2 d(x, e^2)} \frac{dz}{z\Phi(z)} \tag{3.21}$$

この結果は，$\psi(z) = z\Phi(z)$ と置けば，(2.30) と一致する．同様にして s の方程式を解けば，

$$\ln \frac{s(x, e^2)}{s(x_0, e^2)} = \int_{e^2 d(x_0, e^2)}^{e^2 d(x, e^2)} dz \frac{\Psi(z)}{z\Phi(z)} \tag{3.22}$$

ここに摂動論の結果を記すと，

$$d(x, e^2) = 1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \ln x + \frac{e^4}{16\pi^2} \left(\frac{1}{4\pi^2} \ln x + \frac{1}{16\pi^2} \ln^2 x \right) + \cdots, \tag{3.23}$$

$$\Phi(z) = \frac{\partial}{\partial x} d(x, z) \bigg|_{x=1} = \frac{z}{12\pi^2} \left(1 + \frac{3z}{16\pi^2} + \cdots \right) \qquad (z \ll 1) \tag{3.24}$$

2) 質量殻近傍での解

s 関数は質量殻の近傍で摂動展開をすると，赤外発散と関係した発散を示す．そこで摂動論以外の解をくりこみ群の方程式に基づいて求めることにする．まず質量殻近傍に対応して，

$$x \approx 1, \qquad y = -1 \tag{3.25}$$

と置いてやると，(3.11) 式を x で微分して $t = x'$ と置くと，

$$\ln \frac{s(x, -1, e^2)}{s(x_0, -1, e^2)} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{x'} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \ln s\left(\xi, -\frac{1}{x'}, e^2 d(x', -1, e^2) \right) \right]_{\xi=1}$$

最低次では，a, b いずれに対しても

$$\approx -\frac{3e^2}{8\pi^2} \ln \frac{x-1}{x_0 - 1} \tag{3.26}$$

従って，

$$s(x, -1, e^2) \propto (x-1)^{-3e^2/8\pi^2} \tag{3.27}$$

あるいは，

$$s\left(\frac{p^2}{m^2}, e^2\right) \propto \left(1+\frac{p^2}{m^2}\right)^{-3e^2/8\pi^2} \tag{3.28}$$

一般のゲージでは，指数中の因子 3 を $(3-\alpha)$ で置き換えてやれば良い．この式の摂動展開の各項は質量殻上で発散する．

Ovsianikov の方程式は厳密であるが非線形である．そこで次に線形方程式を導出してみよう．以上ではくりこみ群の関数方程式を x について微分し，ついで $t=x$ と置いたが，今度は t について微分し，ついで $t=1$ と置く．

$$\left[\Phi(y, e^2)-\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)+e^2\Phi(y, e^2)\frac{\partial}{\partial e^2}\right]d(x, y, e^2)=0 \tag{3.29}$$

これは線形である．さて $x=k^2/\lambda^2$, $y=m^2/\lambda^2$ であったが，以後 λ を μ と書くことにする．しからば

$$-2\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)=\mu\frac{\partial}{\partial \mu} \tag{3.30}$$

そこで次の形の方程式を得る：

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(e, y)\frac{\partial}{\partial e}+2\gamma_{\rm ph}(e, y)\right]d(x, y, e^2)=0, \tag{3.31}$$

$$\beta(e, y)=e\Phi(y, e^2), \qquad \gamma_{\rm ph}(e, y)=\Phi(y, e^2) \tag{3.32}$$

§4 くりこみ群に対する線形方程式

前節で最後に与えた線形方程式の一般化を考える．そのためにくりこみの式から出発する．また例として φ^4 理論を選ぶ．

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}[(\partial_\lambda\varphi)^2+m^2\varphi^2]-g\varphi^4/4! \tag{4.1}$$

さてくりこまれていないグリーン関数に添字 0 を付けることとすると，グリーン関数のくりこみは，

$$G_0^{(n)}(p_1, \cdots, p_n\,;\,g_0)=Z_3^{n/2}(\mu)G^{(n)}(p_1, \cdots, p_n\,;\,g(\mu)) \tag{4.2}$$

ただし結合定数と四点頂点関数のくりこみは次式で与えられる：

$$g_0=Z_1(\mu)Z_3^{-2}(\mu)g(\mu), \tag{4.3}$$

$$\Gamma(p_i\,;\,g(\mu))=Z_1(\mu)\Gamma_0(p_i\,;\,g_0) \qquad (i=1, 2, 3, 4) \tag{4.4}$$

ただし Z_1, Z_3 などは，次のくりこみ条件によって定められる：

$$(p^2+m^2)G^{(2)}(p\,;\,g(\mu))|_{p^2=\mu^2}=-1, \tag{4.5}$$

$$\Gamma(p_i\,;\,g(\mu))=1, \qquad ただし\ \ p_i\cdot p_j=\frac{\mu^2}{3}(4\delta_{ij}-1) \tag{4.6}$$

四点頂点関数 Γ_0 は，くりこまれていない四点グリーン関数から伝播関数と結合定数を除いて定義される．n 点グリーン関数の定義については第 14 章§3 を参照されたい．

さてくりこまれていないグリーン関数は，くりこみ点 μ と無関係なので，

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}G_0^{(n)}(p_1,\cdots,p_n\,;\,g_0)=0 \tag{4.7}$$

この式に (4.2) を代入すると，

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial g}+n\gamma\right)G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n\,;\,g(\mu))=0 \tag{4.8}$$

ただし

$$\beta=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}g(\mu)=\left(2\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_3-\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_1\right)g(\mu), \tag{4.9}$$

$$\gamma=\frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_3 \tag{4.10}$$

これらはいずれも $m^2/\mu^2, g$ の関数である．ただし以後は $g(\mu)$ を単に g と書く．従って (4.8) をもっと詳しく書くと，

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\left(g,\frac{m^2}{\mu^2}\right)\frac{\partial}{\partial g}+n\gamma\left(g,\frac{m^2}{\mu^2}\right)\right]G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n\,;\,\mu,g)=0 \tag{4.11}$$

この方程式では，g は μ とは独立の変数として扱われている．

同様にして QED でも線形のくりこみ群の方程式を書くことができる．さて n を電磁ポテンシャルの数，m を電子場の数とすると，

$$\begin{aligned}&G_0^{(n,m)}(k_1,\cdots,k_n\,;\,p_1,\cdots,p_m\,;\,e_0)\\&=Z_3^{n/2}(\mu)Z_2^{m/2}(\mu)G^{(n,m)}(k_1,\cdots,k_n\,;\,p_1,\cdots,p_m\,;\,e(\mu))\end{aligned} \tag{4.12}$$

ただし

$$e_0{}^2=Z_3^{-1}(\mu)e^2(\mu), \tag{4.13}$$

これから

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\left(e,\frac{m^2}{\mu^2}\right)\frac{\partial}{\partial e}+n\gamma_{\rm ph}\left(e,\frac{m^2}{\mu^2}\right)+m\gamma_{\rm el}\left(e,\frac{m^2}{\mu^2}\right)\right]G^{(n,m)}(\cdots\,;\,\mu,e)=0 \tag{4.14}$$

この式は Landau ゲージにおける方程式であり，(3.19)の一般化である．更に一般的なゲージ α では，

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\left(e,\ \frac{m^2}{\mu^2}\right)\frac{\partial}{\partial e}+\delta\left(e,\ \frac{m^2}{\mu^2},\alpha\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}+\gamma^{(n,m)}\right]G^{(n,m)}(\cdots\ ;\ \mu, e, \alpha)=0, \tag{4.15}$$

$$\gamma^{(n,m)}=n\gamma_{\text{ph}}\left(e,\ \frac{m^2}{\mu^2}\right)+m\gamma_{\text{el}}\left(e,\ \frac{m^2}{\mu^2},\alpha\right) \tag{4.16}$$

前節で既に与えたように，

$$\gamma_{\text{ph}}\left(e,\ \frac{m^2}{\mu^2}\right)=\Phi\left(\frac{m^2}{\mu^2},\ e^2\right), \tag{4.17}$$

$$\beta\left(e,\ \frac{m^2}{\mu^2}\right)=e\gamma_{\text{ph}}\left(e,\ \frac{m^2}{\mu^2}\right),\qquad \delta\left(e,\ \frac{m^2}{\mu^2},\alpha\right)=-2\alpha\gamma_{\text{ph}}\left(e,\ \frac{m^2}{\mu^2}\right) \tag{4.18}$$

最後の表式は，(11.4.8) から出される．この節で出されたくりこみ群の方程式は，線形で斉次であるが，係数が二変数の関数で扱い難い．これに反して次節で導入する Callan-Symanzik の方程式では，係数が一変数関数となるが，その代り非斉次となる．

§5 Callan-Symanzik 方程式

今まで第一種のくりこみ群を考えていたが，本節では第二種に移る．すなわち粒子の質量そのものを変えるということを導入するのである．

まずグリーン関数のフーリエ変換を定義しておく．$(dp)=d^4p_1\cdots d^4p_n$ として

$$\begin{aligned}&\langle 0|T[\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]|0\rangle_{\text{conn}}\\&=\left[\frac{i}{(2\pi)^4}\right]^{n-1}\int(dp)\,e^{i(p_1\cdot x_1+\cdots+p_n\cdot x_n)}\,\delta^4(p_1+\cdots+p_n)G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n),\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}&\langle 0|T[A(x)\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]|0\rangle_{\text{conn}}\\&=\left[\frac{i}{(2\pi)^4}\right]^{n}\int d^4q(dp)e^{i(q\cdot x+p_1\cdot x_1+\cdots+p_n\cdot x_n)}\delta^4(q+p_1+\cdots+p_n)A^{(n)}(q\ ;\ p_1,\cdots,p_n)\end{aligned} \tag{5.2}$$

まずくりこまれていない理論から出発する．そして次の量を導入する：

$$T^{(0)}(x)=m_0{}^2(\boldsymbol{\varphi}^{(0)}(x))^2 \tag{5.3}$$

さて最低次では，

$$G_0^{(2)}(p)=-\frac{1}{p^2+m_0{}^2-i\varepsilon} \tag{5.4}$$

従って,

$$m_0\frac{\partial}{\partial m_0}\left(-\frac{1}{p^2+m_0{}^2-i\varepsilon}\right)=\frac{1}{p^2+m_0{}^2-i\varepsilon}2m_0{}^2\frac{1}{p^2+m_0{}^2-i\varepsilon} \qquad (5.5)$$

この式は，くりこまれていない形式において m_0 による微分が $T^{(0)}$ を挿入することと同値であることを意味している．すなわち,

$$m_0\frac{\partial}{\partial m_0}G_0^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)=T_0^{(n)}(0\,;p_1,\cdots,p_n)\equiv \varDelta G_0^{(n)}(p_1,\cdots,p_n) \quad (5.6)$$

次に質量殻上でのくりこみを考える:

$$G_0^{(n)}(p_1,\cdots,p_n\,;g_0)=Z_3^{n/2}G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n\,;g) \qquad (5.7)$$

以後 m, g などのくりこまれた量はすべて m_0, g_0, 切断運動量 $\varLambda$ の関数と考えて，g_0 と $\varLambda$ を固定した場合の m_0 についての微分を考える．まず,

$$Zm_0\frac{\partial m}{\partial m_0}=m \qquad (5.8)$$

により Z を定義する．しからば g と m との関数 f に対して,

$$Zm_0\frac{\partial}{\partial m_0}f=\left(Zm_0\frac{\partial m}{\partial m_0}\cdot\frac{\partial}{\partial m}+Zm_0\frac{\partial g}{\partial m_0}\cdot\frac{\partial}{\partial g}\right)f\equiv\mathscr{D}f \qquad (5.9)$$

ただし,

$$\mathscr{D}=m\frac{\partial}{\partial m}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}, \qquad \beta(g)=Zm_0\frac{\partial g}{\partial m_0} \qquad (5.10)$$

従って新しく T を次式で定義する:

$$T(x)=Zm_0{}^2(\varphi^{(0)}(x))^2 \qquad (5.11)$$

しからば Callan-Symanzik 方程式（1970）が得られる．

$$\left[m\frac{\partial}{\partial m}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+n\gamma_\varphi(g)\right]G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)=T^{(n)}(0\,;p_1,\cdots,p_n), \quad (5.12)$$

ただし γ_φ は φ 場の異常次元と呼ばれ，次式で定義される:

$$\gamma_\varphi(g)=\frac{1}{2}Zm_0\frac{\partial}{\partial m_0}\ln Z_3 \qquad (5.13)$$

そこで φ^2 を適当に乗法的にくりこんだものを S と記し，T を書き直す．

$$T(x)=m^2S(x) \qquad (5.14)$$

そこで $n=2$ の時の $p^2+m^2=0$ における極に着目し，$(p^2+m^2)^2$ を $n=2$ に対応する（5.12）に乗じて $p^2+m^2\to 0$ という極限をとると左辺は $2m^2$ になる．従って右辺も $2m^2$ にならなければならない．LSZ の簡約公式を用いると，S は

$$\sqrt{2p_0}\langle \boldsymbol{p}|S(x)|\boldsymbol{p}\rangle\sqrt{2p_0}=1 \tag{5.15}$$

というくりこみ条件を満たすことになる．

次に質量多重挿入項を定義する．$G^{(n)}$ に T を k 回挿入したものを $\Delta^k G^{(n)}$ と記すことにすると

$$[\mathcal{D}+n\gamma_\varphi(g)-k(2-\gamma_S(g))]\Delta^k G^{(n)}=\Delta^{k+1}G^{(n)} \tag{5.16}$$

ただし

$$\gamma_S(g)=Zm_0\frac{\partial}{\partial m_0}\ln Z_S, \quad (\varphi^{(0)}(x))^2=Z_S S(x) \tag{5.17}$$

他方くりこまれていない質量多重挿入項は,

$$\Delta^k G_0^{(n)}=(2m_0{}^2)^k\left(\frac{\partial}{\partial m_0{}^2}\right)^k G_0^{(n)} \tag{5.18}$$

そしてそのくりこみは

$$\Delta^k G^{(n)}=Z^k Z_3^{-n/2}\Delta^k G_0^{(n)} \tag{5.19}$$

この式を Callan-Symanzik 方程式に代入すると,

$$\gamma_S(g)=2(1-Z)-m_0\frac{\partial}{\partial m_0}Z \tag{5.20}$$

さて摂動論によると,

$$\beta(g)=\frac{3g^2}{16\pi^2}, \qquad \gamma_\varphi(g)=\frac{g^2}{12(16\pi^2)^2}, \qquad \gamma_S(g)=-\frac{g}{16\pi^2} \tag{5.21}$$

第一種の場合と比べての利点は，β や γ_φ が g のみの関数となることである．そして欠点は，方程式が非斉次となることである．しかしながら $p_i{}^2\gg m^2$ とすると，$\Delta G^{(n)}$ は $G^{(n)}$ に比べて運動量依存性が運動量の 2 乗だけ落ちるので，$\Delta G^{(n)}$ を $G^{(n)}$ に比して無視すると,

$$[\mathcal{D}+n\gamma_\varphi(g)]G^{(n)}\approx 0 \tag{5.22}$$

となり斉次となる．同様に $\mu^2\gg m^2$ とすると，第一種の場合でも係数関数の m^2/μ^2 依存性が落ちて，g のみの関数となる．そして両者は一致する．

次に QED に移ろう．まずくりこみは,

$$G_0^{(n,m)}=Z_3^{n/2}Z_2^{m/2}G^{(n,m)}, \tag{5.23}$$

$$\Delta^k G_0^{(n,m)}=m_0{}^k\left(\frac{\partial}{\partial m_0}\right)^k G_0^{(n,m)}=Z^{-k}Z_3^{n/2}Z_2^{m/2}\Delta^k G^{(n,m)}, \tag{5.24}$$

$$Zm_0\frac{\partial}{\partial m_0}m=m \tag{5.25}$$

ただし m_0 について微分する時には，e_0, α_0, Λ を固定しておくものとする．そして次の量を定義する：

$$\beta(e)=Zm_0\frac{\partial e}{\partial m_0},$$

$$\gamma_{\rm el}(e,\alpha)=\frac{1}{2}Zm_0\frac{\partial}{\partial m_0}\ln Z_2,$$

$$\gamma_{\rm ph}(e)=\frac{1}{2}Zm_0\frac{\partial}{\partial m_0}\ln Z_3,$$

$$\delta(e,\alpha)=Zm_0\frac{\partial}{\partial m_0}\alpha \tag{5.26}$$

これを Ward の恒等式

$$e^2=Z_3e_0{}^2,\qquad e^2\alpha=e_0{}^2\alpha_0 \tag{5.27}$$

と組み合わせると (4.18) に対応して次式を得る：

$$\beta(e)=e\gamma_{\rm ph}(e),\qquad \delta(e,\alpha)=-2\alpha\gamma_{\rm ph}(e) \tag{5.28}$$

そこで次の微分演算子を導入する：

$$\mathscr{D}=m\frac{\partial}{\partial m}+\beta(e)\frac{\partial}{\partial e}-2\alpha\gamma_{\rm ph}(e)\frac{\partial}{\partial \alpha} \tag{5.29}$$

しからば QED での Callan-Symanzik 方程式は

$$[\mathscr{D}+\gamma^{(n,m)}-k(1-\gamma_S)]\Delta^kG^{(n,m)}=\Delta^{k+1}G^{(n,m)} \tag{5.30}$$

この場合に T として $m(\overline{\psi}\psi)_R$ が挿入されることになる．$(\overline{\psi}\psi)_R$ は $\overline{\psi}\psi$ を適当に乗法的にくりこんだ量でそのくりこみ条件は，

$$\langle \boldsymbol{p}|(\overline{\boldsymbol{\psi}}(x)\boldsymbol{\psi}(x))_R|\boldsymbol{p}\rangle=\overline{u}(p)u(p) \tag{5.31}$$

ただし u は，$u^\dagger(p)u(p)=1$ により規格化されているものとする．

一般にくりこみは乗法的のみでなく一次変換になることがある．

$$O_i^{(0)}=\sum_j Z_{ij}O_j \tag{5.32}$$

グリーン関数にすると，

$$O_{i(0)}^{(n,m)}=\sum_j Z_3^{n/2}Z_2^{m/2}Z_{ij}O_j^{(n,m)} \tag{5.33}$$

しからば，

$$[\mathscr{D}+\gamma^{(n,m)}-k(1-\gamma_S)]\Delta^kO_i^{(n,m)}+\sum_j\gamma_{ij}\Delta^kO_j^{(n,m)}=\Delta^{k+1}O_i^{(n,m)} \tag{5.34}$$

ただし

$$\gamma_S = 1 - Z - m_0 \frac{\partial Z}{\partial m_0}, \qquad \gamma_{ij} = \sum_k Z_{ik}^{-1}\left(Z m_0 \frac{\partial}{\partial m_0} Z_{kj}\right) \tag{5.35}$$

QED の最低次では

$$\beta = \frac{e^3}{12\pi^2}, \quad \gamma_{\rm ph} = \frac{e^2}{12\pi^2}, \quad \gamma_{\rm el} = \frac{e^2}{16\pi^2}\alpha, \quad \gamma_S = -\frac{3e^2}{8\pi^2} \tag{5.36}$$

次に電子の質量を乗法的にくりこむことを考えてみよう．これは自己エネルギーの発散が対数的な時にのみ可能である．

$$Z_m = \frac{m}{m_0}, \qquad \gamma_m = Z m_0 \frac{\partial}{\partial m_0} \ln Z_m \tag{5.37}$$

しからば定義から直ちに

$$\gamma_m = 1 - Z \tag{5.38}$$

従って，γ_m を e のみの関数とすれば，

$$\begin{aligned}\gamma_S &= 1 - Z - Z m_0 \frac{\partial}{\partial m_0} \ln Z \\ &= 1 - Z - Z m_0 \frac{\partial}{\partial m_0} \ln(1-\gamma_m) \\ &= \gamma_m - \mathscr{D} \ln(1-\gamma_m) \\ &= \gamma_m - \beta(e) \frac{\partial}{\partial e} \ln(1-\gamma_m)\end{aligned} \tag{5.39}$$

あるいは

$$\beta \frac{d\gamma_m}{de} = (1-\gamma_m)(\gamma_S - \gamma_m) \tag{5.40}$$

従って Z の方程式は

$$\left[\beta \frac{d}{de} + (1-\gamma_S)\right] Z^{-1}(e) = 1, \qquad Z(0) = 1 \tag{5.41}$$

これから Z は e のみの有限な関数であることが分かる．

§6　斉次 Callan-Symanzik 方程式

前節で導入した Callan-Symanzik 方程式は非斉次であり，かつ $G^{(n)}$, $\Delta G^{(n)}$, …の無限個の関数の連立方程式である．これを斉次の閉じた形の方程式に書き直すことを試みる．これは可能であるが，代償として独立変数の数が一つ増える．

無限個の関数をまとめて書くには母関数を導入する．

$$G^{(n)}(p_1, \cdots, p_n ; m^2, g, K) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{K^j}{j!} \Delta^j G^{(n)}(p_1, \cdots, p_n ; m^2, g), \tag{6.1}$$

$$\tilde{\mathscr{D}} = \mathscr{D} - [1 + (2 - \gamma_S(g))K] \frac{\partial}{\partial K} \tag{6.2}$$

しからば (5.16) より

$$[\tilde{\mathscr{D}} + n\gamma_\varphi(g)] G^{(n)}(p_1, \cdots, p_n ; m, g, K) = 0 \tag{6.3}$$

これで第一種の時と同様に斉次となった．また独立変数の数も一致する．第一種の場合には μ, g, m であり，第二種の場合には m, g, K である．従って適当な変数変換により両者はお互いに移り変われるはずである．このことは，東島と著者 (1980) により示された．

同様に QED では，

$$G^{(n,m)}(p_i ; m, e, K) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{K^j}{j!} \Delta^j G^{(n,m)}(p_i ; m, e), \tag{6.4}$$

$$\tilde{\mathscr{D}} = \mathscr{D} - [1 + (1 - \gamma_S(e)) K] \frac{\partial}{\partial K} \tag{6.5}$$

とすれば，

$$[\tilde{\mathscr{D}} + \gamma^{(n,m)}] G^{(n,m)}(p_i ; m, e, K) = 0. \tag{6.6}$$

さて無限小のくりこみ群の変換は，無限小パラメター $\delta\rho$ に対応して m, g, K の関数 Q を次のように変化させる：(スカラー理論)

$$\delta Q = (\tilde{\mathscr{D}} Q) \delta\rho \tag{6.7}$$

具体的には，

$$\delta m = m\delta\rho, \qquad \delta g = \beta(g)\delta\rho, \qquad \delta K = -[1 + (2 - \gamma_S(g))K]\delta\rho \tag{6.8}$$

これから分かるように m は固定されていない．これは第二種の特色である．さてグリーン関数の応答は，方程式 (6.3) より

$$\delta G^{(n)} = -n\gamma_\varphi(g) G^{(n)} \delta\rho \tag{6.9}$$

そこで有限変換を惹起する演算子は

$$R_\rho = \exp(\rho \tilde{\mathscr{D}}) \tag{6.10}$$

この演算子は次の意味で群をなす：

$$R_\rho R_{\rho'} = R_{\rho + \rho'} \tag{6.11}$$

そこで

$$R_\rho[g] = \bar{g}(\rho), \qquad R_\rho[K] = \bar{K}(\rho), \qquad R_\rho[m] = me^\rho \tag{6.12}$$

と置く．その意味は，例えば $\bar{g}(\rho)$ は(6.8) を $\bar{g}(0)=g$ という初期条件で解いたものである．しからば，(6.9) より，

$$G^{(n)}(p_i\,;\,m,g,K)=\exp\left[n\int_0^\rho d\rho'\gamma_\varphi(\bar{g}(\rho'))\right]G^{(n)}(p_i\,;\,me^\rho,\bar{g}(\rho),\bar{K}(\rho)) \quad (6.13)$$

ところで次元解析より

$$G^{(n)}(p_i\,;\,me^\rho,\bar{g}(\rho),\bar{K}(\rho))=e^{(4-3n)\rho}G^{(n)}(p_ie^{-\rho},m,\bar{g}(\rho),\bar{K}(\rho)) \quad (6.14)$$

この二式を組み合わせると，グリーン関数の大運動量に対するふるまいが分かる．

さて m はくりこみ群の不変量ではないのでグリーン関数に極として現れる物理的質量ではない．特に K は質量をずらしてしまうパラメターである．そこで適当なくりこみ群の変換をして K を消してみよう．すなわち，

$$\bar{K}(\rho)=0 \quad (6.15)$$

により ρ を定める．しからばこの ρ に対して $\bar{m}(\rho)=me^\rho$ が物理的質量となる．この時に，(6.13) 式は

$$G^{(n)}(p_i\,;\,m,g,k)=Z^nG^{(n)}(p_i\,;\,\bar{m},\bar{g},0) \quad (6.16)$$

そこで左辺に $(\tilde{\mathscr{D}}+n\gamma_\varphi)$ を作用させると消えるから，右辺も同様に消えるはずである．

$$\left[(\tilde{\mathscr{D}}\bar{m})\frac{\partial}{\partial\bar{m}}+(\tilde{\mathscr{D}}\bar{g})\frac{\partial}{\partial\bar{g}}+n\bar{\gamma}_\varphi\right]G^{(n)}(p_i\,;\,\bar{m},\bar{g},0)=0, \quad (6.17)$$

$$\bar{\gamma}_\varphi=\gamma_\varphi+\tilde{\mathscr{D}}(\ln Z) \quad (6.18)$$

ところが $\bar{m}$ と $\bar{g}$ の二変数だけで斉次方程式は書けないはずであるから，

$$\tilde{\mathscr{D}}\bar{m}=0,\qquad \tilde{\mathscr{D}}\bar{g}=0,\qquad \bar{\gamma}_\varphi=0 \quad (6.19)$$

すなわち物理的質量 $\bar{m}$ はくりこみ群に対して不変量となる．そこで

$$\bar{m}^2=m^2F(g,K),\qquad F(g,0)=1 \quad (6.20)$$

と置けば，

$$\left[\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}-(1+(2-\gamma_S(g))K)\frac{\partial}{\partial K}+2\right]F(g,K)=0 \quad (6.21)$$

この式から物理的質量の g と K に対する依存性が定まる．

なお今までくりこみ群の方程式を G に対して与えたが，しばしば第 14 章の §3 で導入した一粒子既約な Γ に対して与えられている．そこで Γ に対する方程式を導入しよう．まず質量挿入項を含む母汎関数を導入する．

$$\mathcal{T}[J]=\langle 0|T\exp\left[-i\int d^4x(J(x)\boldsymbol{\varphi}(x)+Km^2S(x))\right]|0\rangle, \qquad (6.22)$$

$$\mathcal{T}[J]=\exp(-iW[J]), \qquad \Gamma=W-\int d^4xJ(x)\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle \qquad (6.23)$$

しからば $W[J]$ は G の母汎関数であるので (6.3) は次の形に書ける：

$$\left[\tilde{\mathcal{D}}+\gamma_\varphi(g)\int d^4xJ(x)\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]W[J]=0 \qquad (6.24)$$

さて W の変分は，

$$\delta W=\left(\frac{\partial W}{\partial m}\right)_J\delta m+\left(\frac{\partial W}{\partial g}\right)_J\delta g+\left(\frac{\partial W}{\partial K}\right)_J\delta K+\int d^4x\frac{\delta W}{\delta J(x)}\delta J(x) \qquad (6.25)$$

ところで第 14 章 §3 で見たように

$$\frac{\delta W}{\delta J(x)}=\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle, \qquad \frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle}=-J(x) \qquad (6.26)$$

従って (6.23) を用いて $\delta\Gamma$ を計算すると

$$\delta\Gamma=\left(\frac{\partial W}{\partial m}\right)_J\delta m+\left(\frac{\partial W}{\partial g}\right)_J\delta g+\left(\frac{\partial W}{\partial K}\right)_J\delta K+\int d^4x\,\delta\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle} \qquad (6.27)$$

従って

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial m}\right)_{\langle\varphi\rangle}=\left(\frac{\partial W}{\partial m}\right)_J, \qquad \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right)_{\langle\varphi\rangle}=\left(\frac{\partial W}{\partial g}\right)_J, \qquad \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial K}\right)_{\langle\varphi\rangle}=\left(\frac{\partial W}{\partial K}\right)_J \qquad (6.28)$$

また，

$$\int d^4x\,J(x)\frac{\delta W}{\delta J(x)}=-\int d^4x\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle} \qquad (6.29)$$

そこで (6.28) と (6.29) とを用いて (6.24) を書き直すと，

$$\left[\tilde{\mathcal{D}}-\gamma_\varphi(g)\int d^4x\,\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle\frac{\delta}{\delta\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle}\right]\Gamma[\langle\boldsymbol{\varphi}(x)\rangle]=0 \qquad (6.30)$$

そこで個々の Γ 関数に対するくりこみ群の方程式は，

$$[\tilde{\mathcal{D}}-n\gamma_\varphi(g)]\Gamma^{(n)}(p_1,\cdots,p_n\,;m,g,K)=0 \qquad (6.31)$$

この式を (6.3) と比べると，γ_φ の係数の符号が逆になっている．

今まで第一種と第二種のくりこみ群をスカラー理論と QED について調べてきた．しかしくりこみ群が本当に偉力を発揮するのは非可換ゲージ理論においてである．その理由は，クォークの強い相互作用は第 12 章で触れたように，

SU(3) をゲージ群とする非可換ゲージ理論によって記述されると信じられているからである．それともう一つの理由は，非可換ゲージ理論は他の相互作用にない極めて特徴的な性質を持っており，高エネルギーで有効相互作用が弱くなり，従って摂動論の結果が応用できるからである．この性質を漸近的自由性と呼び，そのくりこみ群の方程式が実験との比較を容易にする．

第12章で述べたクォークの特徴的な性質がくりこみ群の方程式を用いて半定量的に説明されることになる．

§7 非可換ゲージ理論におけるくりこみ群

(18.1.10) と (18.4.15) とを組み合わせると，

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle 0|T[A_\mu^a(x)A_\nu^b(y)]|0\rangle=\alpha\delta_{ab}\frac{\partial}{\partial x_\nu}D_F(x-y) \tag{7.1}$$

この式はくりこまれた量に対してもくりこまれていない量に対しても同形である．すなわちゲージ場の縦波部分はくりこみを受けない．そこで横波部分とゴースト場の伝播関数とをくりこまれていない形で書く．

$$D_0^{\mathrm{tr}}(k)_{\mu\nu}=\frac{1}{k^2-i\varepsilon}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-i\varepsilon}\right)d_0(k^2), \tag{7.2}$$

$$\langle 0|T[c^a(x),\bar{c}^b(y)]|0\rangle=\delta_{ab}\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{ik\cdot(x-y)}G_0(k^2) \tag{7.3}$$

そして次のくりこみ定数を導入する：

$$Z_3=d_0(\mu^2),\qquad \tilde{Z}_3=G_0(\mu^2) \tag{7.4}$$

また頂点関数に対応するくりこみ定数も次式で導入する：

ゲージ場：

$$\Gamma_0^{abc}(p,q,r)_{\lambda\mu\nu}|_{p^2=q^2=r^2=\mu^2}=Z_1^{-1}\Gamma_{\mathrm{bare}}^{abc}(p,q,r)_{\lambda\mu\nu}|_{p^2=q^2=r^2=\mu^2}, \tag{7.5}$$

ゴースト場：

$$\Gamma_0^{abc}(p\,;q,r)_\lambda|_{p^2=q^2=r^2=\mu^2}=\tilde{Z}_1^{-1}\Gamma_{\mathrm{bare}}^{abc}(p\,;q,r)_\lambda|_{p^2=q^2=r^2=\mu^2} \tag{7.6}$$

ただし bare とは Born 近似での頂点関数で第17章の§5で与えられたものから g を除いたものを意味する．さて第18章§4で導入した Slavnov-Taylor の恒等式を $\langle c\rangle$, $\langle A\rangle$, $\langle A\rangle$ について汎関数微分して外場を0と置くと，

$$Z_3/Z_1=\tilde{Z}_3/\tilde{Z}_1 \tag{7.7}$$

を証明することができる．証明の詳細は省略するが，この式も Slavnov-Taylor

の恒等式と呼ばれる．またゲージ・パラメターと結合定数のくりこみは

$$\alpha_0 = Z_3\alpha, \qquad g_0 = Z_1 Z_3^{-3/2} g. \tag{7.8}$$

次にゲージ場に対する n 点グリーン関数を考えると，そのくりこみは

$$G_0^{(n)}(p_1, \cdots, p_n) = Z_3^{n/2} G^{(n)}(p_1, \cdots, p_n) \tag{7.9}$$

ただしベクトル添字は省略してある．さて左辺は g_0, α_0, Λ の関数であり，右辺は g, α, μ の関数である．左辺はくりこみ点 μ によらないから

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu} G_0^{(n)}(p_1, \cdots, p_n) = 0 \tag{7.10}$$

これから§4の議論と同様にして

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g,\alpha)\frac{\partial}{\partial g} + \delta(g,\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha} + n\gamma_V(g,\alpha)\right] G^{(n)}(p_1, \cdots, p_n) = 0 \tag{7.11}$$

$$\beta(g,\alpha) = \mu\frac{\partial g}{\partial\mu}\bigg|_{g_0,\alpha_0,\Lambda}, \quad \gamma_V(g,\alpha) = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_3^{1/2}\bigg|_{g_0,\alpha_0,\Lambda},$$

$$\delta(g,\alpha) = \mu\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}\bigg|_{g_0,\alpha_0,\Lambda} = -2\alpha\gamma_V(g,\alpha) \tag{7.12}$$

さて以上に出てきたパラメターで次元のあるのは μ と Λ とである．従って g, Z_3, α などは Λ/μ の関数となるので

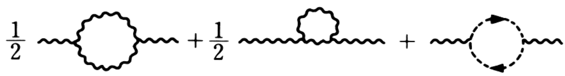
$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu} f(\Lambda/\mu) = -\frac{\partial}{\partial\ln\Lambda} f(\Lambda/\mu)$$

さて最低次では Z 因子は1になるから，

$$\beta = -g\frac{\partial}{\partial\ln\Lambda}\left(\frac{Z_3^{3/2}}{Z_1}\right), \qquad \gamma_V = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\ln\Lambda} Z_3 \tag{7.13}$$

従って Z_1, Z_3 の $\ln\Lambda$ の係数が知られれば良い．

Z_3 を計算するには次の Feynman 図形を考えれば良い：



ただし はグルーオン， はゴーストを表わす．その結果は

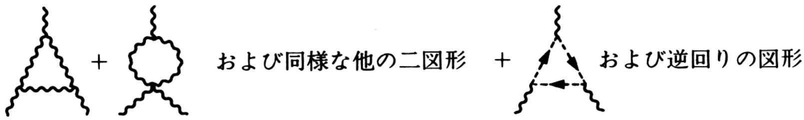
$$Z_3 = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2}\left(\frac{13}{3} - \alpha\right) C_2(G) \ln\Lambda \tag{7.14}$$

ただし

$$\sum_{c,d} f_{acd} f_{bcd} = \delta_{ab} C_2(G) \tag{7.15}$$

特に SU(N) に対しては $C_2(G) = N$ となる．

Z_1 を計算するには，



その結果は

$$Z_1=1+\frac{g^2}{16\pi^2}\left(\frac{17}{6}-\frac{3}{2}\alpha\right)C_2(G)\ln\Lambda \tag{7.16}$$

同様にしてゴーストに対する Z 因子は

$$\tilde{Z}_3=1+\frac{g^2}{16\pi^2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\alpha\right)C_2(G)\ln\Lambda, \tag{7.17}$$

$$\tilde{Z}_1=1+\frac{g^2}{16\pi^2}(-\alpha)C_2(G)\ln\Lambda \tag{7.18}$$

従って

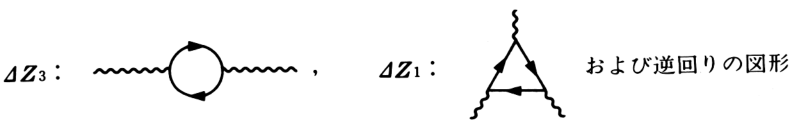
$$\beta(g,\alpha)=-\frac{g^3}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3}\right)C_2(G), \tag{7.19}$$

$$\gamma_V(g,\alpha)=-\frac{g^2}{32\pi^2}\left(\frac{13}{3}-\alpha\right)C_2(G) \tag{7.20}$$

フェルミオンがある時には，Z_1 と Z_3 とに対するその寄与は，

$$\Delta Z_1=\Delta Z_3=-\frac{g^2}{8\pi^2}\,\frac{4}{3}T(R)\ln\Lambda \tag{7.21}$$

対応する Feynman 図形は，



ただし

$$\mathrm{Tr}(t^a t^b)=\delta_{ab}T(R), \qquad rT(R)=d(R)C_2(R) \tag{7.22}$$

ここに r は生成演算子数であり，$d(R)$ は表現の次元である．$C_2(R)$ は第 12 章 §2 において定義されている．SU(N) に対して N 次元の基本表現に対しては，

$$T(R)=\frac{1}{2}, \qquad C_2(R)=\frac{N^2-1}{2N} \tag{7.23}$$

そこですべてのフェルミオンが基本表現に従うとし，その種類，すなわちフレーバーの数を n_f とすると，

$$\beta=-\frac{g^3}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}n_f T(R)\right),\tag{7.24}$$

$$\gamma_V=-\frac{g^2}{32\pi^2}\left[\left(\frac{13}{3}-\alpha\right)C_2(G)-\frac{8}{3}n_f T(R)\right]\tag{7.25}$$

この結果は，Gross と Wilczek (1973)，および Politzer (1973) による．

§8　漸近的自由性

第12章§8においてパートン模型につき述べた．その際にクォーク間の相互作用は近距離で弱くなり，ハドロン中のクォークはほとんど自由であることを結論した．この節では，カラー SU(3) 群に基づいた QCD がこの性質を持つことを証明しよう．

第一種でも第二種でもくりこみ群の要素は R_ρ と書くことができる．無限小変換は ρ を変換のパラメターとした時に，

$$\delta\mu=\mu\delta\rho,\qquad \delta g=\beta(g)\delta\rho\tag{8.1}$$

の如く表わすことができる．そこで $\rho\to\pm\infty$ という極限で，g が一定の極限値 $g_{\pm\infty}$ に近付くかどうかを考えてみよう．一定値に近付く時に，$g_\infty, g_{-\infty}$ をそれぞれ紫外安定点，赤外安定点と呼ぶ．この時に

$$\beta(g_\infty)=0,\qquad あるいは\qquad \beta(g_{-\infty})=0\tag{8.2}$$

特に g が小さい時に，$\beta(g)=-bg^3$ $(b>0)$ ならば，$\rho\to\infty$ の極限で $g=0$ となる．このような理論は漸近的に自由であると呼ばれる．その例は，非可換ゲージ理論，$g<0$ の時の $g\phi^4$ 理論，6次元の ϕ^3 理論などである．

さて非可換ゲージ理論では，$\rho=0$ で $g=g_0$ として，小さい g に対して

$$\delta g=-bg^3\delta\rho\qquad (b>0)\tag{8.3}$$

を解くと，

$$\frac{1}{\bar{g}^2(\rho)}=\frac{1}{{g_0}^2}+2b\rho.\tag{8.4}$$

さて QCD が漸近的に自由であるとするとどのようなことが期待されるかについて調べてみよう．

1)　電子・陽電子衝突

電子・陽電子衝突は漸近的自由性を調べる一つの材料を提供する．そこで j_μ をハドロンに対する四元電流密度とする．しからば第8章§4で与えた計算で

この j_μ を使って (4.18), (4.19) により $\Pi(s)$ を定義できる．そこで e について最低次を考え，s が大きいとすると (4.18) が得られる．

さてくりこみ群に出てきた電磁場の d 関数は，レプトンを含む Π に対して

$$d=1-\Pi \tag{8.5}$$

と書くことができる．ところで QCD+QED においては

$$(\mathcal{D}+2\gamma_{\rm ph})d=0 \tag{8.6}$$

ただし QCD, QED のいずれに対しても Landau ゲージを採用すると，

$$\mathcal{D}=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta_e\frac{\partial}{\partial e}+\beta_g\frac{\partial}{\partial g} \tag{8.7}$$

ところで Π も $\gamma_{\rm ph}$ も e^2 のオーダーであり，e^4 のオーダーを省略するならば $\gamma_{\rm ph}\Pi$ および $\beta_e\partial/\partial e$ は省略できることになるので，(8.6) 式にこの近似を適用して (8.5) を用いると，

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right)\Pi=2\gamma_{\rm ph} \tag{8.8}$$

特に虚数部をとれば，

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right){\rm Im}\,\Pi\left(\frac{s}{\mu^2},\frac{m^2}{\mu^2},g\right)=0 \tag{8.9}$$

QED の最低次では

$${\rm Im}\,\Pi=\frac{1}{3}\sum_i\left(\frac{Q_i{}^2}{4\pi}\right)\left(1+\frac{2m_i{}^2}{s}\right)\sqrt{1-\frac{4m_i{}^2}{s}}\rightarrow\frac{1}{3}\sum_i\left(\frac{Q_i{}^2}{4\pi}\right)\quad(s\rightarrow\infty\text{に対して}) \tag{8.10}$$

そこで次の Drell 比と称する量を導入する：

$$R(s)=\frac{\sigma(e^++e^-\rightarrow{\rm hadrons})}{\sigma(e^++e^-\rightarrow\mu^++\mu^-)}$$

再び最低次では，$s\rightarrow\infty$ に対して，次のスケール則を得ることができる：

$$R\rightarrow\sum_i Q_i{}^2/e^2 \tag{8.11}$$

さて高エネルギーで，$s\gg\mu^2\gg m^2$ において $m^2/\mu^2\rightarrow 0$ と置く．しからば Π は無次元なので，

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right){\rm Im}\,\Pi\left(\frac{s}{\mu^2},g\right)=0 \tag{8.12}$$

この方程式より，

$$\mathrm{Im}\,\Pi\left(\frac{s}{\mu^2}, g\right)=\mathrm{Im}\,\Pi\left(\frac{s_0}{\mu^2}, \bar{g}(\rho)\right) \qquad (s=s_0e^{2\rho}) \tag{8.13}$$

ρが大きければ，QCDでは$\bar{g}(\rho)\to 0$となるから，

$$\mathrm{Im}\,\Pi\left(\frac{s_0}{\mu^2}, \bar{g}(\rho)\right)=\mathrm{Im}\,\Pi\left(\frac{s_0}{\mu^2}, 0\right)(1+B\bar{g}^2(\rho)+\cdots) \tag{8.14}$$

そこで（8.4）の解を次の形に書く：

$$\bar{g}^2(\rho)=\left(b\ln\frac{s}{\Lambda^2}\right)^{-1}, \qquad \Lambda^2=s_0\exp\left(-\frac{1}{bg_0{}^2}\right) \tag{8.15}$$

またSU(3)では

$$C_2(G)=3, \qquad T(R)=\frac{1}{2}, \qquad C_2(R)=\frac{4}{3} \tag{8.16}$$

であるので，

$$b=\frac{1}{16\pi^2}(11-2n_f), \qquad B=\frac{3}{16\pi^2}C_2(R)=\frac{1}{4\pi^2} \tag{8.17}$$

そこで$s_0/\mu^2\gg 1$とすると，高エネルギーでは

$$\mathrm{Im}\,\Pi\left(\frac{s}{\mu^2}, g\right)=\frac{1}{12\pi}\sum_i Q_i{}^2\left(1+\frac{C_i}{\ln(s/\Lambda^2)}+\cdots\right) \tag{8.18}$$

ただし

$$C_i=\begin{cases} B/b=12/(33-2n_f) & (\text{クォーク}) \\ 0 & (\text{レプトン}) \end{cases} \tag{8.19}$$

従って，δ_{iq}はクォークに対して1，レプトンに対して0とすると，

$$R(s)=\sum_i (Q_i{}^2/e^2)\left(1+\frac{12}{33-2n_f}\cdot\frac{\delta_{iq}}{\ln(s/\Lambda^2)}+\cdots\right) \tag{8.20}$$

すなわち$s\to\infty$に対してRは定数に近付く．これをスケール則と呼ぶ．またハドロンへの全断面積はsに反比例することになる．ここでQ_iのiは，クォークについてはフレイバーとカラーの両者について加えることになるので，三種類のカラーがあることを考慮すると，フレイバーについての和に直して，

$$\sum_i Q_i{}^2=3\sum_f Q_f{}^2+\sum_l Q_l{}^2 \qquad (f：\text{フレイバー},\ l：\text{レプトン}) \tag{8.21}$$

ただし（8.20）の補正項はクォークのみに適用するものとする．このスケール則は実験と良く一致し，カラーが三種類あることを支持している．

この議論と良く似たものにτ^-崩壊の分岐比がある．τの質量が1784 MeVで大きいことを考慮するとやはりスケール則が適用され

$$\tau^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau, \quad \tau^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau, \quad \tau^- \to d' + \bar{u} + \nu_\tau \text{ (3色)} \tag{8.22}$$

に同じ確率で生ずると考えられる．従ってτがハドロンに崩壊する分岐比は3/5になると期待される．実験は0.64である．

2) Bjorkenのスケール則

第12章§8で議論したBjorkenのスケール則を漸近的自由性に基づいて解釈してみよう．ただし厳密な議論にはWilsonの演算子積展開という複雑な手続きが必要なので，ここでは筋道を記すに止める．

$x^2=0$の近傍では，電流密度は次の形に展開される：

$$j_\mu\left(\frac{x}{2}\right)j_\nu\left(-\frac{x}{2}\right) \sim \sum_n C^{(n)}(x^2, g)x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_n} O^{(n)}_{\mu\nu;\mu_1\cdots\mu_n}(0) \tag{8.23}$$

これをWilsonの演算子積展開と呼ぶ．さてこの式の一核子状態での期待値をとり，フーリエ変換を行うと構造関数$F_i(x, q^2)$が得られる．ここに$O^{(n)}$は，局所演算子で$\mu_1, \cdots, \mu_n$につき対称であり，かつ任意の添字についての縮約は消えるように選んである．さてQ^2の代りにq^2と書くと，$x=q^2/2M\nu$である．

q^2を非常に大きく選ぶと，次の式が成立する：

$$\int_0^1 dx\, F_i(x, q^2)x^{n-2} \sim \overline{C}_i^{(n)}(q^2, g)\langle P|O^{(n)}|P\rangle \tag{8.24}$$

ただし$\overline{C}^{(n)}$は$C^{(n)}$のフーリエ変換である．

さてj_μは，(11.7.8) 式のような交換関係から，eを固定されたパラメターと考えると，その異常次元は0となる．そこで$O^{(n)}$の異常次元をγ_nとすると$\overline{C}^{(n)}$の異常次元は$-\gamma_n$になる．

$$[\mathscr{D} - \gamma_n(g)]\overline{C}_i^{(n)}\left(\frac{q^2}{\mu^2}, g\right) = 0 \tag{8.25}$$

この式を解くために$q^2/\mu^2 = \exp(2\rho)$と置くと，その解は，

$$\overline{C}_i^{(n)}\left(\frac{q^2}{\mu^2}, g\right) = \overline{C}_i^{(n)}(1, \bar{g}(\rho)) \exp\left[-\int_0^\rho d\rho\, \gamma_n(\bar{g}(\rho))\right] \tag{8.26}$$

γ_nは一般に次の形に書け，従って上の指数関数が定まる：

$$\gamma_n(g) = \gamma_n g^2 + \mathcal{O}(g^4), \tag{8.27}$$

$$\exp\left[-\int_0^\rho d\rho \gamma_n(\bar{g}(\rho))\right] = \left(1 + b g_0{}^2 \ln \frac{q^2}{\mu^2}\right)^{-\gamma_n/2b} \tag{8.28}$$

従ってq^2が大きい時には

$$\overline{C}_i^{(n)}\left(\frac{q^2}{\mu^2}, g\right) \approx \mathrm{const}\left(\ln\frac{q^2}{\mu^2}\right)^{-\gamma_n/2b} \tag{8.29}$$

ただし (8.26) の右辺第一因子中の $\bar{g}(\rho)$ は 0 と置いている．

すなわち，元来の Bjorken のスケール則とは違って q^2 依存性が残っているが，その依存性は高々対数的である．これが漸近的に自由な QCD による Bjorken のスケール則の解釈である．そしてこの結果はやはり QCD に対する支持を与える．

§9　グリーン関数のゲージ依存性

ゲージ理論では，ゲージ固定項とゴースト項の選び方が多くあり，物理的結果がその選択に依存しないことを示すのは重要である．

例えば標準的方法でくりこまれた荷電 e は，ラグランジアンの選び方に依存しないことは，e を実験的に測定する方法が存在することから明らかである．QED は赤外安定な理論なのでいわゆる低エネルギー極限定理が存在し，低いエネルギーでは S 行列要素などを e を用いて厳密に表現する方法があるので，実験的に e を決めることができるのである．それに反して非可換ゲージ理論では，QED の時のように特に便利なくりこみの処法は存在せず，従って結合定数 g がゲージに無関係に定義されているかは不明であり，くりこみの処法次第ではゲージの選び方に依存するものと考えられる．

そこで本節では，ゲージの選び方に依存するパラメターと依存しないパラメターとを区別する方法についての考え方を与えておこう．まずくりこみの処法と無関係な議論をするために，くりこまれていないグリーン関数を考える．

$$G_0^{(n)} = \langle \boldsymbol{\varphi}^{(0)}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}^{(0)}(x_n)\rangle \tag{9.1}$$

ここに $\boldsymbol{\varphi}$ は必ずしもスカラー場だけでなく，一般的な場を表わしているものとする．そして今ゲージ理論を考えているものとし，第 17 章で与えた (3.25) のラグランジアンを選ぶ．この際にラグランジアンを区別するのはくりこまれていないゲージ・パラメター α_0 である．(9.1) のグリーン関数に対して二つの方程式を書き下すことができる．第一は今まで何回も出てきた式であり，第二は第 17 章 (3.35) 式から出される式である．

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\langle \boldsymbol{\varphi}^{(0)}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}^{(0)}(x_n)\rangle_{\alpha_0} = 0, \tag{9.2}$$

$$\alpha_0\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\langle\boldsymbol{\varphi}^{(0)}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}^{(0)}(x_n)\rangle_{\alpha_0}$$
$$=\frac{i\alpha_0}{2}\langle\boldsymbol{\varphi}^{(0)}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}^{(0)}(x_n)\int d^4x\boldsymbol{B}^{(0)}(x)\cdot\boldsymbol{B}^{(0)}(x)\rangle_{\alpha_0} \tag{9.3}$$

第二の方程式には Callan-Symanzik 方程式における質量挿入項にも似たゲージ挿入項とでも称すべき項が右辺に現れる．この項の特徴は，そのくりこみ不変性である．すなわち（18.4.15）を参照すると，

$$\alpha_0=Z_3\alpha,\qquad \boldsymbol{B}^{(0)}(x)=Z_3^{-1/2}\boldsymbol{B}(x) \tag{9.4}$$

であるので，

$$\alpha_0\boldsymbol{B}^{(0)}(x)\cdot\boldsymbol{B}^{(0)}(x)=\alpha\boldsymbol{B}(x)\cdot\boldsymbol{B}(x) \tag{9.5}$$

そこで Callan-Symanzik 方程式の時にならって

$$\boldsymbol{F}(x)=\boldsymbol{B}(x)\cdot\boldsymbol{B}(x) \tag{9.6}$$

と置き，第 19 章の（5.1）と（5.2）にならってフーリエ変換をすると

$$(\mathscr{D}+\gamma_G)G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)=0, \tag{9.7}$$

$$(\bar{\mathscr{D}}+\bar{\gamma}_G)G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)=-\frac{\alpha}{2}F^{(n)}(0\,;\,p_1,\cdots,p_n) \tag{9.8}$$

ただし $G^{(n)}$ と $F^{(n)}$ とはくりこまれたグリーン関数であり，

$$G_0^{(n)}=Z_GG^{(n)},\qquad \alpha_0F_0^{(n)}=Z_G\alpha F^{(n)} \tag{9.9}$$

また

$$\mathscr{D}=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial g}+\delta\frac{\partial}{\partial\alpha},\qquad \bar{\mathscr{D}}=\bar{\beta}\frac{\partial}{\partial g}+\bar{\delta}\frac{\partial}{\partial\alpha} \tag{9.10}$$

$$\beta=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}g\bigg|_{g_0,\alpha_0},\qquad \bar{\beta}=\alpha_0\frac{\partial}{\partial\alpha_0}g\bigg|_{g_0,\mu} \tag{9.11}$$

$$\delta=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\alpha\bigg|_{g_0,\alpha_0},\qquad \bar{\delta}=\alpha_0\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\alpha\bigg|_{g_0,\mu} \tag{9.12}$$

$$\gamma_G=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_G\bigg|_{g_0,\alpha_0},\qquad \bar{\gamma}_G=\alpha_0\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\ln Z_G\bigg|_{g_0,\mu} \tag{9.13}$$

そこで次に積分可能条件を導入する：

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\left(\alpha_0\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\right)=\left(\alpha_0\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\right)\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right) \tag{9.14}$$

これをくりこまれたパラメターで表現すると

$$\mathscr{D}\bar{\mathscr{D}}=\bar{\mathscr{D}}\mathscr{D} \tag{9.15}$$

さてこの理論には，$m/\mu, g, \alpha$ という 3 個のくりこまれたパラメターが存在す

る．そこでこれらから3個の独立な関数 ρ, σ, τ を導入して変数変換を行う．

以下において証明無しに次の定理を与える：

定理　(9.15) の可換性条件が成立するならば，$m/\mu, g, \alpha$ の三変数の関数 ρ, σ, τ を次の条件を満たすように選ぶことができる：

$$\mathcal{D}\rho=1, \quad \bar{\mathcal{D}}\rho=0; \quad \mathcal{D}\sigma=0, \quad \bar{\mathcal{D}}\sigma=1; \quad \mathcal{D}\tau=0, \quad \bar{\mathcal{D}}\tau=0 \tag{9.16}$$

従って，$m/\mu, g, \alpha$ を ρ, σ, τ を用いて書き換えるならば，(9.7) と (9.8) は

$$\left(\frac{\partial}{\partial\rho}+\gamma_G\right)G^{(n)}=0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial\sigma}+\bar{\gamma}_G\right)G^{(n)}=-\frac{\alpha}{2}F^{(n)} \tag{9.17}$$

さて積分可能条件 (9.14) より，

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\gamma_G=\frac{\partial}{\partial\rho}\bar{\gamma}_G \tag{9.18}$$

従って次のような関数 Φ が存在する．

$$\gamma_G=\frac{\partial}{\partial\rho}\Phi, \qquad \bar{\gamma}_G=\frac{\partial}{\partial\sigma}\Phi \tag{9.19}$$

そこで

$$G^{(n)}=e^{-\Phi}I^{(n)}, \qquad F^{(n)}=e^{-\Phi}J^{(n)} \tag{9.20}$$

と置けば，

$$\frac{\partial}{\partial\rho}I^{(n)}=0, \qquad \frac{\partial}{\partial\sigma}I^{(n)}=-\frac{\alpha}{2}J^{(n)} \tag{9.21}$$

我々が特に興味を持つのは，$\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_n)$ がすべてBRS不変な場合である．この時には，$F^{(n)}$，従って $J^{(n)}$ は消える．この時には $I^{(n)}$ は τ のみの関数となる．

以上の議論で明らかなように，ρ はスケール変換と関係があり，σ はゲージを変える変換と関係がある．従って**くりこまれていないゲージ・パラメター α_0 に依存しない量は，くりこまれた理論では σ に依存しないと言うことができる．**

QEDでは，本節の初めの議論および (2.13) より

$$\bar{\mathcal{D}}e=0, \qquad \mathcal{D}(\alpha e^2)=0 \tag{9.22}$$

従ってQEDでは，ρ は e の関数，σ は αe^2 の関数となることが期待される．QCDでは事情はもっと複雑である．このことは，くりこみの処法に依存する β 関数が一般には g のみの関数ではなく α にも依存し得ることと関係してい

る.

$$\bar{\mathcal{D}}g=0 \tag{9.23}$$

となるくりこみの処法が存在すれば，g にはゲージに依存しない意義が存在することになるだろう．一つの方法は（17.3.35）式を用いてすべての量を Landau ゲージでくりこむことである．すなわち（17.3.35）がくりこまれた量に対しても成り立つとして，一般のゲージのグリーン関数を定義するのである．しからば β も γ_V も α には依らなくなる．しかし一般には ρ がその役目を果たすものと解釈することができる.

第20章　閉じ込めの理論

今までにすべてのハドロンはクォークから構成されているという間接証拠を挙げてきた．そしてこの模型の数多くの成功は，それ以外の可能性を極めて考え難くしている．そこで分数荷電の粒子探しが行われたが，未だに発見されていない．従って孤立したクォークは，何かの理由で観測できないのではないかと考えられるようになった．これがクォークの閉じ込めの仮説である．更にこの仮説は一般化され，カラーを持ったすべての粒子は観測されないのではないかと考えられるようになった．これがカラーの閉じ込めの仮説である．

この仮説を説明するために数多くの提案がなされた．最も多くの人に受け入れられているのは，クォークと反クォーク間のポテンシャルは，大きな距離に対しては，距離に比例するという考えである．この考え方は，Wilsonにより導入された格子ゲージ理論とも密接に関係している．彼は，クォークの閉じ込めの条件を，いわゆるWilsonのループと呼ばれる量が面積則を満たすという形に定式化した．そしてこの条件が，強結合近似で満たされることを示した．しかしながら格子ゲージ理論の枠内で，グルーオンの閉じ込め条件を定式化することは難しい．そこでカラーを持つ一般の粒子の閉じ込めを論ずるために，著者はQEDとの類推に基づく閉じ込めの機構を考えた．まず量子化の結果として生ずるが，観測にかからない粒子の例があるかどうかについて考えてみると，QEDにおける縦波とスカラー波に対応する光子がその例であることに気が付く．S行列のユニタリー性の条件を書き下した時に，始状態と終状態が共にLorentz条件を満たしている時には，これらの光子の中間状態に対する寄与は完全に打ち消し合っていて出てこない．すなわち観測にかからないのである．この事情は第4章および第5章§4において詳しく述べられている．すなわち，これは不定計量による打ち消しの機構による閉じ込めであり，Lorentz条件は不定計量を消去するのに用いられているのである．そこでこの種の機構をカラーを持った粒子の閉じ込めに利用するとすれば，不定計量と付加条件の

導入が不可欠となる．非可換ゲージ場においては，ちょうどこの道具立てが揃っている．すなわち，非可換ゲージ場においては，補助場を通して不定計量が導入され，BRS 荷電を用いて付加条件が定義される．その結果，始状態と終状態とが共に BRS 一重項に属するならば，ユニタリー性条件において，BRS 二重項の寄与が完全に打ち消し合うことが第 18 章 §6 において示されている．そこでカラーの閉じ込めの解釈は，カラーを持つすべての粒子の状態が BRS 二重項に属するならば成立することになる．そこでどのような条件下で，このようなことが実現されるかについて調べることにしよう．

§1　閉じ込め条件のゲージ独立性

以下の議論では，閉じ込めの問題が特殊なゲージ，特に Landau ゲージにおいて行われる．そこで閉じ込めという概念がゲージの選択に依存せず，一つのゲージで成立すれば他のゲージでも成立することを示しておこう．そのためにはまず第 10 章 §7 で定式化された LSZ の簡約公式の一般化について述べる．(10. 7. 34′) 式を元の形で書くと，

$$\int d^4y\varDelta(x-y)K_yST[\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)\boldsymbol{\varphi}(y)]=[\boldsymbol{\varphi}^{\text{in}}(x), ST[\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]] \tag{1.1}$$

ところで一つの局所演算子 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ を導入し，次の条件が満たされているものとする：

1)　$\boldsymbol{\Phi}(x)$ は場の演算子の多項式であり，任意の素粒子の場 $\boldsymbol{\varphi}(x)$ に対して

$$[\boldsymbol{\Phi}(x),\ \boldsymbol{\varphi}(y)]=0, \qquad (x-y)^2>0 \tag{1.2}$$

2)　$\boldsymbol{\Phi}(x)$ は $\boldsymbol{\varphi}(x)$ と同じ量子数を持ち，$\boldsymbol{\varphi}$ 場の一量子状態 $|\boldsymbol{p}\rangle$ に対して

$$\langle 0|\boldsymbol{\Phi}(x)|\boldsymbol{p}\rangle=\langle 0|\boldsymbol{\varphi}(x)|\boldsymbol{p}\rangle \tag{1.3}$$

この時に (1. 1) は次のように拡張される：

$$\int d^4y\varDelta(x-y)K_yST[\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)\boldsymbol{\Phi}(y)]=[\boldsymbol{\varphi}^{\text{in}}(x), ST[\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]] \tag{1.4}$$

ここではスカラー場を考えたが，任意の場に対して拡張が可能である．またフェルミ統計に従う場に対しては，(1. 2) で必要に応じて交換関係を反交換関係で置き換えなければならない．

さて複合粒子に対しては，もともとの場が無いので，第二の条件を次のように変更する：

2′) 複合粒子の一粒子状態 $|\boldsymbol{p}\rangle$ に対して

$$\langle 0|\boldsymbol{\Phi}(x)|\boldsymbol{p}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2p_0V}}e^{ip\cdot x} \tag{1.5}$$

ただしスピンが 0 でない時には適当なスピン関数を乗ずるものとする.

この時に複合粒子に対する漸近場 $\Phi^{\rm in}$, $\Phi^{\rm out}$ を導入すると，

$$\int d^4y\Delta(x-y)K_yST[\cdots\boldsymbol{\Phi}(y)]=[\Phi^{\rm in}(x), ST[\cdots]] \tag{1.6}$$

すなわち LSZ の漸近条件を用いて S 行列要素を計算する際に，グリーン関数に入る場の演算子は一意的でなく，上の条件を満たすものならば何でも良い．このことは複合粒子の取扱いと関係して，Haag, Zimmermann, および著者により定式化されたものである．詳しくは拙著，*Fields and Particles*, を参照されたい．さてそこで再び閉じ込めの話に戻ろう．

まず，もしもカラーを持った粒子がすべて閉じ込められているとすると，基本場の量子はすべて閉じ込められてしまうことになる．従って観測にかかるのはカラーを持たない粒子のみとなるが，QCD の範囲内では複合粒子であるハドロンのみとなる．このようなハドロンは局所的な複合場により記述されることになる．更に，このような**くりこまれていない複合場を** $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \cdots$ とした時に，第 18 章 §4 で述べたようにこれらの場は BRS 変換に対して不変でなければならない．すなわち (18.4.7) 式が成立していなければならない．この時に (18.4.12) 式が成立することになる．ところでこのようなグリーン関数に対して LSZ の簡約公式を用いるためには，(1.5) のような規格化条件が満たされるようにくりこみをしてやらねばならない．ところでこの時に (18.4.12) より

$$\langle \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{A}^{+}(y)\rangle_{\rm II}=\langle \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{A}^{+}(y)\rangle_{\rm I} \tag{1.7}$$

が成り立つから，この二点関数の一粒子状態に対応する極での留数は等しくなるから，くりこまれていない $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\langle 0|\boldsymbol{A}(x)|\boldsymbol{p}\rangle_{\rm I}=\langle 0|\boldsymbol{A}(x)|\boldsymbol{p}\rangle_{\rm II} \tag{1.8}$$

ただし $|\boldsymbol{p}\rangle$ は，四元運動量 p のハドロン一粒子状態を表わす．従って

$$\begin{aligned}&\langle \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(y)\cdots\rangle_{\rm I}/\sqrt{2p_0V}\langle 0|\boldsymbol{A}(0)|\boldsymbol{p}\rangle_{\rm I}\sqrt{2q_0V}\langle 0|\boldsymbol{B}(0)|\boldsymbol{q}\rangle_{\rm I}\cdots\\ &=\langle \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(y)\cdots\rangle_{\rm II}/\sqrt{2p_0V}\langle 0|\boldsymbol{A}(0)|\boldsymbol{p}\rangle_{\rm I}\sqrt{2q_0V}\langle 0|\boldsymbol{B}(0)|\boldsymbol{q}\rangle_{\rm II}\cdots\end{aligned} \tag{1.9}$$

はゲージの選択に依存しないくりこまれたグリーン関数を表わす．そしてこのようなグリーン関数にLSZの簡約公式を適用して得られるS行列要素は，ゲージの選択の仕方とは独立な意義を有することになる．そこでハドロン間の反応に対応するS行列がある一つのゲージでユニタリーであれば，どのようなゲージでもユニタリーであり，その結果としてどのようなゲージでもカラーを持った粒子は閉じ込められることになる．従ってカラーを持った粒子の閉じ込めを論ずるには，一つの特定のゲージに限定して行っても良いことになる．

§2　カラーの閉じ込めのための十分条件

第18章§6においてS行列のユニタリー性条件は，BRS一重状態のみを用いて表現し得ることを述べた．そこで第10章で議論した漸近的完全性をBRS一重状態に対してのみ仮定することにする．その理由は，いわゆる赤外発散のためにBRS二重状態にまで漸近条件を仮定することができるかどうか，明らかでないからであるが，一重状態に対してはユニタリーなS行列の存在が理論の基礎をなしているからである．

そこで第18章で与えられたラグランジアン密度（1.1）から出発する．しからば，場の方程式と同時刻交換関係を用いて次のようなWard-高橋の恒等式を書き下すことができる：

$$\partial_\lambda\langle\delta\bar{\delta}A^a_\lambda(x),\,\boldsymbol{\psi}^\alpha(y),\,\bar{\boldsymbol{\psi}}^\beta(z)\rangle$$
$$=ig\,t^a_{\alpha\beta}(\delta^4(x-y)S_F(y-z,\beta)-\delta^4(x-z)\,S_F(y-z,\alpha)),\tag{2.1}$$
$$\partial_\lambda\langle\delta\bar{\delta}A^a_\lambda(x),\,A^b_\mu(y),\,A^c_\nu(z)\rangle$$
$$=igM^a_{bc}(\delta^4(x-y)D_{F\mu\nu}(y-z,c)-\delta^4(x-z)D_{F\mu\nu}(y-z,b))\tag{2.2}$$

ただし$M^a_{bc}=-if_{abc}$は随伴表現に対応する．S_FとD_Fとは，それぞれフェルミオン場とゲージ場との伝播関数である．これらの恒等式は，たとえゲージ群に対する対称性が自発的に破れている場合でも，BRS不変性さえあれば成立する．そこで（2.1）について考えてみよう．まず頂点関数V^a_λを次式で定義する：

$$\langle\delta\bar{\delta}A^a_\lambda(x),\,\boldsymbol{\psi}^\alpha(y),\,\bar{\boldsymbol{\psi}}^\beta(z)\rangle$$
$$=\int d^4y'\int d^4z' S_F(y-y',\alpha)V^a_\lambda(y',z'\,;\,x)_{\alpha\beta}S_F(z'-z,\beta)\tag{2.3}$$

そして次のフーリエ変換を導入する：

$$S_F(x)=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4p e^{ip\cdot x}S_F(p),$$

$$V_\lambda^a(yz\,;\,x)_{\alpha\beta}=\frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4p\int d^4q e^{ip\cdot(y-x)+iq\cdot(x-z)}V_\lambda^a(p,q)_{\alpha\beta} \tag{2.4}$$

しからば (2.1) 式は次の形に書くことができる：

$$S_F(p,\alpha)(p-q)_\lambda\cdot V_\lambda^a(p,q)S_F(q,\beta)=ig\,t_{\alpha\beta}^a(S_F(p,\alpha)-S_F(q,\beta)) \tag{2.5}$$

ここで大切なことは，次の恒等式である：

$$\partial_\lambda(\delta\bar{\delta}A_\lambda)=-\bar{\delta}(\partial_\lambda D_\lambda c)=0 \tag{2.6}$$

次に V_λ が変数 $(p-q)^2$ に関する極を持つかどうかについて調べてみよう．まず点 x が y', z' と一粒子に対応する線でつながっているとする．この粒子は素粒子でも複合粒子でもかまわない．この時には $(p-q)^2$ に関する極が存在する．例えば，このような粒子がスカラー場 ϕ^b によって生成される場合には，このような極は次のようなグリーン関数に含まれるであろう：

$$\langle\delta\bar{\delta}A_\lambda^a(x),\phi^b(w)\rangle \tag{2.7}$$

この表式に ∂_λ を作用させると，(2.6) により同時刻交換子が現れるから，その結果は $\delta^4(x-w)$ に比例する．従ってそのフーリエ変換は定数となり，

$$\text{F.T. }\langle\delta\bar{\delta}A_\lambda^a(x),\phi^b(w)\rangle=\frac{k_\lambda}{k^2}\delta_{ab}C_0 \tag{2.8}$$

の形に書けるであろう．それに反してこの一粒子状態がベクトル場 ϕ_μ^b により生成される時には，

$$\text{F.T. }\langle\delta\bar{\delta}A_\lambda^a(x),\phi_\mu^b(w)\rangle=\left(\delta_{\lambda\mu}-\frac{k_\lambda k_\mu}{k^2}\right)\delta_{ab}f(k^2)+\frac{k_\lambda k_\mu}{k^2}\delta_{ab}C_1 \tag{2.9}$$

しかしながら右辺第一項は，(2.5) には現れない．何となれば (2.5) の左辺には，$k_\lambda=(p-q)_\lambda$ が乗ぜられているからである．そこで (2.5) の中の V_λ を次式で置き換えてもかまわない．これはスピン 0 に対する射影である．

$$\overline{V}_\lambda(p,q)=\frac{(p-q)_\lambda(p-q)_\mu}{(p-q)^2}V_\mu(p,q) \tag{2.10}$$

この置き換えによって (2.9) の右辺第一項は消えてしまう．そこで $\overline{V}_\lambda$ を用いて (2.5) 式を書き直すと，

$$S_F(p,\alpha)(p-q)_\lambda\cdot\overline{V}_\lambda^a(p,q)S_F(q,\beta)=igt_{\alpha\beta}^a(S_F(p,\alpha)-S_F(q,\beta)) \tag{2.11}$$

さて $\overline{V}_\lambda^a$ の中には，一般にはまだスピン 0 の極が残っている可能性がある．実

際に $\delta A_\lambda = D_\lambda c$ がスピン 0 の極を生成することは，(18.4.14)，(18.4.15) 式より明らかである．それでは $\delta\bar{\delta}A_\lambda$ はスピン 0 の極を生成するであろうか？

(18.8.1) によれば，$D_\lambda c$ は $\partial_\lambda \gamma$ というスピン 0，質量 0 の粒子の漸近場を含む．そこで V_λ がスピン 0 の極を含まないための条件は次式で与えられる：

$$\bar{\delta}\gamma^a = 0 \tag{2.12}$$

この条件は，ゲージ群の a 番目の生成演算子に対応する対称性が自発的に破れている時には成立し得ないものである．すなわち，$\overline{V}_\lambda$ がスピン 0 の極を含まない場合に，

$$p - q = \varepsilon P, \qquad P^2 \neq 0 \tag{2.13}$$

と置き，$\varepsilon \to 0$ の極限を考える．仮定により $\overline{V}_\lambda$ はスピン 0 の極もスピン 1 の極も含まず，かつ射影演算子もこの極限で有限である．

$$\frac{(p-q)_\lambda (p-q)_\mu}{(p-q)^2} = \frac{P_\lambda P_\mu}{P^2} \tag{2.14}$$

従って，次の式は有限である：

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{V}_\lambda(p, q) = \overline{V}_\lambda(p, p\,;P) \tag{2.15}$$

そして (2.11) より次式を得る：

$$S_F(p, \alpha) P_\lambda \cdot \overline{V}_\lambda(p, p\,;P) S_F(p, \beta) = igt^a_{\alpha\beta} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(S_F(p, \alpha) - S_F(q, \beta)) \tag{2.16}$$

さて左辺は有限であるが，対称性が自発的に破れていれば一般に，

$$S_F(p, \alpha) - S_F(p, \beta) \neq 0 \tag{2.17}$$

従って右辺は発散してしまい矛盾に陥る．故に (2.12) という条件は，対称性が破れていない時にしか成立し得ないことになる．そこで対称性が破れていない時には，α と β という t^a により結ばれている成分に対して

$$S_F(p, \alpha) = S_F(p, \beta) \equiv S_F(p) \tag{2.18}$$

と書くことにすれば，(2.16) の右辺は次の形になる．

$$igt^a_{\alpha\beta} P_\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial p_\lambda} S_F(p) \tag{2.19}$$

さてもしクォークが BRS 一重状態に属するとすると，(2.16) は矛盾を生ずる．この時に，クォークに対して LSZ の簡約公式を適用すると，左辺から

$$P_\lambda \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\alpha} | \delta\bar{\delta}\bar{A}_\lambda(0) | \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\beta} \rangle \tag{2.20}$$

という表式を得る．ただし，$|\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}\rangle$, $|\boldsymbol{p},\boldsymbol{\beta}\rangle$ は四元運動量 p のクォーク状態である．ところが $\delta\bar{\delta}\bar{A}_\lambda$ は (d,d) 型の演算子であり，クォークが BRS 一重状態に属すれば，(2.20) という行列要素は 0 となるはずである．ところが他方，右辺からはトリビアルな数係数を除いて

$$igt^a_{\alpha\beta}\bar{u}(p)\left(\frac{\partial}{\partial p_\lambda}S_F^{-1}(p)\right)u(p) \propto igt^a_{\alpha\beta}\,\bar{u}(p)i\gamma_\lambda u(p) \tag{2.21}$$

という表式を得る．これは有限であり消えない．これは矛盾である．

すなわち，条件 (2.12) が満たされているならば，S_F は BRS 一重状態に対応する極を持つことはできない．これはクォークが閉じ込められていることを意味する．同様にして，(2.2) 式から出発して (2.12) を仮定すると，グルーオンも閉じ込められることが示される．この結果をもっと一般化すると，(2.12) はカラーを持ったすべての粒子が閉じ込められるための十分条件であることが分かる．

さて，閉じ込めの条件が補助場の漸近場を用いて表現されたので，第 18 章 §8 におけるその表現に関する議論との関係を調べてみよう．(8.3) 式から

$$\delta\chi=\gamma \tag{2.22}$$

従って (2.12) 式は次のように表現することができる：

$$\bar{\delta}\delta\chi^a=0 \tag{2.23}$$

そこで摂動論で成り立つ (8.6) 式を用いると，

$$\bar{\delta}\delta\chi^a=-i\beta^a \tag{2.24}$$

となるから，摂動論では閉じ込めが成立していないことは明らかである．すなわち §8 での四重項表現は閉じ込め条件を満たさない．それに反して (8.10) で与えられる八重項表現では，(2.12) が成立しているので閉じ込め条件が成立している．この時には既に述べたように $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}$, $\bar{\boldsymbol{c}}\times\bar{\boldsymbol{c}}$ などが漸近場を持つことになる．あるいは $\delta\boldsymbol{c}$, $\bar{\delta}\bar{\boldsymbol{c}}$ がスピン 0，質量 0 の漸近場を持つので，

$$\langle\delta\boldsymbol{c}^a(x),\bar{\delta}\bar{\boldsymbol{c}}^b(y)\rangle=\langle\bar{\delta}\boldsymbol{c}^a(x),\delta\bar{\boldsymbol{c}}^b(y)\rangle=-\langle\bar{\boldsymbol{B}}^a(x),\boldsymbol{B}^b(y)\rangle \tag{2.25}$$

がスピン 0，質量 0 の極を持つことになる．

そこで Landau ゲージにおける補助場の漸近場の表現論を参照すると，§9 で分かったように，その表現を $\mathscr{D}_j$ とした時に，j が整数ならば閉じ込め条件は満たされず，j が半整数ならば閉じ込め条件は満たされることになる．

次に上の議論を第15章§5で述べたGUTに適用してみよう．大統一理論のゲージ群Gは対称性の自発的破れにより，

$$G \to SU(3)_{color} \times U(1)_{em}. \tag{2.26}$$

さて**閉じ込めは既に述べたように厳密な対称性により生ずる**．そこで結局SU(3)について一重項のみが観測にかかることになるので，ゲージ場の量子ではカラーを持たないγ, W, Zのみが観測され，フェルミオンではレプトンのみが観測されることになり，ハドロンはクォークのカラーを持たない束縛状態であれば観測にかかることになる．

§3 カラーの閉じ込めと漸近的自由性

前節において閉じ込めに関する条付として(2.23)式を与えたが，その後進展があったのでこの節は新しく書き直してある．まず(18.4.15)，(8.8.1)によれば，$\boldsymbol{A}_\mu$と$\boldsymbol{B}$とは次のような漸近場を持つことになる．

$$A_\mu^a(x)^{\text{in}} = \alpha_\mu^a(x) + \partial_\mu \chi^a(x), \quad B^b(y)^{\text{in}} = \beta^b(y) \tag{3.1}$$

ただしα_μはグルーオンの，そしてχとβはスピン0で質量も0の粒子の漸近場を表わし，(18.8.5)を満たす．すなわち

$$\langle \chi^a(x), \ \beta^b(y) \rangle = -\delta_{ab} D_F(x-y) \tag{3.2}$$

次に閉じ込め条件(2.23)が満たされているかどうかを調べてみる．QEDにおいては次の式が厳密に成立するので，電荷の閉じ込めは実現しない．

$$i\delta\bar{\delta}\chi = -\beta \tag{3.3}$$

QCDでは$i\delta\bar{\delta}\chi^a$の計算は複雑なので摂動論の最低次を考えると

$$i\delta\bar{\delta}\chi^a \approx -\beta^a \tag{3.4}$$

高次補正は右辺のβの係数を変更し，もし厳密な理論でこの係数が0となれば，(3.2)式により閉じ込めの十分条件は次式で与えられることになる．

$$\langle i\delta\bar{\delta}\chi^a(x), \ \chi^b(y) \rangle = 0 \tag{3.5}$$

この漸近場を含む条件をHeisenberg演算子で表現してみよう．さて二点関数

$$\langle i\delta\bar{\delta} A_\mu^a(x), \ A_\nu^b(y) \rangle \tag{3.6}$$

を考えてみよう．第一の演算子は$\partial_\mu(i\delta\bar{\delta}\chi^a)$を含み，第二のものは$\partial_\nu \chi^b$を含

み，(3.5) の左辺は (3.6) の中でスピン 0 で質量 0 の極を与えることになる．(3.6) のフーリエ表示を与えるが，(2.6) 式のためにその一般形は次の形で与えられる．

$$\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-i\varepsilon}\right)\int dm^2\frac{\sigma(m^2)}{k^2+m^2-i\varepsilon}+C\,\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-i\varepsilon} \tag{3.7}$$

この第二項が (3.5) に対応することになるが，定数 C は次の形で現れる．

$$\partial_\mu\langle i\delta\bar{\delta}A_\mu^a(x),\ A_\nu^b(y)\rangle=i\delta_{ab}C\partial_\nu\delta^4(x-y) \tag{3.8}$$

ここで問題とする閉じ込め条件には (3.7) の第二項のみが関係しており，閉じ込めのための十分条件 (3.5) はただ一つの定数 C を用いて次の形に帰着する．

$$C=0 \tag{3.9}$$

ところで (2.6) 式のために，(3.8) 式は次のような同時刻交換関係の形になる．

$$\delta(x_0-y_0)\langle 0|[i\delta\bar{\delta}A_0^a(x),\ A_j^b(y)]|0\rangle=i\delta_{ab}C\partial_j\delta^4(x-y) \tag{3.10}$$

ただし $j=1,2,3$ である．この左辺はくりこまれた演算子を用いて評価されなければならないが，幸いにして二つの演算子は共に乗法的にくりこまれる．

$$A_\mu^{(0)}=Z_3^{1/2}A_\mu\,,\quad i\delta\bar{\delta}A_\mu^{(0)}=\tilde{Z}_3^{-1}Z_3^{-1/2}(i\delta\bar{\delta}A_\mu) \tag{3.11}$$

ただし第 19 章 §7 の記号を用いている．従って二点関数 (3.6) も定数 C も同じ

$$(\mathscr{D}-2\gamma_{FP})C=0 \tag{3.12}$$

という形のくりこみ群の方程式を満たす．γ_{FP} はゴースト場の異常次元であり，$\mathscr{D}$ は (19.7.11) 式に現れる微分演算子である．

次に (18.3.11) 式を思い出してみよう．前節で用いた Ward–高橋の恒等式 (2.1)，(2.2) は実はこの方程式を用いて導出されている．この式を

$$i\delta\bar{\delta}A_\nu^{(0)}=\partial_\mu A_{\mu\nu}^{(0)}+g\partial_\mu(A_\mu^{(0)}\times A_\nu^{(0)})+gJ_\nu^{(0)} \tag{3.13}$$

というくりこまれていない形に書いて (3.10) に代入してみると，$A_{\mu\nu}^{(0)}=\partial_\mu A_\nu^{(0)}-\partial_\nu A_\mu^{(0)}$ を含む第一項しか同時刻交換関係に寄与しないことが判る．しかしながらくりこまれた演算子を用いると第 11 章 §8 で出てきた後藤–今村–Schwinger 項の寄与が無視できなくなることが後に判明する．とにかくくりこまれた $\partial_\mu A_{\mu\nu}$ を代入して a という定数を定義する．

$$\delta(x_0-y_0)\langle 0|[\partial_\mu A_{\mu 0}^b(x),\ A_j^b(y)]|0\rangle=i\delta_{ab}a\partial_j\delta^4(x-y) \tag{3.14}$$

このaは (8.8.20) 式の導出から明らかなように実はZ_3^{-1}に等しい．また(3.14)の両辺はグルーオンの伝播関数と同じくりこみ群の方程式を満たすから

$$(\mathcal{D}+2\gamma_V)a=0 \tag{3.15}$$

この式を (3.12) 式と比較すると，C と a とは等しくなれず，$C-a$ は後藤–今村–Schwinger 項として生き残ることが判る．

またグルーオンの伝播関数を導入し，そのフーリエ表示を与える．

$$D_{F\mu\nu}(k)=\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-i\varepsilon}\right)D(k^2)+\alpha\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-i\varepsilon)^2}, \tag{3.16}$$

$$D(k^2)=\int dm^2\frac{\rho(m^2)}{k^2+m^2-i\varepsilon} \tag{3.17}$$

また (11.8.20) に対応して次の関係式が得られる．

$$a=Z_3^{-1}=\int dm^2\rho(m^2) \tag{3.18}$$

次に (3.12) 式を解いてCを求めるにはどうしたら良いかについて調べてみよう．第19章§6において斉次Callan-Symanzik方程式の積分法を与えたが，これと全く同じ方法を上記くりこみ群の方程式に対して適用する．(19.6.10)に対応してくりこみ群の演算子は次式で与えられる．

$$R_\rho=\exp(\rho\mathcal{D}) \tag{3.19}$$

さて Q を g, α, μ の関数として，Q に対するくりこみ群の操作を

$$\bar{Q}(\rho)=\exp(\rho^{\mathcal{D}})\cdot Q\ ,\ \bar{Q}(0)=Q \tag{3.20}$$

により定義する．特に無限小変換に対しては

$$\delta\bar{Q}(\rho)=\mathcal{D}\bar{Q}(\rho)\cdot\delta\rho \tag{3.21}$$

特に g, α, μ に対しては

$$\delta\bar{g}=\beta(\bar{g},\bar{\mu})\delta\rho\ ,\ \delta\bar{\alpha}=-2\bar{\alpha}\gamma_V(\bar{g},\bar{\alpha},\bar{\mu})\delta\rho\ ,\ \delta\bar{\mu}=\bar{\mu}\delta\rho \tag{3.22}$$

という方程式が得られる．ただし変数 (ρ) を省略してある．その漸近値は

$$\bar{g}(\infty)=g_\infty\ ,\ \bar{\alpha}(\infty)=\alpha_\infty\ ,\ \bar{\mu}(\infty)=\infty \tag{3.23}$$

により定義され，特に漸近的自由性は $g_\infty=0$ により特徴づけられる．

また g, α, μ の関数 $Q(g,\alpha,\mu)$ に対して次式は明らかであろう．

$$\bar{Q}(\rho)=\exp(\rho\mathscr{D})\cdot Q(g,\alpha,\mu)=Q(\bar{g}(\rho),\bar{\alpha}(\rho),\bar{\mu}(\rho)) \tag{3.24}$$

特にQとしてグリーン関数 $G(p_i;\ g,\alpha,\mu)$ を選び，その異常次元をγとすると

$$(\mathscr{D}+\gamma)G=0 \tag{3.25}$$

この方程式を積分するために

$$\overline{G}(\rho)=\exp(\rho\mathscr{D})\cdot G\ ,\quad \overline{G}(0)=G \tag{3.26}$$

を定義すると次の方程式が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\overline{G}(\rho)=\exp(\rho\mathscr{D})\cdot\mathscr{D}G=-\exp(\rho\mathscr{D})\cdot\gamma G=-\bar{\gamma}(\rho)\overline{G}(\rho) \tag{3.27}$$

この方程式を積分すると

$$G(p_i;\ g,\alpha,\mu)=\exp\left(\int_0^\rho d\rho\bar{\gamma}(\rho)\right)\cdot G(p_i;\bar{g}(\rho),\bar{\alpha}(\rho),\bar{\mu}(\rho)) \tag{3.28}$$

この式は Callan–Symanzik 方程式の場合の (19.6.13) 式に対応する．そこで

$$R(k^2)=k^2D(k^2) \tag{3.29}$$

を導入すると，この関数は次のくりこみ条件を満たす．

$$R(\mu^2)=1 \tag{3.30}$$

さて R の異常次元は $2\gamma_V$ であるから，(3.28) 式を用いて

$$R(k^2;\ g,\alpha,\mu)=\exp\left(2\int_0^\rho d\rho\bar{\gamma}_V(\rho)\right)\cdot R(k^2;\ \bar{g}(\rho),\bar{\alpha}(\rho),\bar{\mu}(\rho)) \tag{3.31}$$

が得られ，この式で $k^2=\bar{\mu}^2(\rho)$ とおくと (3.30) により

$$R(\bar{\mu}^2(\rho);g,\alpha,\mu)=\exp\left(2\int_0^\rho d\rho\bar{\gamma}_V(\rho))\right) \tag{3.32}$$

そこで $\rho\to\infty$，$\bar{\mu}^2(\rho)\to\infty$ という極限をとると，(3.17)，(3.29) により

$$\int dm^2\rho(m^2)=\exp\left(2\int_0^\infty d\rho\bar{\gamma}_V(\rho)\right) \tag{3.33}$$

となり，(3.18) によりこれはaに等しいことになる．そこでこの式を用いてaを評価することができる．それではaが知られた時にCをどのようにして評価したらよいであろうか？ Cは方程式 (3.12) を満たすが，その境界条件を与えなければならない．ところで切断を導入した理論において $\rho\to\infty$，$\bar{\mu}(\rho)\to\infty$ としてくりこみ点を高エネルギーに持ってゆくと $\overline{G}(\rho)$ は自由場のものに近付

く．そこで後藤–今村–Schwinger 項はこの極限で消えると考えて良いであろう．そこで次の仮定を導入して C に対する境界条件を導入する．

$$\lim_{\rho\to\infty}(\bar{C}(\rho)-\bar{a}(\rho))=0 \tag{3.34}$$

すると (3.12)，(3.15)を(3.27) の形に書いた方程式を与えると，変数 (ρ) を省略して次のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\bar{C}=2\bar{\gamma}_{FP}\bar{C}\ ,\quad \frac{\partial}{\partial\rho}\bar{a}=-2\bar{\gamma}_V\bar{a} \tag{3.35}$$

これから直ちに次の方程式が得られる．

$$\left(\frac{\partial}{\partial\rho}-2\bar{\gamma}_{FP}\right)(\bar{C}-\bar{a})=2(\bar{\gamma}_V+\bar{\gamma}_{FP})\bar{a} \tag{3.36}$$

この方程式を境界条件 (3.34) の下で解くと

$$\bar{C}(\rho)=\bar{a}(\rho)-\int_\rho^\infty d\rho' 2(\bar{\gamma}_V(\rho')+\bar{\gamma}_{FP}(\rho'))\bar{a}(\rho')\exp\left(-2\int_\rho^{\rho'}d\rho''\bar{\gamma}_{FP}(\rho'')\right) \tag{3.37}$$

が得られる．特に $\rho=0$ と置くと

$$C=a-\int_0^\infty d\rho' 2(\bar{\gamma}_V(\rho')+\bar{\gamma}_{FP}(\rho'))\bar{a}(\rho')\exp\left(-2\int_0^{\rho'}d\rho''\bar{\gamma}_{FP}(\rho'')\right) \tag{3.38}$$

この結果を得るのに最も本質的な仮定は (3.34) 式であるから，この仮定が確かに成立しているかどうかを QED で調べてみよう．

—— QED における験証 ——

QED においては簡単な計算により C を厳密に求めることができて

$$C=1 \tag{3.39}$$

そこで後藤–今村–Schwinger 項に関する仮定 (3.34) を用いて得られた式 (3.38) を用いてこの結果が再現できるかどうかを験証してみよう．QED においては次の簡単化を用いることができる．

$$\gamma_{FP}=0\ ,\quad \beta(e)=e\gamma_V(e) \tag{3.40}$$

従って

$$\int_0^\infty d\rho\bar{\gamma}_V(\rho)=\int_e^{e_\infty}\frac{d\bar{e}}{\beta(\bar{e})}\cdot\frac{\beta(\bar{e})}{\bar{e}}=\ln\left(\frac{e_\infty}{e}\right) \tag{3.41}$$

そこで (3.33) 式より直ちに $a(e)$ が求められる．

$$a(e)=(e_\infty/e)^2 \tag{3.42}$$

この結果を (3.38) 式に代入すれば，(3.39) 式が再現されることが判り，今後安心して(3.34) を QCD でも用いることができる．すなわち

$$C=\left(\frac{e_\infty}{e}\right)^2-2\int_e^{e_\infty}\frac{d\bar{e}}{\bar{e}}\left(\frac{e_\infty}{\bar{e}}\right)^2=1 \tag{3.43}$$

さて二つの BRS 不変なラグランジアン密度 $\mathscr{L}_1$ と $\mathscr{L}_2$ とに対して

$$\delta\mathscr{L}_1=\delta_2\mathscr{L}=0\ ,\ \mathscr{L}_1-\mathscr{L}_2=\delta\mathscr{M} \tag{3.44}$$

となるような $\mathscr{M}$ が存在する時に，$\mathscr{L}_1$ と $\mathscr{L}_2$ とは同一のゲージクラスに属すると呼ぶことにする．この時に第 18 章§4 で述べたように，BRS 不変な演算子のみを含むグリーン関数はどちらのラグランジアンに対しても等しいことは (18.4.12) により明らかである．例えば (18.1.1) で与えられるような α の異なる二つのラグランジアンに対して

$$\mathscr{L}_2-\mathscr{L}_1=\delta\mathscr{M}\ ,\ \mathscr{M}=-\frac{i}{2}(\alpha_2-\alpha_1)\bar{c}\cdot B \tag{3.45}$$

となるから，このようなラグランジアンは同一のゲージクラスに属する．そこで (18.4.12) 式で示されるようなグリーン関数は α に依存しないことになる．そこでこのようなグリーン関数に対するくりこみ群の方程式 (3.25) を考えると γ は勿論 α によらない．従って β も α に依存せず，β は同一のゲージクラスでは共通になる．従って漸近的自由性という概念は同一のゲージクラスに対して共通の概念となる．すなわち β が α によらないようなくりこみの処法が存在することになる．さて方程式 (3.22) を積分すると

$$\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha_\infty}\right)=2\int_0^\infty d\rho\bar{\gamma}_V(\rho) \tag{3.46}$$

あるいは (3.18)，(3.33) などから

$$a=\int dm^2\rho(m^2)=\frac{\alpha}{\alpha_\infty} \tag{3.47}$$

従って a を求める問題は α_∞ を求める問題に帰着する．そこで (3.22) の方程式を解かなければならないが，γ_V と β とは摂動論でしか知られていない．すなわち g の巾展開として

$$\beta(g)=g^3(\beta_0+\beta_1 g^2+\cdots),\ \ \gamma_V(g,\alpha)=g^2(\gamma_0+\gamma_1 g^2+\cdots) \tag{3.48}$$

ただし

$$\gamma_0=\gamma_{00}+\gamma_{01}\alpha\ ,\ \ \gamma_1=\gamma_{10}+\gamma_{11}\alpha+\gamma_{12}\alpha^2\ ,\ \cdots \tag{3.49}$$

以下においては漸近的自由性の条件として $\beta_0<0$，そしてその結果としての $g_\infty=0$ を仮定する．更に QCD では常に成立する $\gamma_{01}>0$ も仮定する．

$g^2\ll 1$ とすると，十分大きな ρ に対して

$$\bar{g}^2(\rho)=g^2(1+bg^2\rho)^{-1},\ \ b=-2\beta_0>0\ . \tag{3.50}$$

そこで (3.46) の積分について考えよう．

1) 収束する場合

(3.46) の積分が収束すれば，左辺は有限であるから α_∞ も 0 ではないが有限である．この時に右辺の被積分関数の大きい ρ に対する漸近形は

$$\bar{\gamma}_V(\rho)=\bar{g}^2(\rho)(\gamma_{00}+\gamma_{01}\alpha_\infty)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)=\frac{1}{b\rho}(\gamma_{00}+\gamma_{01}\alpha_\infty)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \tag{3.51}$$

この積分が大きい ρ に対して収束するためには

$$\gamma_{00}+\gamma_{01}\alpha_\infty=0\ ,\ \text{あるいは}\ \alpha_\infty=-\gamma_{00}/\gamma_{01}\equiv\alpha_0 \tag{3.52}$$

2) 発散する場合

(3.46) の積分が発散するならば，左辺も発散するから α_∞ の可能な値は

$$\alpha_\infty=0\ ,\ \text{あるいは}\ \infty \tag{3.53}$$

この結果，α_∞ の採り得る値は α_0, 0, ∞の三通りしかないことになる．

初期値 (α,g) から出発して $(\bar{\alpha}(\rho),\bar{g}(\rho))$ がどこへ行くかを大きい ρ に対して調べる．$g_\infty=0$ であるから十分大きい ρ に対しては $\bar{g}^2(\rho)\ll 1$ となる．そこで十分小さい $\bar{g}^2(\rho)$ から再出発してこの流れを追ってゆく．$\alpha_\infty=\infty$ の場合を除いて $\bar{\alpha}$ の方程式は最低次のものを使えるから，この時に

$$\frac{d}{d\rho}\bar{\alpha}\approx-2\bar{\alpha}(\gamma_{00}+\gamma_{01}\bar{\alpha})\bar{g}^2=-2\gamma_{01}\bar{g}^2\bar{\alpha}(\bar{\alpha}-\alpha_0)\ ,\ \ (\gamma_{01}\bar{g}^2>0) \tag{3.54}$$

この方程式を $\bar{\alpha}$ が 0 か α_0 の近くにある時に $\rho\to\infty$ の極限で調べれば，α_∞ が 0 か α_0 か，あるいはいずれでもないかが判明する．いずれでもなければ $\alpha_\infty=\infty$，あるいは $-\infty$ となる．この問題は簡単であるから結果のみを与える．

1) $\gamma_{00}<0$, $(\alpha_0>0)$

$$\alpha_\infty=\begin{cases}\alpha_0 & , \quad \alpha>0 \\ 0 & , \quad \alpha=0 \\ -\infty & , \quad \alpha<0\end{cases} \tag{3.55}$$

2) $\gamma_{00}>0$, $(\alpha_0<0)$

$$\alpha_\infty=\begin{cases}0 & , \quad \alpha>\alpha_0 \\ \alpha_0 & , \quad \alpha=\alpha_0 \\ -\infty & , \quad \alpha<\alpha_0\end{cases} \tag{3.56}$$

ただし g^2 は初めから十分小さいとして出発している．γ_{00} の符号によらずに $\alpha_\infty=-\infty$ となる領域が存在する．(3.47) 式によればこの領域では $a=0$ であり，従って (3.38) 式により同じ領域で $C=0$ となる．$C=0$ は閉じ込めの十分条件であるから g と α とがこの領域に属すれば閉じ込めが成立する．更に同一のゲージクラスでは §1 で証明されたように閉じ込めが成立する．この時に $C\neq0$ となる他の領域もあるが，$C=0$ は十分条件であって必要条件ではないから閉じ込めが成立しても矛盾はない．結局この証明を元に辿ってみると，カラーの閉じ込めは，漸近的自由性と自発的に破れていない非可換ゲージ対称性があれば成立することが結論される．

第21章　異常項と分散理論

場の理論は，その誕生当時から発散の困難に悩まされてきた．くりこみ理論によって一応その発散を除く処法が与えられたが，この方法は $\infty-\infty$ という量を計算することになるのでしばしば結果に不定性が残った．その典型的な例は，光子の自己エネルギーであり，計算の仕方によっては0にもなるし，無限大にもなる．これが不定性の問題であり，計算の仕方によってはゲージ不変になるべきものが不変にならなかったりする．この典型的なものが真空偏極の問題である．第11章でも (5.19) という式を得たが，ゲージ不変な結果を得るには，次の積分を0に等しいと置く必要があった：

$$\int_0^1 dx \int d^4p \frac{\frac{1}{2}p^2+m^2+x(1-x)k^2}{[p^2+m^2+x(1-x)k^2-i\varepsilon]^2}=0 \qquad (1)$$

そこで福田と宮本とは，やはり真空偏極を含む中性中間子の二光子崩壊の計算をすることにより，似たような事情があることを見つけた．Steinberger もやはり似たような計算をしている．これは1949年のことである．

当時としては当然のことであったが，実は二種類の特異性が存在するということに気が付かれていなかった．一つは上述の不定性であるが，もう一つは異常項である．1951年に Schwinger はゲージ不変性を損わない計算法を提唱したが，そこでも異常項の問題には気が付かれていなかった．それでは異常項の問題とは何であろうか？　場の理論では同じ時空点における場の演算子の積は極めて特異性の強い量であるために，それを正しく定義することが難しい．

相互作用をする場の方程式は非線形であるので，この問題を避けて通ることはできない．古典論では，c数の積を定義することは容易であるが，量子論では量子化の結果として新しい種類の特異性が生ずるのである．従って量子論では，古典的な場の方程式を用いて導き出した結果は必ずしも成立しないことがある．このような古典的方程式からのずれによって生ずる項を異常項と呼ぶ．この異常項の問題は，現在でも中心問題の一つであり，微分幾何学や位相幾何

学等の近代数学的な処法によって詳しく調べられている．本章では，この問題をもっと初等的な観点において取り扱うことにする．

不定性の問題と異常項の問題との違いがはっきりと認識され出したのは，1960年代の終り頃であり，Adler, Bell, Jackiw 等の研究の結果である．そこで本章では，この問題を分散理論の立場から考察することにしよう．

序章§4で述べたように，分散理論ではS行列の振幅を計算する方法が二段階に分かれている．第一の段階ではユニタリー性条件から振幅の吸収部分を計算し，第二の段階では分散公式を用いて吸収部分から分散部分を計算する．さて第一の段階の計算では積分は常に有限な位相空間内で行われるので収束し，不定性も発散も生じない．そこで発散が生ずるとしたら第二の段階で生ずる．この時に必要に応じて引算のある分散公式を導入する．この引算がくりこみの処法に対応するが，この計算は Feynman-Dyson 理論とは違って$\infty-\infty$の形ではないので全く不定性が残らない．ただしS行列の分散理論の弱点は，分散公式の完全系が知られていないことである．ただ上の注意から分かることは，場の理論における発散や不定性は常に分散部分にのみ生じ，吸収部分の計算はどのような方法を用いても一意的に定まるということである．

そこで本章ではS行列ではなくてグリーン関数に対する分散理論を導入する．その利点は，分散公式の完全系が知られていることである．そしてこの方法を用いて異常項の生ずる機構について調べることにする．

§1 不定性および異常項の例

ここではまず不定性の例として真空偏極の問題について考察しよう．

1) 真空偏極

第11章§8における伝播関数の積分表示は分散関係式の例である．そしてスカラー場の例を考えると，吸収部分，あるいは虚数部分は，

$$\frac{1}{2}\langle 0|\{\boldsymbol{\varphi}(x),\boldsymbol{\varphi}(y)\}|0\rangle=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p e^{ip\cdot(x-y)}\mathrm{Im}\,\Delta_F'(-p^2) \qquad (1.1)$$

によって与えられる．同様にして

$$\frac{1}{2}\langle 0|\{\boldsymbol{j}_\mu(x),\boldsymbol{j}_\nu(y)\}|0\rangle=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{ik\cdot(x-y)}\mathrm{Im}\,\Pi_{\mu\nu}(k) \qquad (1.2)$$

この左辺の中間状態に電子・陽電子対状態を代入して摂動論の最低次を計算す

る．

$$\langle 0|\{j_\mu(x),j_\nu(y)\}|0\rangle=e^2\mathrm{Tr}[\gamma_\mu S^{(+)}(x-y)\gamma_\nu\tilde{S}^{(+)}(x-y)^T]+(x\rightleftarrows y,\mu\rightleftarrows\nu). \tag{1.3}$$

ただし

$$S^{(+)}(x)=(\gamma\cdot\partial-m)\Delta^{(+)}(x),\qquad \tilde{S}^{(+)}(x)=(\gamma^T\cdot\partial+m)\Delta^{(+)}(x) \tag{1.4}$$

これを代入してフーリエ変換すれば，

$$\mathrm{Tr}[\cdots]=-\frac{1}{(2\pi)^6}\left(\frac{\pi}{3}\right)\int_{4m^2}^{\infty}d\kappa^2\sqrt{1-\frac{4m^2}{\kappa^2}}\left(2+\frac{4m^2}{\kappa^2}\right)$$
$$\times\int d^4k e^{ik\cdot(x-y)}(\delta_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu)\theta(k_0)\delta(k^2+\kappa^2) \tag{1.5}$$

故に，

$$\mathrm{Im}\,\Pi_{\mu\nu}(k)=\frac{e^2}{3(2\pi)^2}(k_\mu k_\nu-\delta_{\mu\nu}k^2)\int_{4m^2}^{\infty}d\kappa^2\sqrt{1-\frac{4m^2}{\kappa^2}}\left(1+\frac{2m^2}{\kappa^2}\right)\pi\delta(k^2+\kappa^2) \tag{1.6}$$

そこで

$$\Pi_{\mu\nu}(k)=(k_\mu k_\nu-\delta_{\mu\nu}k^2)\Pi(-k^2),\qquad \mathrm{Im}\,\Pi(-k^2)=\pi\sigma(-k^2) \tag{1.7}$$

と置くと，

$$\sigma(\kappa^2)=\frac{e^2}{12\pi^2}\sqrt{1-\frac{4m^2}{\kappa^2}}\left(1+\frac{2m^2}{\kappa^2}\right)\theta(\kappa^2-4m^2) \tag{1.8}$$

そこで $\Pi(-k^2)$ を分散公式を用いて計算する．その際に $\Pi(0)=0$ というくりこみ条件を用いると，一度引算した形の分散公式により，

$$\Pi(-k^2)-\Pi(0)=\int d\kappa^2\left(\frac{1}{k^2+\kappa^2}-\frac{1}{\kappa^2}\right)\sigma(\kappa^2), \tag{1.9}$$

あるいは

$$\Pi(-k^2)=-k^2\int\frac{d\kappa^2}{\kappa^2}\,\frac{\sigma(\kappa^2)}{k^2+\kappa^2-i\varepsilon} \tag{1.10}$$

こうして全く不定性なしに真空偏極が計算されたことになる．そして (1.10) を (1.7) に代入したものが，次の二点関数のフーリエ変換である：

$$\langle 0|T^*[j_\mu(x),j_\nu(y)]|0\rangle \tag{1.11}$$

共変的な T^* 積は，分散公式により定義されていると考えて良い．以下，分散理論では T 積をこの意味で用いる．さて Feynmam-Dyson 式に計算した(1)式は，その吸収部分を計算すると 0 になる．実際(1)式を k^2 につき二回微分す

ると消えてしまうので，(1)は k^2 につき分岐点を持たず，従ってその吸収部分は0である．不定性，あるいは発散は分散部分にのみ現れるが，分散部分は吸収部分から分散関係式（1.10）を用いて計算すれば一意的に決定される．

2) 後藤 - 今村 - Schwinger 項

第11章§8で議論された後藤 - 今村 - Schwinger 項も同時刻交換関係を機械的に用いたのでは出てこない例である．これも同じ時空点での場の演算子の積の特異性を示す例である．この Schwinger 項も現在発展中の超弦理論において重要な役割を果たしている．

次に冒頭に述べた中性中間子の二光子崩壊の例に戻ろう．

3) 三角異常項

QED における Dirac 方程式から出発する．

$$(\gamma\cdot\partial+m)\boldsymbol{\psi}=ie\gamma_\lambda \boldsymbol{A}_\lambda\boldsymbol{\psi},\qquad \overline{\boldsymbol{\psi}}(\gamma\cdot\overleftarrow{\partial}-m)=-ie\overline{\boldsymbol{\psi}}\gamma_\lambda \boldsymbol{A}_\lambda \tag{1.12}$$

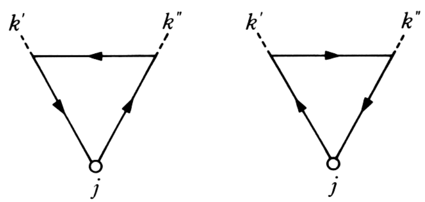
この二式を組み合わせると次式を得る．

$$\partial_\lambda \boldsymbol{j}^5_\lambda=2m\boldsymbol{j}^5 \tag{1.13}$$

ただし

$$\boldsymbol{j}^5_\lambda=i\overline{\boldsymbol{\psi}}\gamma_\lambda\gamma_5\boldsymbol{\psi},\qquad \boldsymbol{j}^5=i\overline{\boldsymbol{\psi}}\gamma_5\boldsymbol{\psi} \tag{1.14}$$

この式は古典的運動方程式を用いて得られたが，量子論でも正しいかどうかを調べるために特別な行列要素を選び，両辺を比較してみよう．すなわち，この式を真空 $|\boldsymbol{0}\rangle$ と二光子状態 $|\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}''\rangle$ とではさみ，両辺を比較してみよう．最低次で効くのは次の二つの三角図形である：



そして次のような形状因子 $F(s)$ と $G(s)$ とを定義する：

$$\langle \boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}''\text{out}|\boldsymbol{j}^5(0)|\boldsymbol{0}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2k_0'V}\sqrt{2k_0''V}}i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}e'_\alpha e''_\beta k'_\gamma k''_\delta F(s),$$
$$\langle \boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}''\text{out}|\boldsymbol{j}^5_\lambda(0)|\boldsymbol{0}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2k_0'V}\sqrt{2k_0''V}}i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}e'_\alpha e''_\beta k'_\gamma k''_\delta(-i)(k'_\lambda+k''_\lambda)G(s) \tag{1.15}$$

ただし s は二光子系の不変質量の自乗であり，次式で定義される：

$$s=-(k'+k'')^2 \tag{1.16}$$

また e', e'' はそれぞれの光子の偏極ベクトルである．

これらの形状因子の吸収部分，あるいは虚数部分はユニタリー性条件を用いても，あるいは Feynman-Dyson の方法を用いても一意的に計算し得る．さて問題の関係式（1.13）は，形状因子を用いると次の形に表現される：

$$sG(s)=2mF(s) \tag{1.17}$$

そこでまず虚数部を計算してみよう．菊川の計算によると，$\alpha=e^2/4\pi$ として，

$$\mathrm{Im}\ F(s)=\frac{2\alpha m}{s}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-\dfrac{4m^2}{s}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{4m^2}{s}}}\right|\theta(s-4m^2) \tag{1.18}$$

$$\mathrm{Im}\ G(s)=\frac{4\alpha m^2}{s^2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-\dfrac{4m^2}{s}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{4m^2}{s}}}\right|\theta(s-4m^2) \tag{1.19}$$

これから直ちに分かることは，

$$s\ \mathrm{Im}\ G(s)=2m\ \mathrm{Im}\ F(s) \tag{1.20}$$

であって，（1.17）式は虚数部に対しては確かに成立している．そこで分散部分，すなわち実数部分に関しては次の分散関係式で計算してみる：

$$\mathrm{Re}\,F(s)=\frac{\mathrm{P}}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty}ds'\frac{\mathrm{Im}\ F(s')}{s'-s},\quad \mathrm{Re}\,G(s)=\frac{\mathrm{P}}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty}ds'\frac{\mathrm{Im}\,G(s')}{s'-s} \tag{1.21}$$

ただし P は Cauchy の主値を表わす．そして（1.17）を調べてみると，

$$\begin{aligned}s\,\mathrm{Re}\,G(s)&=\frac{s}{\pi}\int ds'\frac{\mathrm{Im}\,G(s')}{s'-s}\\&=\frac{1}{\pi}\int ds'\frac{s'\mathrm{Im}\,G(s')}{s'-s}-\frac{1}{\pi}\int ds'\mathrm{Im}\,G(s')\\&=2m\ \mathrm{Re}\ F(s)-\frac{1}{\pi}\int ds'\ \mathrm{Im}\,G(s')\end{aligned} \tag{1.22}$$

従って（1.17）が成立するためには，右辺第二項の積分が消えなければならない．実際に計算してみると，

$$\int_{4m^2}^{\infty}ds'\ \mathrm{Im}\,G(s')=2\alpha \tag{1.23}$$

これが異常項である．実数部を (1.21) から計算してみると，

$$\mathrm{Re}\,F(s)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)\frac{m}{s}\left\{\pi^2-\left(\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}}{1-\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}}\right|\right)^2\right\} \tag{1.24}$$

$$\mathrm{Re}\,G(s)=\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)\frac{m^2}{s}\left[-\frac{1}{m^2}+\frac{1}{s}\left\{\pi^2-\left(\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}}{1-\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}}\right|\right)^2\right\}\right] \tag{1.25}$$

そこで $B(x)=\boldsymbol{E}(x)\cdot\boldsymbol{H}(x)$ を導入すると，最低次では

$$\langle \boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}''\ \mathrm{out}\,|\,\boldsymbol{B}(0)\,|\,\boldsymbol{0}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2k_0'V}\ \sqrt{2k_0''V}}i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}e_\alpha' e_\beta'' k_\gamma' k_\delta'' \tag{1.26}$$

故に，(1.13) は次のように変更される：

$$\partial_\lambda \boldsymbol{j}_\lambda^5=2m\boldsymbol{j}^5-\frac{2\alpha}{\pi}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H} \tag{1.27}$$

4) トレース異常項

後で分かるように Callan-Symanzik 方程式の導出はトレース異常項と深い関係にある．そこでこの異常項について調べるために中性スカラー理論について考えてみよう．ラグランジアン密度として次のものをとる：

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}[(\partial_\lambda\varphi)^2+m^2\varphi]-\frac{g}{4!}\varphi^4 \tag{1.28}$$

しからばエネルギー・運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu}=-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{:\mu}}\varphi_{:\nu}+\delta_{\mu\nu}\mathscr{L} \tag{1.29}$$

従ってそのトレースは

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_{\mu\mu}&=-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\varphi}_{:\mu}}\boldsymbol{\varphi}_{:\mu}+4\mathscr{L}\\&=-(\partial_\mu\boldsymbol{\varphi})^2-2m^2\boldsymbol{\varphi}^2-\frac{g}{6}\boldsymbol{\varphi}^4\\&=-\partial_\mu(\boldsymbol{\varphi}\partial_\mu\boldsymbol{\varphi})-m^2\boldsymbol{\varphi}^2\end{aligned} \tag{1.30}$$

ただし場の方程式を使っている．そこで $T=m^2\varphi^2$ と置くと，

$$\begin{aligned}&T[\boldsymbol{T}_{\mu\mu}(x)\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]\\&=-\partial_\mu T[\boldsymbol{\varphi}(x)\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}(x),\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]-T[\boldsymbol{T}(x)\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]\\&\quad+i\sum_{j=1}^{n}\delta^4(x-x_j)T[\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]\end{aligned} \tag{1.31}$$

そこで次のようにフーリエ変換を導入する:

$$\langle 0|T[\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]|0\rangle$$
$$=\frac{i^{n-1}}{(2\pi)^{4(n-1)}}\int(dp)e^{i(p_1\cdot x_1+\cdots+p_n\cdot x_n)}\delta^4(p_1+\cdots+p_n)G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n), \tag{1.32}$$

$$\langle 0|T[\boldsymbol{T}_{\mu\mu}(x)\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]|0\rangle$$
$$=\frac{i^n}{(2\pi)^{4n}}\int(dp)d^4q e^{i(q\cdot x+p_1\cdot x_1+\cdots+p_n\cdot x_n)}\delta(q+p_1+\cdots+p_n)\,T^{(n)}_{\mu\mu}(q\,;p_1,\cdots,p_n),\ \text{etc.} \tag{1.33}$$

しからば $q\to 0$ の極限において,(1.31) 式は次のように書ける:

$$T^{(n)}_{\mu\mu}(0\,;p_1,\cdots,p_n)=-T^{(n)}(0\,;p_1,\cdots,p_n)+nG^{(n)}(p_1,\cdots,p_n) \tag{1.34}$$

これをトレース恒等式と呼ぶが,実は**この式は正しくない**.その理由は,やはり同じ時空点における演算子の積を含むからである.

次にエネルギー・運動量テンソルに対する Ward-高橋の恒等式を書き下す.この式は常に正しい.

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}T[\boldsymbol{T}_{\mu\nu}(x)\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]=i\sum_{j=1}^n\delta^4(x-x_j)\frac{\partial}{\partial x_{j\nu}}T[\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)] \tag{1.35}$$

そこで真空期待値をフーリエ変換して,

$$q_\mu T^{(n)}_{\mu\nu}(q\,;p_1,\cdots,p_n)=\sum_{j=1}^n(p_j+q)_\nu G^{(n)}(p_1,\cdots,p_j+q,\cdots,p_n) \tag{1.36}$$

この式を q_μ について微分し,ついで $q\to 0$ という極限をとると,

$$T^{(n)}_{\mu\nu}(0\,;p_1,\cdots,p_n)=\left[(n-1)\delta_{\mu\nu}+\sum_{j=1}^n p_{j\nu}\frac{\partial}{\partial p_{j\mu}}\right]G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n) \tag{1.37}$$

次にトレースをとると

$$T^{(n)}_{\mu\mu}(0\,;p_1,\cdots,p_n)=\left[4(n-1)+\sum_{j=1}^n p_j\cdot\frac{\partial}{\partial p_j}\right]G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n) \tag{1.38}$$

さて $G^{(n)}$ は m^{4-3n} という次元を持ち,p_j と m とにつき斉次関数なので,

$$\left(\sum_{j=1}^n p_j\cdot\frac{\partial}{\partial p_j}+m\frac{\partial}{\partial m}+3n-4\right)G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)=0 \tag{1.39}$$

そこで (1.38) と (1.39) とを組み合わせると,

$$T^{(n)}_{\mu\mu}(0\,;p_1,\cdots,p_n)=\left(n-m\frac{\partial}{\partial m}\right)G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n) \tag{1.40}$$

この式は後に Callan-Symanzik 方程式の導出に利用される.

§2　グリーン関数に対する分散理論

さて表題のグリーン関数に対する分散理論を説明するために中性スカラー理論を考える．グリーン関数のセット $\{\bar{\tau}\}$ を (10.8.6) によって導入すると，このセットは，(10.8.7)のような一般化されたユニタリー性条件を満たすことになる．そこで次に分散関係式を導入する．そのためには，まず $\bar{\tau}$ の中で連結図形に対応する部分を取り出す．

$$\bar{\tau}(x_1, \cdots, x_n)_{\text{conn}}=\bar{\rho}(x_1, \cdots, x_n) \tag{2.1}$$

しからば $\{\bar{\tau}\}$ というセットと，$\{\bar{\rho}\}$ というセットの間には (10.2.15) と同様な漸化式が成立する．

$$\bar{\tau}(x, x_1, \cdots, x_n)=\bar{\rho}(x, x_1, \cdots, x_n)+\sum_{k\neq n}\bar{\rho}(x, x_1', \cdots, x_k')\bar{\tau}(x_{k+1}', \cdots, x_n') \tag{2.2}$$

ただしこの和は，$(x_1, \cdots, x_n)$ を二つのセット $(x_1', \cdots, x_k')$ と $(x_{k+1}', \cdots, x_n')$ とに分けるすべての分け方についてとる．次に $\bar{\rho}$ のフーリエ変換を導入する．

$$\bar{\rho}(x_1, \cdots, x_n)=\frac{-i}{(2\pi)^{4(n-1)}}\int(dp)\delta^4(p_1+\cdots+p_n)\mathcal{G}(p_1, \cdots, p_n)e^{i(p_1\cdot x_1+\cdots+p_n\cdot x_n)} \tag{2.3}$$

しからば $\mathcal{G}$ は一般にスカラー積 $p_\alpha\cdot p_\beta$ のみの関数であるので，$\mathcal{G}(p_\alpha\cdot p_\beta)$ と書く．一般化されたユニタリー性条件を用いると，$\mathcal{G}$ が g^n の次数まで知られていれば，g^{n+1} 次までの $\mathrm{Im}\,\mathcal{G}$ を計算することができる．従って $\mathrm{Im}\,\mathcal{G}$ を与えて $\mathrm{Re}\,\mathcal{G}$ を知る方法があれば，逐次的に高い次数の $\mathcal{G}$ を決めることができる．なお，一般化されたユニタリー性条件から $\mathrm{Im}\,\mathcal{G}$ を計算する時には，位相空間の体積が有限なので紫外発散は出ない．さて $\mathrm{Im}\,\mathcal{G}$ から $\mathrm{Re}\,\mathcal{G}$ を計算するには，

$$\mathrm{Re}\,\mathcal{G}(p_\alpha\cdot p_\beta\xi)=\frac{\mathrm{P}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi'}{\xi'-\xi}\varepsilon(\xi')\mathrm{Im}\,\mathcal{G}(p_\alpha\cdot p_\beta\xi') \tag{2.4}$$

というパラメター分散関係式を用いる．あるいは，

$$\mathcal{G}(p_\alpha\cdot p_\beta\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi'}{\xi'(1-i\varepsilon)-\xi}\mathrm{Im}\,\mathcal{G}(p_\alpha\cdot p_\beta\xi') \tag{2.5}$$

ただし，$p_\alpha\cdot p_\beta\xi$ は，すべての四元運動量同士のスカラー積を ξ 倍せよということである．この分散関係式は，すべての $\mathcal{G}$ に対して成り立つので，我々は分散関係式の完全系を持っていることになる．

なお，上の分散関係式が書けるためには，すべての $\mathcal{G}$ に対して $\xi=0$ の時に，

$$\mathrm{Re}\,\mathcal{G}(0)=\mathrm{const}, \qquad \mathrm{Im}\,\mathcal{G}(0)=0 \tag{2.6}$$

となることが必要である．これに対して，S行列要素に対する分散関係式の完全系は知られていない．分散関係式 (2.4) の証明は簡単である．くりこまれたグリーン関数は，摂動論のすべての次数で次の形に書ける．

$$\mathcal{G}(p_\alpha\cdot p_\beta)=\int\frac{\sigma(z_j)dz_1\cdots dz_k}{(\sum c_{\alpha\beta}(z_j)p_\alpha\cdot p_\beta+M^2(z_j)-i\varepsilon)^N} \tag{2.7}$$

ただし σ, c, M はすべて実数であり，z_j は適当な Feynman パラメターである．$M^2\geqq 0$ を用い，$N=1$ と置くと，一般性を失うことなしに，

$$\int_0^\infty\frac{d\xi'}{\xi'-\xi}\delta(c\xi'+M^2)=\theta(-c)\frac{1}{c\xi+M^2}, \tag{2.8 a}$$

$$\int_{-\infty}^0\frac{d\xi'}{\xi'-\xi}\delta(c\xi'+M^2)=-\theta(c)\frac{1}{c\xi+M^2} \tag{2.8 b}$$

故に両者の差をとって，次の分散関係式が得られる：

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{d\xi'}{\xi'-\xi}\varepsilon(\xi')\delta(c\xi'+M^2)=\frac{1}{c\xi+M^2} \tag{2.9}$$

しかしながら，この分散積分は発散することがある．これは場の理論の発散に対応している．その場合には引算をしなければならず，これがくりこみに対応している．またこの引算を通して摂動論における相互作用が導入される．§1において導入された分散公式も上のと似た方法で証明される．そこで次節において引算について述べよう．

§3 分散関係式における引算

分散関係式には引算のないもの，一回あるもの，二回あるものなどがあるので，その形を与える．

引算なし：
$$\mathrm{Re}\, f(x)=\frac{1}{\pi}\int\frac{dx'}{x'-x}\mathrm{Im}\, f(x'), \tag{3.1}$$

引算一回：
$$\mathrm{Re} f(x)=f(a)+\frac{x-a}{\pi}\int\frac{dx'}{(x'-a)(x'-x)}\mathrm{Im}\, f(x'), \tag{3.2}$$

引算二回：
$$\mathrm{Re} f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{\pi}\int\frac{dx'}{(x'-a)^2(x'-x)}\mathrm{Im}\, f(x') \tag{3.3}$$

ただし積分は Cauchy の主値の意味であり，a は $\mathrm{Im}\, f(a)=0$ となるように選ぶ．

引算が必要になる時には，通常の摂動論の結果が再現されるように導入しなければならないし，また引算定数はくりこまれた結合定数など，グリーン関数の規格を定めるものとなるように選ぶ．

以下では中性スカラー理論における二点関数から始める．

$\mathcal{G}^{(2)}(p)=\mathcal{G}(p,-p)$ と書くと，二点関数の積分表示より，

$$\mathcal{G}^{(2)}(p)=-(p^2+m^2)\left[1+(p^2+m^2)\int d\kappa^2\frac{\sigma(\kappa^2)}{p^2+\kappa^2-i\varepsilon}\right] \tag{3.4}$$

さて p^2 を $p^2\xi$ で置き換えた時に，ξ に関する分散関係式は明らかに引算を二回要する．ところで引算条件は，上の積分表示から直ちに得られる：

$$\mathcal{G}^{(2)}=0,\qquad \frac{\partial\mathcal{G}^{(2)}}{\partial p^2}=-1,\quad ただし\ p^2+m^2=0 \tag{3.5}$$

この二つの引算は，実は質量と Z 因子とのくりこみに相当する．

次に四点関数に移ろう．最低次では，(19.4.1) に対応して，

$$\mathcal{G}^{(4)}=g \tag{3.6}$$

この次数では $\mathrm{Im}\,\mathcal{G}^{(4)}=0$ であるから，$\mathcal{G}^{(4)}$ は明らかに引算を一回要する．

$$\mathrm{Re}\,\mathcal{G}^{(4)}(p_\alpha\cdot p_\beta\,\xi)=\mathcal{G}^{(4)}(0)+\frac{\xi}{\pi}\int\frac{d\xi'}{\xi'(\xi'-\xi)}\varepsilon(\xi')\,\mathrm{Im}\,\mathcal{G}^{(4)}(p_\alpha\cdot p_\beta\xi') \tag{3.7}$$

さて引算条件としては，引算点 s.p. (subtraction point) における $\mathcal{G}^{(4)}$ をくりこまれた結合定数 g に等しいとする．

$$\mathcal{G}^{(4)}(\mathrm{s.p.})=g \tag{3.8}$$

ただし，s.p. としては (19.4.6) と同様に，

$$p_\alpha\cdot p_\beta=\frac{m^2}{3}(4\,\delta_{\alpha\beta}-1) \tag{3.9}$$

を選ぶ．これはS行列理論における引算条件と同じである．

さて二点関数は，相互作用の詳細に無関係に引算が二回必要であることが分かったが，もしも他のグリーン関数に対して全然引算が無ければ，少なくとも摂動論においては自由場となってしまうことを示そう．そのために $\mathcal{G}^{(n)}$ の結合定数について一次の部分を $\mathcal{G}_1^{(n)}$ と記す．しからばユニタリー性条件より，

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{G}_1^{(n)}=0 \tag{3.10}$$

であることを示そう．ユニタリー性条件によれば，$\mathrm{Im}\,\mathcal{G}_1^{(n)}$ は $\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}^{\dagger}$ とについて二次以上であるから，少なくとも一つは $\mathcal{G}_0$ という自由場のグリーン関数となるはずである．そして自由場のグリーン関数で消えないのは二点関数のみ

である．ところが二点関数は次の形でしかユニタリー性条件に現れない．

$$\int d^4v\Delta^{(+)}(u-v)\bar{\rho}(v, x)=-\int d^4v\Delta^{(+)}(u-v)K_vK_x\Delta_F'(v-x) \tag{3.11}$$

ところがこの表式のフーリエ変換は，

$$\delta(p^2+m^2)(p^2+m^2)\left[1+(p^2+m^2)\int d\kappa^2\frac{\sigma(\kappa^2)}{p^2+\kappa^2-i\varepsilon}\right]=0 \tag{3.12}$$

従って二点関数はユニタリー性条件の非線形部分には決して現れないことが分かる．故に (3.10) が成り立ち，引算が無ければ

$$\mathrm{Re}\,\mathscr{G}_1^{(n)}=0 \qquad (n>2) \tag{3.13}$$

すなわち，これは自由場に帰着する．

Feynman-Dyson 理論では伝播関数は基本的役割を果たすが，分散理論では二点関数は計算の途中では全く現れず，他のグリーン関数は二点関数とは独立に決定される．しかし他のグリーン関数が決定されれば，ユニタリー性条件からスペクトル関数 $\sigma(\kappa^2)$ を通して二点関数が定まることになる．

§4　Heisenberg 演算子

Heisenberg 演算子 $A(x)$ を考え，これをいかにして定めるかについて考える．特に $A(x)$ が同じ時空点の演算子の積となる時が問題である．まずグリーン関数を考える．

$$\bar{\tau}_A(x\,;\,x_1, \cdots, x_n)=(-i)^{n+1}K_{x_1}\cdots K_{x_n}\langle\mathbf{0}|\,T[\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]\,|\mathbf{0}\rangle \tag{4.1}$$

しからば $A(x)$ の任意の行列要素は，$\bar{\tau}_A$ をフーリエ変換し，n 個の四元運動量を質量殻上に置けば，LSZ の簡約公式を用いることにより得られる．つまり

$$\langle\boldsymbol{\beta}, \mathrm{out}\,|\,\boldsymbol{A}(x)\,|\,\boldsymbol{\alpha}, \mathrm{in}\rangle \tag{4.2}$$

のような行列要素が，上の操作によって求められることになる．従って $\{\bar{\tau}_A\}$ というセットを知れば，場の演算子 $A(x)$ が決定されることになる．

$\bar{\tau}_A$ に対するユニタリー性条件は，$\bar{\tau}$ の時と同様にして求められる．

$$\begin{aligned}&\bar{\tau}_A(x\,;\,x_1, \cdots, x_n)+\bar{\tau}_A^*(x\,;\,x_1, \cdots, x_n)\\&+\sum_{\mathrm{comb}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{i^l}{l!}\int(du)(dv)\bar{\tau}_A(x\,;\,x_1', \cdots, x_k', u_1, \cdots, u_l)\Delta^{(+)}(u_1-v_1)\cdots\Delta^{(+)}(u_l-v_l)\\&\qquad\times\bar{\tau}^*(x_{k+1}', \cdots, x_n')+(\bar{\tau}_A\to\bar{\tau}, \bar{\tau}^*\to\bar{\tau}_A^*)=0\end{aligned} \tag{4.3}$$

このユニタリー性条件は，$\bar{\tau}_A$ と $\bar{\tau}_A^*$ とについて線形なので，線形ユニタリー性条件と呼ぶ．次に $\bar{\tau}_A$ の連結部分を $\bar{\rho}_A$ と記すと，(2.2) と同様に漸化式が得ら

れることになる.

$$\bar{\tau}_A(x\,;x_1,\cdots,x_n)=\bar{\rho}_A(x;x_1,\cdots,x_n)+\sum_{\substack{\text{comb}\\ k\neq n}}\bar{\rho}_A(x\,;x_1',\cdots,x_k')\bar{\tau}(x_{k+1}',\cdots,x_n') \tag{4.4}$$

そこで $\bar{\rho}_A$ のフーリエ変換を導入する.

$$\bar{\rho}_A(x\,;x_1,\cdots,x_n)=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int(dp)d^4q\delta(p_1+\cdots+p_n+q)e^{i(q\cdot x+p_1\cdot x_1+\cdots+p_n\cdot x_n)}\times\mathscr{A}(q\,;p_1,\cdots,p_n) \tag{4.5}$$

この関数系 $\{\mathscr{A}\}$ は $\{\mathscr{G}\}$ と同様にパラメター分散関係式を満たす.

$$\mathrm{Re}\,\mathscr{A}(p_\alpha\cdot p_\beta\xi)=\frac{\mathrm{P}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi'}{\xi'-\xi}\varepsilon(\xi')\mathrm{Im}\,\mathscr{A}(p_\alpha\cdot p_\beta\xi) \tag{4.6}$$

摂動論では，引算を導入しないと $\mathscr{A}$ はすべて0になってしまうことは明らかである．そこで適当に引算を導入する．この時に $\{\mathscr{G}\}$ が知られていれば，線形ユニタリー性条件とパラメター分散関係式とを組み合わせることにより $\{\mathscr{A}\}$ を逐次決定し得る．以上では演算子 $\boldsymbol{A}$ から出発して $\{\mathscr{A}\}$ というセットを決定することを考えたが，二つの条件から関数系を決めてもそれが必ずしも対応する演算子を持たないことがある．種々の Ward-高橋恒等式を考えると，このような関数系に出会うことになる.

§5　引算条件

$\{\mathscr{G}\}$ とか $\{\mathscr{A}\}$ を評価するのに，その吸収部分，すなわち虚数部分，はユニタリー性条件を用いるので発散は生じない．従って場の理論に特有な発散が出るとしたらそれは分散部分，すなわち実数部分，においてである．そこで n 点関数 $\mathscr{G}^{(n)}$ に対してあらかじめ定めた回数だけ引算をして，逐次高次を計算する．そしてどんな高次でもあらかじめ定めた回数の引算で分散積分が常に収束するならば，その理論はくりこみ可能である．それに反して高次になるほど引算の回数がどんどん増えてゆくならば，それはくりこみ不能な理論である．そこで以下では，くりこみ可能なための引算の回数を定めることを摂動論の範囲内で行ってみることにする.

仮定　$|\xi|$ の大きい値に対して，ほとんどすべての $\{p_j\}$ に対して

$$\mathscr{G}^{(n)}(p_\alpha\cdot p_\beta\xi)\sim\xi^{c(n)/2} \tag{5.1}$$

のような振舞いが成り立つ．ここに $c(n)$ は $\{p_j\}$ に依存しない指数である．

この仮定は，Feynman-Dyson 理論では，摂動論の範囲内で成立している．また上の式の意味は，任意の正数 ε に対して，

$$\lim_{\xi\to\infty}\frac{\mathcal{G}^{(n)}(p_\alpha\cdot p_\beta\xi)}{\xi^{c(n)/2+\varepsilon}}=0,\qquad \lim_{\xi\to\infty}\frac{\mathcal{G}^{(n)}(p_\alpha\cdot p_\beta\xi)}{\xi^{c(n)/2-\varepsilon}}=\infty \tag{5.2}$$

また (5.1) は形式的に次のように書くこともある：

$$\mathcal{G}^{(n)}(p_\alpha\cdot p_\beta)\sim p^{c(n)} \tag{5.3}$$

さてこの $c(n)$ を定めるのにユニタリー性条件を用いる．

$$\begin{aligned}&\bar{\rho}(x_1,\cdots,x_n)+\bar{\rho}^*(x_1,\cdots,x_n)\\&+\sum_{\text{comb}}{}'\sum_{l=1}^{\infty}\frac{i^l}{l!}\int(du)(dv)\bar{\rho}(x_1',\cdots,x_k',u_1,\cdots,u_l)\Delta^{(+)}(u_1-v_1)\cdots\Delta^{(+)}(u_l-v_l)\\&\qquad\times\bar{\rho}^*(x'_{k+1},\cdots x_k',v_1,\cdots,v_l)\\&\qquad+(\rho,\rho^*\ \text{について 3 次以上の項})=0\end{aligned} \tag{5.4}$$

まず $\mathrm{Im}\,\mathcal{G}^{(n)}$ の指数は，$\mathcal{G}^{(n)}$ そのものの次数を越えることはない．第一二項の指数は $\mathrm{Im}\,\mathcal{G}^{(n)}$ の指数で与えられ，他の項の指数は $\mathcal{G},\mathcal{G}^*$ のもので表わされる．従って，

$$c(n)+4(n-1)\geqq\mathrm{Max}[c(k+l)+c(n-k+l)+4(n+2l-2)-6l] \tag{5.5}$$

3 次以上の項から出る不等式は，上の不等式が成り立てば自動的に成り立つ．また $c(n)$ 以外の項は運動学的因子から生ずる．また二点関数は現れないから

$$k+l>2,\qquad n-k+l>2 \tag{5.6}$$

そこで $d(n)$ を導入する．

$$d(n)=c(n)+n-4 \tag{5.7}$$

しからば上の不等式は次の形に書ける：

$$d(n)\geqq\mathrm{Max}[d(k+l)+d(n-k+l)] \tag{5.8}$$

これから直ちに次の必要条件を得る：

$$d(n)\leqq0 \tag{5.9}$$

ここで $c(n)$ が負でない場合を調べてみると，φ^4 理論では最低次の結果より，

$$c(2)\geqq2,\qquad c(4)\geqq0, \tag{5.10}$$

$$d(2)\geqq0,\qquad d(4)\geqq0 \tag{5.11}$$

これを必要条件 (5.9) と組み合わせると，偶数の n に対して

$$d(n)=0, \quad \text{あるいは} \quad c(n)=4-n \tag{5.12}$$

これがくりこみ可能な理論に対応する．それに反して φ^6 理論のようにくりこみ不能な場合には，最低次から

$$c(2)\geqq 2, \quad c(6)\geqq 0, \quad \text{あるいは} \quad d(2)\geqq 0, \quad d(6)\geqq 2 \tag{5.13}$$

となってしまい，(5.9)と矛盾しない解が存在しなくなってしまうのである．

逆に φ^3 理論のように超くりこみ可能な場合には，

$$d(2)\geqq 0, \qquad d(3)\geqq -1 \tag{5.14}$$

となり，詳しく調べてみると $d(n)=0$ ではなくて，

$$d(n)=2-n. \tag{5.15}$$

以上ではスカラー理論を考えたが，その拡張は容易である．例えば，パイオンと核子との系では，τ 関数は次のように与えられる：

$$\begin{aligned}&(-i)^n K_{x_1}\cdots K_{x_n} D_{y_1}\cdots D_{y_l}\tilde{D}_{z_1}\cdots\tilde{D}_{z_l}\\ &\times\langle 0|T[\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)\boldsymbol{\psi}(y_1)\cdots\boldsymbol{\psi}(y_l)\overline{\boldsymbol{\psi}}(z_1)\cdots\overline{\boldsymbol{\psi}}(z_l)]|0\rangle\end{aligned} \tag{5.16}$$

ただし

$$D=\gamma\cdot\partial+M, \qquad \tilde{D}=\gamma^T\cdot\partial-M \tag{5.17}$$

また核子に対する縮約関数は，

$$\langle 0|\psi^{\text{in}}(x)\overline{\psi}^{\text{in}}(y)|0\rangle=-iS^{(+)}(x-y)=-i(\gamma\cdot\partial-M)\Delta^{(+)}(x-y), \tag{5.18}$$

$$\langle 0|\overline{\psi}^{\text{in}}(x)\psi^{\text{in}}(y)|0\rangle=-i\tilde{S}^{(+)}(x-y)=-i(\gamma^T\cdot\partial+M)\Delta^{(+)}(x-y) \tag{5.19}$$

そこで $m=2l$ と置いて $\mathcal{G}^{(n,m)}$ の指数を導入する．

$$\mathcal{G}^{(n,m)}\sim p^{c(n,m)} \tag{5.20}$$

そして φ と ψ，あるいは $\overline{\psi}$ のいわゆる正則次元 1 と 3/2 とを用いて

$$d(n,m)=c(n,m)+n+\frac{3}{2}m-4 \tag{5.21}$$

を定義すると，(5.8) に対応する不等式は，

$$d(n,m)\geqq \mathrm{Max}[d(k+l,k'+l')+d(n-k+l,m-k'+l')] \tag{5.22}$$

この不等式より次の結果を得る：

$$d(n,m)\leqq 0, \quad \text{あるいは} \quad c(n,m)\leqq 4-n-\frac{3}{2}m \tag{5.23}$$

そこでパイオン・核子系で知られているくりこみ可能な相互作用として次の二種類を導入する：

$$i\overline{\psi}\gamma_5\psi\cdot\varphi, \quad \varphi^4 \tag{5.24}$$

ただしアイソ・スピンは省略してある．そこで二点関数から出る

$$c(2,0)\geqq 2,\qquad c(0,2)\geqq 1 \tag{5.25}$$

の外に次の条件を得る：

$$c(1,2)\geqq 0,\qquad c(4,0)\geqq 0 \tag{5.26}$$

そして再び唯一の解は次式で与えられる：

$$d(n,m)=0 \tag{5.27}$$

このように通常のくりこみ可能理論では常に $d=0$ を得ることが分かる．くりこみ可能性の証明にはこの外に $\mathcal{G}^{(n)}$ の実数部分と虚数部分との指数が等しいことを証明しなければならないが，詳細にわたるので省略する．

以上では通常のグリーン関数のセット $\{\mathcal{G}\}$ を考えたが，次に $\{\mathcal{A}\}$ を考える．

$$\mathcal{A}^{(n,m)}(p_\alpha\cdot p_\beta\xi)\sim\xi^{a(n,m)/2} \tag{5.28}$$

(4.3) の線形ユニタリー性条件を用いると，(5.22) に対応して

$$b(n,m)\geqq \mathrm{Max}[b(k+l,k'+l')+d(n-k+l,m-k'+l')] \tag{5.29}$$

が得られる．ただし

$$b(n,m)=a(n,m)+n+\frac{3}{2}m-4 \tag{5.30}$$

従って $d=0$ で与えられるくりこみ可能な理論では，(5.29) の解は

$$b(n,m)=b \tag{5.31}$$

この b は，n と m との値に依存しない．b を $\{\mathcal{A}\}$ というセットの指標と呼ぶ．そして b は摂動論で決定される．

例えばスカラー理論において

$$A(x)=\frac{1}{2}[\boldsymbol{\varphi}(x)]^2 \tag{5.32}$$

を考えると，最低次では

$$\mathcal{A}^{(2)}=1 \tag{5.33}$$

すなわち，$a(2)=0$，$b=-2$ となる．一般に場の演算子の多項式に対して，

$$b=(A\text{ の次元})-4 \tag{5.34}$$

で与えられる．

分散理論は形式的には美しいが，実用上は Feynman-Dyson 理論の方が便利である．しかし発散もあいまいさも無いので，異常項の導出のようなデリケートな問題では一意的な解を与えるので便利である．そこでこの考え方の基礎

となる定理を φ^4 理論において与えよう.

定理 **φ^4 理論における四組の関数のセット $\{\mathscr{A}\}, \{\mathscr{B}\}, \{\mathscr{C}\}, \{\mathscr{D}\}$ はいずれも線形ユニタリー性条件を満たし，指標は 0 か −2 でスカラーの変換性を持つとする．しからばこの四組の関数のセットには一次従属関係がある．**

この定理を証明するために次の $\mathscr{S}^{(n)}$ を導入する:

$$\mathscr{S}^{(n)}=a\mathscr{A}^{(n)}+b\mathscr{B}^{(n)}+c\mathscr{C}^{(n)}+d\mathscr{D}^{(n)} \tag{5.35}$$

しからば一般に $\{\mathscr{S}\}$ の指標は 0 であり，線形ユニタリー性条件を満たす．そして次の 3 個の引算条件を与えれば，このセットは一意的に決定される:

$$\begin{aligned}&\mathscr{S}^{(2)}(0\,;p,-p), \qquad \frac{\partial}{\partial p^2}\mathscr{S}^{(2)}(0;p,-p) \quad (p^2+m^2=0 \text{ に対して})\\ &\mathscr{S}^{(4)}(0\,;p_1,\cdots,p_4) \quad \left(p_\alpha\cdot p_\beta=\frac{m^2}{3}(1-4\delta_{\alpha\beta}) \text{ に対して}\right)\end{aligned} \tag{5.36}$$

これらの引算定数は a, b, c, d について線形であるから，その比を適当に選べば，上の 3 個の定数を全部 0 にできる．ただし上の引算点における $\mathscr{A}, \cdots$ の値は既に知られているものとする．さてすべての引算定数が 0 であれば，線形ユニタリー性条件と分散公式から $\{\mathscr{S}\}$ のすべてのメンバーは 0 となる．すなわち，a, b, c, d の比を上述のように定めれば，

$$\mathscr{S}^{(n)}=a\mathscr{A}^{(n)}+b\mathscr{B}^{(n)}+c\mathscr{C}^{(n)}+d\mathscr{D}^{(n)}=0 \tag{5.37}$$

これで一次従属関係の存在が証明されたことになる．

§6 異常トレース恒等式

既に§1でエネルギー・運動量テンソルに対する Ward-高橋恒等式 (1.36) を与えた．これは $T_{\mu\nu}$ の定義式と考えることができる．そこで伝播関数の足切りをしたグリーン関数に対して書き直せば，

$$q_\mu\mathscr{T}^{(n)}_{\mu\nu}(q\,;p_1,\cdots,p_n)=\sum_{j=1}^{n}\frac{p_j{}^2+m^2}{(p_j+q)^2+m^2-i\varepsilon}(p_j+q)_\nu\mathscr{G}^{(n)}(p_1,\cdots,p_j+q,\cdots,p_n) \tag{6.1}$$

ただし $q+p_1+\cdots+p_n=0$ である．$\{\mathscr{T}_{\mu\nu}\}$ はこの式で定義されると考えて良い．すべての p_j が質量殻上にあれば，ほとんどすべての q の値に対して，すなわち右辺の分母が 0 にならない時に，右辺は 0 となり，

$$\langle \boldsymbol{\beta}, \mathrm{out}|\partial_\mu \boldsymbol{T}_{\mu\nu}(x)|\boldsymbol{\alpha}, \mathrm{in}\rangle = 0 \tag{6.2}$$

すなわち次の保存則を得る:

$$\partial_\mu \boldsymbol{T}_{\mu\nu} = 0 \tag{6.3}$$

更に (6.1) より $\{\mathcal{T}_{\mu\nu}\}$ の指標は0であることが分かるので,

$$a(n) = c(n) = 4 - n \tag{6.4}$$

$n=2$ の時の $\mathcal{T}^{(2)}_{\mu\nu}$ は (6.1) の解から定められる.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{(2)}_{\mu\nu}(q\,;p_1,p_2) &= \delta_{\mu\nu}(p_1\cdot p_2 - m^2) - (p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{2\mu}p_{1\nu}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(p_1{}^2+m^2)(p_2{}^2+m^2)\Big[\delta_{\mu\nu}\int d\kappa^2\sigma(\kappa^2)\Big(\frac{1}{p_1{}^2+\kappa^2-i\varepsilon}+\frac{1}{p_2{}^2+\kappa^2-i\varepsilon}\Big) \\ &\quad + k_\mu k_\nu\int d\kappa^2\frac{\sigma(\kappa^2)}{(p_1{}^2+\kappa^2-i\varepsilon)(p_2{}^2+\kappa^2-i\varepsilon)}\Big] \\ &\quad + S^{(1)}_{\mu\nu}F + S^{(2)}_{\mu\nu}G\end{aligned} \tag{6.5}$$

ただし $q=-(p_1+p_2)$, $k=p_1-p_2$ であり, $S^{(i)}_{\mu\nu}$ は $q_\mu S^{(i)}_{\mu\nu}=0$ を満たす.

$$\begin{aligned}S^{(1)}_{\mu\nu} &= q^2\delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu, \\ S^{(2)}_{\mu\nu} &= (q\cdot k)^2 q_\mu q_\nu - (q^2)^2 k_\mu k_\nu - q^2(q\cdot k)(q_\mu k_\nu + q_\nu k_\mu)\end{aligned} \tag{6.6}$$

故に ξ の大きい値に対して

$$F(\xi)\sim\xi^0, \qquad G(\xi)\sim\xi^{-2} \tag{6.7}$$

従って $\{\mathcal{T}_{\mu\nu}\}$ を一意的に決定するには, F に対する引算条件を与えなければならない. しかし $q=0$ では, この任意性は残らない.

$n=4$ の時には, $\mathcal{T}^{(4)}_{\mu\nu}\sim\xi^0$ となるので, $S_{\mu\nu}$ のようなテンソルが出たとしてもその係数は引算を要しない. さて $F\neq0$ とすると, この任意性は線形ユニタリー性条件を通して多点関数に伝わってゆく. そこでこの項の性質を調べるために $\boldsymbol{T}=m^2\boldsymbol{\varphi}^2$ という演算子について考える. 対応する関数のセット

$$\mathcal{T}^{(n)}(q\,;p_1,\cdots,p_n) \tag{6.8}$$

を考えると, その指標は -2 であるから, 唯一の引算条件は

$$\mathcal{T}^{(2)}(0\,;p,-p) = 2m^2, \qquad \text{ただし}\ p^2+m^2=0 \tag{6.9}$$

によって完全に決定されてしまう. しからば $\mathcal{T}^{(2)}$ から出発したセットと F から出発したセットとは比例していなければならない.

$$F^{(n)}(q\,;p_1,\cdots,p_n) = a\mathcal{T}^{(n)}(q\,;p_1,\cdots,p_n) \tag{6.10}$$

従って $\{\mathcal{T}_{\mu\nu}\}$ が Ward-高橋恒等式と線形ユニタリー性条件を満たす一つの解とすると, 次のような同資格の解が得られる:

$$\mathcal{T}^{(n)}_{\mu\nu}(q\,;p_1,\cdots,p_n)+a(q^2\delta_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu)\mathcal{T}^{(n)}(q\,;p_1,\cdots,p_n) \tag{6.11}$$

これは演算子として表わすと，次のような一般化になっている．

$$\boldsymbol{T}_{\mu\nu}(x)\to\boldsymbol{T}_{\mu\nu}(x)+\lambda(\delta_{\mu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\nu)\boldsymbol{\varphi}^2(x) \tag{6.12}$$

この任意性は，Callan, Coleman, Jackiw により改良されたエネルギー・運動量テンソルを導入するために利用されたことがある．

しかし $q=0$ では，この任意性は消えて，(1.37) が成立する．さて我々は既に，$\{\mathcal{T}_{\mu\nu}\}$ と $\{\mathcal{T}\}$ という二組のグリーン関数系を導入したが，第三の組を導入する．それは，

$$\mathcal{W}^{(n)}(q\,;p_1,\cdots,p_n)=\sum_j\frac{p_j{}^2+m^2}{(p_j+q)^2+m^2-i\varepsilon}\mathcal{G}^{(n)}(p_1,\cdots,p_j+q,\cdots,p_n) \tag{6.13}$$

このセットは次のグリーン関数のフーリエ変換である：

$$(-i)^nK_{x_1}\cdots K_{x_n}\sum_j\delta^4(x-x_j)\langle\boldsymbol{0}|T[\boldsymbol{\varphi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(x_n)]|\boldsymbol{0}\rangle \tag{6.14}$$

このセットが線形ユニタリー性条件を満たすことは容易に確かめられる．しかしながら $q\neq0$ の時には，すべての p_j が質量殻上にあるとすると $\mathcal{W}^{(n)}$ は0になってしまうので，いかなる演算子にも対応しない．このことは§4の終りに触れておいた．これは Ward-高橋恒等式との関連で出現する関数のセットである．

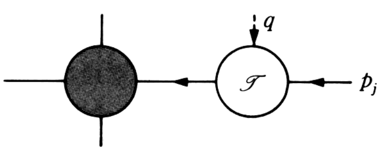
次に $q\to0$ でどんなことが生じるかについて調べることにする．(6.13) はその分母と分子とが打ち消し合うので大変特異性の強い関数である．この時に，

$$\mathcal{W}^{(n)}(0\,;p_1,\cdots,p_n)=n\mathcal{G}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n) \tag{6.15}$$

この関数は質量殻上でも消えないし，線形ユニタリー性条件も満たさない．またこの時には他のセットにも似たような困難が生ずる．そして，その原因は，

$$[(p_j+q)^2+m^2-i\varepsilon]^{-1} \tag{6.16}$$

という形の極の存在にある．$\{\mathcal{T}_{\mu\nu}\}$ や $\{\mathcal{T}\}$ の場合には，二点関数が他の部分と一つの伝播関数とつながっている図形にこの極が出現する．



$q=0$ の時に，$p_j^2+m^2=0$ となると，(6.16) は発散する．このために，場の理論では連結グリーン関数の代りに一粒子既約な関数を良く導入するのである．そこで，$q=0$ の時に質量殻上でも (6.16) の極が効かないようにするためには，$\mathcal{T}^{(n)}_{\mu\mu}, \mathcal{T}^{(n)}, \mathcal{W}^{(n)}$ の適当な一次結合 $\mathcal{S}^{(n)}$ をとって，$p^2+m^2=0$ の近傍で，

$$\mathcal{S}^{(2)}(0\,;p,-p)=\mathcal{O}((p^2+m^2)^2) \tag{6.17}$$

となるようにしてやれば良いことになる．そこで $\mathcal{S}^{(n)}$ を次の形にとる：

$$\mathcal{S}^{(n)}=\mathcal{T}^{(n)}_{\mu\mu}+\mathcal{T}^{(n)}-d_\varphi(g)\mathcal{W}^{(n)} \tag{6.18}$$

そして (6.17) の条件が満たされるように係数 $d_\varphi(g)$ を決めてみよう．また上の $\mathcal{S}^{(n)}$ は $q=0$ の時にだけ定義されているものとする．そこで $\mathcal{T}^{(2)}_{\mu\mu}, \mathcal{T}^{(2)}, \mathcal{W}^{(2)}$ を $q=0$ の時に，(p^2+m^2) の巾に展開する．$\mathcal{T}^{(2)}_{\mu\mu}$ としては (6.5) を用いると，

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{(2)}_{\mu\mu}(0\,;p,-p)&=\quad -2m^2-2(p^2+m^2)+\mathcal{O}((p^2+m^2)^2),\\ \mathcal{G}^{(2)}(p,-p)&=\qquad\qquad -(p^2+m^2)+\mathcal{O}((p^2+m^2)^2),\\ \mathcal{T}^{(2)}(0\,;p,-p)&=2m^2-2\gamma_\varphi(g)(p^2+m^2)+\mathcal{O}((p^2+m^2)^2)\end{aligned} \tag{6.19}$$

ただし $\gamma_\varphi(g)$ は摂動論で高次の項を計算して決定しなければならない．従って (6.17) を満たすためには，係数 $d_\varphi(g)$ を次のように選べば良い：

$$d_\varphi(g)=1+\gamma_\varphi(g) \tag{6.20}$$

$\gamma_\varphi(g)$ を φ の異常次元，1を φ の正則次元と呼ぶ．一般の n に対しては，

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)&=\mathcal{T}^{(n)}_{\mu\mu}(0\,;p_1,\cdots,p_n)\\ &\quad+\mathcal{T}^{(n)}(0\,;p_1,\cdots,p_n)-nd_\varphi(g)\mathcal{G}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)\end{aligned} \tag{6.21}$$

そしてこのセットは線形ユニタリー性条件を満たすことになる．更にその引算条件は，$n=2$ に対しては，

$$p^2+m^2=0 \text{ に対して } \mathcal{S}^{(2)}(p,-p)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial p^2}\mathcal{S}^{(2)}(p,-p)=0 \tag{6.22}$$

また $n=4$ に対しては，(3.9) の引算点を用いて，

$$\mathcal{T}^{(4)}_{\mu\mu}(0\,;\text{s.p.})+\mathcal{T}^{(4)}(0\,;\text{s.p.})-4\,d_\varphi(g)\mathcal{G}^{(4)}(\text{s.p.})\equiv\beta(g) \tag{6.23}$$

を計算したものを用いれば良い．これで引算条件が定まったことになる．

さて一次従属関係を求めるためにもう一組の関数のセットを導入する．

$$\left\{\frac{\partial}{\partial g}\mathcal{G}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)\right\} \tag{6.24}$$

$\mathcal{G}$ に対する非線形ユニタリー性条件を g で微分することにより，上のセットも線形ユニタリー性条件を満たすことが示される．更に引算条件は，

$p^2+m^2=0$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial g}\mathcal{G}^{(2)}(p,-p)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial p^2}\left(\frac{\partial}{\partial g}\mathcal{G}^{(2)}(p,-p)\right)=0, \tag{6.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial g}\mathcal{G}^{(4)}(\mathrm{s.p.})=1 \tag{6.26}$$

そこで $\{\mathcal{S}\}$ と $\{\partial\mathcal{G}/\partial g\}$ とを比較すると両者は比例していることが分かる.

$$\mathcal{S}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)=\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\mathcal{G}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n) \tag{6.27}$$

これは前節で述べた一次従属関係の例である. 四組のセットとその指標は,

$$\{\mathcal{T}_{\mu\mu}\},\quad \{\mathcal{T}\},\quad \{\mathcal{W}\},\quad \left\{\frac{\partial}{\partial g}\mathcal{G}\right\} \tag{6.28}$$

$$0 \qquad -2 \qquad 0 \qquad 0$$

そこで上に得られた関係式を伝播関数の足切りをしていないグリーン関数で表わしてみると,

$$T^{(n)}_{\mu\mu}(0\,;p_1,\cdots,p_n)+T^{(n)}(0\,;p_1,\cdots,p_n)-nd_\varphi(g)G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)$$
$$=\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n) \tag{6.29}$$

この式を異常トレース恒等式と呼ぶ. この式を正しくない (1.34) と比較してみれば, どのような異常項が生じたのか明らかであろう. 更に (1.40) と組み合わせると,

$$\left[m\frac{\partial}{\partial m}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+n\gamma_\varphi(g)\right]G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)=T^{(n)}(0\,;p_1,\cdots,p_n) \tag{6.30}$$

これは正に (19.5.12) で与えた Callan-Symamzik 方程式である. 従ってこの方程式は, くりこまれていない発散量を用いて導き出したが, 有限確定な量のみを用いて導き出せることが分かったことになる. またこの方法では異常項なども全くあいまいさ無しに出てくるので, デリケートな問題を議論する時に有効である.

§7　三角異常項

前節において異常トレース恒等式について調べたが, もう一つの典型的な異常項は三角異常項である. そこでこの異常項について調べてみよう.

まず次のような**くりこまれていない演算子**を導入する:

$$A_\lambda^{(0)}=i\overline{\psi}^{(0)}\gamma_\lambda\gamma_5\psi^{(0)},\qquad P^{(0)}=i\overline{\psi}^{(0)}\gamma_5\psi^{(0)},\qquad S^{(0)}=\overline{\psi}^{(0)}\psi^{(0)},\tag{7.1}$$

$$C_\lambda^{(0)}=\frac{i}{4}\varepsilon_{\lambda\alpha\beta\gamma}\phi_\alpha^{(0)}F_{\beta\gamma}^{(0)},\qquad B^{(0)}=\partial_\lambda C_\lambda^{(0)}=\boldsymbol{E}^{(0)}\cdot\boldsymbol{H}^{(0)}$$

ここに $A_\lambda^{(0)}$ は軸性ベクトル流を表わすので，電磁場のポテンシャルには $\phi_\lambda^{(0)}$ を用いた．三角異常項は，次の**くりこまれた形の方程式**に現れる：

$$\partial_\lambda(\boldsymbol{A}_\lambda-a\boldsymbol{C}_\lambda)=2m\boldsymbol{P},\tag{7.2}$$

$$a=-\frac{e^2}{2\pi^2}\tag{7.3}$$

ただし (7.3) は最低次の結果である．ところがこれらの演算子が適当に規格化されていると，この結果は厳密なものとなる．これが Adler-Bardeen の定理である．この定理の証明も与える．

まず (7.2) 式をグリーン関数を用いて表現すると，

$$\partial_\lambda(A_\lambda^{(n,m)}-aC_\lambda^{(n,m)})=2mP^{(n,m)}+W^{(n,m)}\tag{7.4}$$

ただしこれらのグリーン関数は次のように定義される：

$$A_\lambda^{(n,m)}(w\,;\,x\cdots y\cdots z\cdots)=\langle 0|T[\boldsymbol{A}_\lambda(w)\boldsymbol{\phi}(x)\cdots\boldsymbol{\psi}(y)\cdots\overline{\boldsymbol{\psi}}(z)\cdots]|0\rangle\tag{7.5}$$

ここに n は ϕ の数，m は ψ と $\overline{\psi}$ との数である．また，

$$W^{(n,m)}(w\,;\,x\cdots y\cdots z\cdots)=-\sum_j\delta^4(w-y_j)(\gamma_5)_jG^{(n,m)}(x\cdots y\cdots z\cdots)$$

$$-\sum_j\delta^4(w-z_j)G^{(n,m)}(x\cdots y\cdots z\cdots)(\gamma_5)_j,\tag{7.6}$$

$$G^{(n,m)}(x\cdots y\cdots z\cdots)=\langle 0|T[\boldsymbol{\phi}(x)\cdots\boldsymbol{\psi}(y)\cdots\overline{\boldsymbol{\psi}}(z)\cdots]|0\rangle\tag{7.7}$$

更に伝播関数の足切りをするために，$K, D, \tilde{D}$ などを乗じる．ただし $D, \tilde{D}$ は (5.17) で与えられ，K は次式で与えられる：

$$K_{\mu\nu}(\partial)=(\delta_{\mu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\nu)+\frac{1}{\alpha}\partial_\mu\partial_\nu\tag{7.8}$$

これによって (4.5) で定義されたようなグリーン関数が定義される．例えば，

$$(-i)^nK_x\cdots D_y\cdots\tilde{D}_z\cdots\langle 0|T[\boldsymbol{P}(w)\boldsymbol{\phi}(x)\cdots\boldsymbol{\psi}(y)\cdots\overline{\boldsymbol{\psi}}(z)\cdots]|0\rangle$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{4(n+m)}}\int(dk)(dp)(d\overline{p})\delta^4(q+k+\cdots+p+\cdots+\overline{p}+\cdots)$$

$$\times\exp[i(q\cdot w+k\cdot x+\cdots+p\cdot y+\cdots+\overline{p}\cdot z+\cdots)]\mathcal{P}^{(n,m)}(q\,;\,k\cdots p\cdots\overline{p}\cdots)\tag{7.9}$$

しからば (7.4) 式は次のように表わされる：

$$iq_\lambda(\mathcal{A}_\lambda^{(n,m)}-a\mathcal{C}_\lambda^{(n,m)})=2m\mathcal{P}^{(n,m)}+\mathcal{W}^{(n,m)}\tag{7.10}$$

1. くりこみ条件

これから種々のグリーン関数のくりこみ条件，すなわち規格化について調べることにする．

(1) セット $\{\mathcal{P}\}$

この場合には発散の次数は次式で与えられることが摂動論から分かる：

$$d(\mathcal{P})=3-n-\frac{3}{2}m \tag{7.11}$$

さて荷電共役に対する不変性から，$d(\mathcal{P})$ が負でないのは，(0, 2) と (2, 0) というチャンネルに限られることが分かる．そこで $\mathcal{P}^{(0,2)}$ を次のように展開してみよう：

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{(0,2)}(q\,;p,\bar{p})=&(i\gamma_5)\mathcal{P}_1^{(0,2)}\\&+(ip\cdot\gamma+m)(i\gamma_5)\mathcal{P}_2^{(0,2)}+(i\gamma_5)(-i\bar{p}\cdot\gamma+m)\tilde{\mathcal{P}}_2^{(0,2)}\\&+i(p\cdot\gamma+m)(i\gamma_5)(-i\bar{p}\cdot\gamma+m)\mathcal{P}_3^{(0,2)}\end{aligned} \tag{7.12}$$

さて $\mathcal{P}_1$ と $\mathcal{P}_3$ とは荷電共役 $p\rightleftarrows\bar{p}$ に対して不変であり，$\mathcal{P}_2$ と $\tilde{\mathcal{P}}_2$ とはお互いに移り変わる．そして $\mathcal{P}^{(0,2)}$ は全体として対数発散をするから，$\mathcal{P}_1$ のみがくりこみを要する．そこで引算点を次のように選ぶ：

$$\text{s.p.}:\quad q=0,\quad p^2+m^2=\bar{p}^2+m^2=0 \tag{7.13}$$

そして引算条件を次のように選ぶ：

$$\mathcal{P}_1^{(0,2)}(\text{s.p.})+2m\mathcal{P}_2^{(0,2)}(\text{s.p.})=1 \tag{7.14}$$

通常は，$\mathcal{P}_1^{(0,2)}(\text{s.p.})=1$ と選ぶが，これでは Adler-Bardeen の定理は成立しない．(7.14) のようにくりこむと，質量殻の近傍で

$$\mathcal{P}^{(0,2)}(0\,;p,-p)=i\gamma_5[1+\mathcal{O}(p^2+m^2)] \tag{7.15}$$

これは，Adler-Bardeen の与えたくりこみ条件と一致する．

次に (2, 0) というチャンネルでは一次発散が期待される．ところで

$$\mathcal{P}_{\rho\sigma}^{(2,0)}(q\,;k_1,k_2)=i\varepsilon_{\rho\sigma\alpha\beta}(k_1)_\alpha(k_2)_\beta\mathcal{P}_1^{(2,0)} \tag{7.16}$$

と展開してみる．ここに ρ と σ とは，2 個の中のベクトルの足である．こう書くと，$\mathcal{P}_1^{(2,0)}$ は p^{-1} のようになるので発散はなく，くりこみは必要ない．

従って $\mathcal{P}$ に対して引算の要るのは，$(0,2)_1$ というチャンネルのみとなり，この場合にこの引算条件がその規格化を決めるので，乗法的くりこみになる．

(2) セット $\{\mathcal{W}\}$

このセットは Ward-高橋恒等式に特有なものであり，q 以外のすべての p_j が質量殻上にあれば消えるという特徴がある．ただし電子場については Dirac スピノールを乗じるものとする．この時に，他のグリーン関数，例えば $\mathcal{P}$ だと，これは演算子 $\boldsymbol{P}$ の行列要素になるが，$\mathscr{W}$ の時には 0 となる．定義から

$$\mathscr{W}_1^{(0,2)}(\mathrm{s.p.})=0, \tag{7.17}$$

$$\mathscr{W}_2^{(0,2)}(\mathrm{s.p.})=\tilde{\mathscr{W}}_2^{(0,2)}(\mathrm{s.p.})=-1 \tag{7.18}$$

が直ちに出るが，これが引算条件を与える．(2, 0) というチャンネルでは

$$\mathscr{W}^{(2,0)}=0. \tag{7.19}$$

(3)　セット $\{\mathscr{A}_\lambda\}$

$\mathscr{A}_\lambda$ も $\mathcal{P}$ と同じ指標を持つ．まず (0, 2) というチャンネルでは

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_\lambda^{(0,2)}(q\,;p,\bar{p})=&(i\gamma_\lambda\gamma_5)\mathscr{A}_1^{(0,2)}\\&+(ip\cdot\gamma+m)(i\gamma_\lambda\gamma_5)\mathscr{A}_2^{(0,2)}+(i\gamma_\lambda\gamma_5)(-i\bar{p}\cdot\gamma+m)\tilde{\mathscr{A}}_2^{(0,2)}\\&+(ip\cdot\gamma+m)(i\gamma_\lambda\gamma_5)(-i\bar{p}\cdot\gamma+m)\mathscr{A}_3^{(0,2)}\\&+q_\lambda\gamma_5\mathscr{A}_4^{(0,2)}\\&+(ip\cdot\gamma+m)(q_\lambda\gamma_5)\mathscr{A}_5^{(0,2)}+(q_\lambda\gamma_5)(-i\bar{p}\cdot\gamma+m)\tilde{\mathscr{A}}_5^{(0,2)}\\&+(ip\cdot\gamma+m)(q_\lambda\gamma_5)(-i\bar{p}\cdot\gamma+m)\mathscr{A}_6^{(0,2)}\end{aligned} \tag{7.20}$$

そして引算の要るのは $\mathscr{A}_1^{(0,2)}$ のみである．そこで引算条件を次のように与える：

$$\mathscr{A}_1^{(0,2)}(\mathrm{s.p.})=\mathcal{P}_1^{(0,2)}(\mathrm{s.p.}). \tag{7.21}$$

次に (2, 0) チャンネルでの展開は，ボース対称性を考慮して

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{\lambda\rho\sigma}^{(2,0)}(q\,;k_1,k_2)=&\varepsilon_{\rho\sigma\alpha\beta}(k_1)_\alpha(k_2)_\beta[(k_1)_\lambda\mathscr{A}_1^{(2,0)}+(k_2)_\lambda\tilde{\mathscr{A}}_1^{(2,0)}]\\&+[\varepsilon_{\lambda\rho\alpha\beta}(k_1)_\sigma(k_1)_\alpha(k_2)_\beta+(k_1\cdot k_2)\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\alpha}(k_1)_\alpha]\mathscr{A}_2^{(2,0)}\\&-[\varepsilon_{\lambda\sigma\alpha\beta}(k_2)_\rho(k_1)_\alpha(k_2)_\beta+(k_1\cdot k_2)\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\alpha}(k_2)_\alpha]\tilde{\mathscr{A}}_2^{(2,0)}\\&+[\varepsilon_{\lambda\rho\alpha\beta}(k_2)_\sigma(k_1)_\alpha(k_2)_\beta+k_2{}^2\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\alpha}(k_1)_\alpha]\mathscr{A}_3^{(2,0)}\\&-[\varepsilon_{\lambda\sigma\alpha\beta}(k_1)_\rho(k_1)_\alpha(k_2)_\beta+k_1{}^2\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\alpha}(k_2)_\alpha]\tilde{\mathscr{A}}_3^{(2,0)}\\&+(k_1{}^2-k_2{}^2)\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\alpha}(k_1+k_2)_\alpha\mathscr{A}_4^{(2,0)}\\&+\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\alpha}(k_1-k_2)_\alpha\mathscr{A}_5^{(2,0)}\end{aligned} \tag{7.22}$$

ここに $\mathscr{A}_j$ と $\tilde{\mathscr{A}}_j$ は，$j=1,2,3$ に対して，$k_1\rightleftarrows k_2$ なる交換でお互いに移り変わる．

さて $\mathscr{A}^{(2,0)}$ は一次発散をするはずであるが，全体の係数を調べてみると，引

算の要るのは $\mathscr{A}_5$ のみである．ところがゲージ不変な $\boldsymbol{A}_\lambda$ に対しては，

$$(k_1)_\rho \mathscr{A}^{(2,0)}_{\lambda\rho\sigma} = (k_2)_\sigma \mathscr{A}^{(2,0)}_{\lambda\rho\sigma} = 0 \tag{7.23}$$

これから次の結果を得る：

$$\mathscr{A}^{(2,0)}_4 = \mathscr{A}^{(2,0)}_5 = 0. \tag{7.24}$$

従ってこのチャンネルでは引算は要らない．唯一の引算条件は $(0,2)_1$ に現れるので，やはり乗法的くりこみになる．

(4) セット $\{\mathscr{C}_\lambda\}$

$\boldsymbol{C}_\lambda$ は全く新しい演算子なので，くりこみ条件を決定するのに最低次の摂動論をガイドに選ぶ．指標は $\{\mathscr{A}_\lambda\}$ と同じなので，まず (0,2) チャンネルを考えると，最低次では 0 となるので，くりこみ条件を次の形に選ぶ：

$$\mathscr{C}^{(0,2)}_1(\mathrm{s.p.}) = 0 \tag{7.25}$$

次に (2,0) チャンネルでは，最低次の計算は，

$$\mathscr{C}^{(2,0)}_{\lambda\rho\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\alpha}(k_1 - k_2)_\alpha \tag{7.26}$$

そこで引算点を (7.13) に選んで，くりこみ条件を次の形に選ぶ：

$$\mathscr{C}^{(0,2)}_5(\mathrm{s.p.}) = \frac{1}{2} \tag{7.27}$$

$\boldsymbol{C}_\lambda$ はゲージ不変でないので上の成分は消えないのである．かくして $\boldsymbol{C}_\lambda$ には，くりこみ条件が (7.25) と (7.27) の二つ存在することになり，乗法的くりこみにはならない．その代り演算子間の一次変換によるくりこみが必要になる．(19.5.32) に与えたように，その形は次のようになる．

$$\boldsymbol{A}^{(0)}_\lambda = Z_A \boldsymbol{A}_\lambda, \qquad \boldsymbol{C}^{(0)}_\lambda = Z_C \boldsymbol{C}_\lambda + z\boldsymbol{A}_\lambda. \tag{7.28}$$

(5) セット $\{\mathscr{D}\}$

三角異常項に対する Ward-高橋恒等式 (7.10) では，$\mathscr{A}_\lambda$ は常に

$$\mathscr{D}^{(n,m)} = iq_\lambda \mathscr{A}^{(n,m)}_\lambda \tag{7.29}$$

という形で現れる．そしてその巾は

$$d(\mathscr{D}) = 4 - n - \frac{3}{2}m \tag{7.30}$$

従って (0,2) では一次発散であって，$(0,2)_1$ と $(0,2)_2$ とで引算を要するが，$\mathscr{A}_\lambda$ に対する引算条件 (7.21) より，

$$\mathscr{D}^{(0,2)}_1(\mathrm{s.p.}) = 2m\mathscr{P}^{(0,2)}_1(\mathrm{s.p.}), \tag{7.31}$$

$$\mathscr{D}_2^{(0,2)}(\text{s.p.})=\tilde{\mathscr{D}}_2^{(0,2)}(\text{s.p.})=-\mathscr{P}_1^{(0,2)}(\text{s.p.}) \tag{7.32}$$

同様にして

$$\mathscr{D}_1^{(2,0)}(\text{s.p.})=0. \tag{7.33}$$

(6) セット $\{\mathscr{B}\}$

この時にも $\mathscr{C}_\lambda$ は (7.10) に常に次の形で現れる：

$$\mathscr{B}^{(n,m)}=iq_\lambda\mathscr{C}_\lambda^{(n,m)} \tag{7.34}$$

そしてその引算条件は，(7.25) と (7.27) より次のように与えられる：

$$\mathscr{B}_1^{(0,2)}(\text{s.p.})=0, \qquad \mathscr{B}_2^{(0,2)}(\text{s.p})=\tilde{\mathscr{B}}_2^{(0,2)}(\text{s.p.})=0, \tag{7.35}$$

$$\mathscr{B}_1^{(2,0)}(\text{s.p.})=0. \tag{7.36}$$

(7) セット $\{\mathscr{S}\}$

スカラー $\boldsymbol{S}$ は Ward-高橋恒等式には現れないが，Callan-Symanzik 方程式に出てくるので，その引算条件を与えておく．まず(0,2)チャンネルでは

$$\mathscr{S}^{(0,2)}(q\,;\,p,\bar{p})=\mathscr{S}_1^{(0,2)}+(ip\cdot\gamma+m)\mathscr{S}_2^{(0,2)}+(-i\bar{p}\cdot\gamma+m)\tilde{\mathscr{S}}_2^{(0,2)}$$
$$+(ip\cdot\gamma+m)(-i\bar{p}\cdot\gamma+m)\mathscr{S}_3^{(0,2)} \tag{7.37}$$

従ってその引算条件は，(7.13) を引算点として，

$$\mathscr{S}_1^{(0,2)}(\text{s.p})=1. \tag{7.38}$$

また (2,0) チャンネルでは，

$$\mathscr{S}_{\rho\sigma}^{(2,0)}(q\,;\,k_1,k_2)=[(k_1\cdot k_2)\delta_{\rho\sigma}-(k_1)_\rho(k_2)_\sigma]\mathscr{S}_1^{(2,0)} \tag{7.39}$$

であり，$\mathscr{S}_1^{(2,0)}$ は引算を必要としない．

さて (7.10) に出てくる演算子は高々次元4であるから，その指標は高々0である．そして引算条件を要すると思われるチャンネルは，

$$(0,2)_1,\quad (0,2)_2,\quad (2,0)_1,\quad (4,0),\quad (1,2).$$

初めの3チャンネルは既に調べてある．また (4,0) ではゲージ不変性のために実際には引算を要しないことも分かる．そして(1,2)チャンネルでは

$$\mathscr{V}^{(n,m)}=[2m\mathscr{P}^{(n,m)}+\mathscr{W}^{(n,m)}]_{q=0} \tag{7.40}$$

というセットを導入した時に，ここでは述べないが Kroll-Ruderman の定理と呼ばれる関係式により，

$$\bar{u}(p)\mathscr{V}_\lambda^{(1,2)}(k,p,\bar{p})\,u(p)=0, \qquad \text{ただし } k=0,\ p^2+m^2=0 \tag{7.41}$$

を得る．ただし λ は電磁ポテンシャルの足である．このことから，$\mathscr{V}^{(n,m)}$ は $q=0$ で消えるような量に展開しうる．(7.10) の右辺は勿論 q_λ に比例してい

る．そこでその係数を調べると引算が要らないことが分かる．

従ってこの場合にも§5の最後に与えた定理を応用することができる．そこで次の一次結合を導入し，各引算点における値を調べる．

$$\mathcal{T}^{(n,m)}=\mathcal{D}^{(n,m)}-a\mathcal{B}^{(n,m)}-2m\mathcal{P}^{(n,m)}-\mathcal{W}^{(n,m)} \tag{7.42}$$

すると

$$\mathcal{T}_1^{(0,2)}(\text{s.p.})=2m\,\mathcal{P}_1^{(0,2)}(\text{s.p.})-0-2m\,\mathcal{P}_1^{(0,2)}(\text{s.p.})-0=0, \tag{7.43}$$

$$\mathcal{T}_2^{(0,2)}(\text{s.p.})=-\mathcal{P}_1^{(0,2)}(\text{s.p.})-0-2m\,\mathcal{P}_2^{(0,2)}(\text{s.p.})-(-1)=0, \tag{7.44}$$

$$\mathcal{T}_1^{(2,0)}(\text{s.p.})=0-a-2m\,\mathcal{P}_1^{(2,0)}(\text{s.p.})-0=0 \tag{7.45}$$

ただし（7.45）は係数 a の定義式である．

$$a=-2m\,\mathcal{P}_1^{(2,0)}(\text{s.p.}) \tag{7.46}$$

このようにしてすべての引算定数が0になるので，§5の定理により，

$$\mathcal{T}^{(n,m)}=0. \tag{7.47}$$

これが（7.10）の証明である．従って（7.2）も成り立つことになる．

2. C_λ に対する Ward-高橋恒等式

（7.28）より次式を得る：

$$\boldsymbol{C}_\lambda=-zZ_C^{-1}\boldsymbol{A}_\lambda+\frac{i}{4}Z_C^{-1}Z_3\,\varepsilon_{\lambda\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{\phi}_\alpha\boldsymbol{F}_{\beta\gamma} \tag{7.48}$$

さて QED における Ward-高橋恒等式（11.7.18）と上の式とを組み合わせ，

$$\partial_\mu K_{\mu\rho}(\partial_x)\langle\mathbf{0}|T[\boldsymbol{\phi}_\rho(x)\boldsymbol{\phi}_\sigma(y)\boldsymbol{C}_\lambda(z)]|\mathbf{0}\rangle$$
$$=\frac{1}{2}Z_C^{-1}Z_3\varepsilon_{\lambda\alpha\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\delta^4(x-z)\frac{\partial}{\partial y_\beta}G_{\sigma\gamma}^{(2,0)}(y-z) \tag{7.49}$$

ただし $G^{(2,0)}$ は電磁場のグリーン関数である．ところでくりこみ条件（7.27）を用いると

$$Z_C^{-1}Z_3=1,\quad \text{あるいは}\quad Z_C=Z_3 \tag{7.50}$$

そして（7.49）の右辺もこの式を使って簡単化される．

3. Callan-Symanzik 方程式による Adler-Bardeen の定理の証明

グリーン関数に対して質量挿入項を導入した（19.6.1）を考えたが，同じことを QED に対して行う．例えば，

$$A^{(n,m)}(w\,;\,x\cdots y\cdots z\cdots:K)$$
$$=\langle\mathbf{0}|T\left[\boldsymbol{A}(w)\boldsymbol{\phi}(x)\cdots\boldsymbol{\psi}(y)\cdots\overline{\boldsymbol{\psi}}(z)\cdots\exp\left(-iKm\int d^4u\boldsymbol{S}(u)\right)\right]|\mathbf{0}\rangle \tag{7.51}$$

しからば Callan-Symanzik 方程式は

$$[\tilde{\mathscr{D}}+\gamma^{(n,m)}+\gamma_A]A^{(n,m)}(\cdots:K)=0 \tag{7.52}$$

ここに γ_A は $\boldsymbol{A}$ の異常次元である．ただし

$$\tilde{\mathscr{D}}=m\frac{\partial}{\partial m}+\beta(e)\frac{\partial}{\partial e}-2\alpha\gamma_{\mathrm{ph}}(e)\frac{\partial}{\partial\alpha}-\{1+(1-\gamma_S(e))K\}\frac{\partial}{\partial K} \tag{7.53}$$

ここで $\boldsymbol{A}$ として，$\boldsymbol{S}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{A}_\lambda, \boldsymbol{W}$ などを用いるが，定義より

$$\gamma_W=0 \tag{7.54}$$

また $\boldsymbol{C}_\lambda$ に対しては，(19.5.34) より

$$[\tilde{\mathscr{D}}+\gamma^{(n,m)}+\gamma_C]C_\lambda^{(n,m)}(\cdots:K)+\gamma_M A_\lambda^{(n,m)}(\cdots:K)=0 \tag{7.55}$$

さて $W^{(n,m)}$ はもともと $(\boldsymbol{A}_0-a\boldsymbol{C}_0)$ と $\boldsymbol{\psi}, \overline{\boldsymbol{\psi}}$ との同時刻交換関係より生じたものであり，質量挿入項があると，$(\boldsymbol{A}_0-a\boldsymbol{C}_0)$ と $\boldsymbol{S}$ との交換子を生じ，これは $\boldsymbol{P}$ に比例するが，その比例係数を b とすると，(7.4) は次の形に一般化される：

$$\begin{aligned}&\partial_\lambda[A_\lambda^{(n,m)}(\cdots:K)-aC_\lambda^{(n,m)}(\cdots:K)]\\&=2m(1+bK)P^{(n,m)}(\cdots:K)+W^{(n,m)}(\cdots:K)\end{aligned} \tag{7.56}$$

同様に (7.49) の一般化は，

$$\begin{aligned}&\partial_\mu K_{\mu\rho}(\partial_x)C_{\lambda\rho\sigma}^{(2,0)}(x,y,z:K)\\&=\frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\alpha\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\delta^4(x-z)\frac{\partial}{\partial y_\beta}G_{\sigma\gamma}^{(2,0)}(y-z:K)\end{aligned} \tag{7.57}$$

そこで(7.56)に $(\tilde{\mathscr{D}}+\gamma^{(n,m)})$ を作用させると，再び $\{\partial_\lambda A_\lambda\}, \{\partial_\lambda C_\lambda\}, \{P\}$ の一次結合が得られ，$\{W\}$ は消えてしまう．しかしながら $\{W\}$ 無しでは，残りの三組は一次独立であるので，すべての係数が消えてしまうことになる．このことから次式を得る：

$$\left(\beta\frac{d}{de}-\gamma_C\right)a=0, \tag{7.58}$$

$$\gamma_A=a\gamma_M, \tag{7.59}$$

$$b=1-\gamma_P, \tag{7.60}$$

$$\left(\beta\frac{d}{de}+\gamma_S-\gamma_P\right)b=0 \tag{7.61}$$

特に最後の二式を組み合わせると，(19.5.40) が再現される．あるいは，

$$\beta\frac{d}{de}\gamma_P=(1-\gamma_P)(\gamma_S-\gamma_P) \tag{7.62}$$

また (7.57) を次の二方程式と組み合わせる：

$$(\tilde{\mathscr{D}}+2\gamma_{\rm ph})G^{(2,0)}_{\sigma\gamma}(y-z:K)=0, \tag{7.63}$$

$$(\tilde{\mathscr{D}}+2\gamma_{\rm ph}+\gamma_C)C^{(2,0)}_{\lambda\rho\sigma}(x,y,z:K)+\gamma_M A^{(2,0)}_{\lambda\rho\sigma}(x,y,z:K)=0 \tag{7.64}$$

そこで (7.64) に次の微分演算子を作用させる:

$$\partial_\mu K_{\mu\rho}(\partial)=\frac{1}{\alpha}\Box\partial_\rho \tag{7.65}$$

しからば

$$(\tilde{\mathscr{D}}+\gamma_C)\partial_\mu K_{\mu\rho}(\partial_x)C^{(2,0)}_{\lambda\rho\sigma}(x,y,z:K)=0 \tag{7.66}$$

(7.57) によると，この式は (7.63) と同等のはずであるから，

$$\gamma_C=2\gamma_{\rm ph} \tag{7.67}$$

しかるに (19.5.28) によると $\beta=e\gamma_{\rm ph}$ であるから，(7.58) は簡単化され，

$$\left(e\frac{d}{de}-2\right)a=0 \tag{7.68}$$

従って a の値は摂動論の最低次によって厳密に与えられる:

$$a=-\frac{e^2}{2\pi^2} \tag{7.69}$$

すなわち，高次補正はすべて消えてしまう．これが Adler-Bardeen の定理である．この証明は東島，大川および著者によるものである．

以上で見たように，分散理論には発散とか不定性などが陽に現れないので，異常項のようなデリケートな問題を扱うのに適している．

異常項については，最近藤川により径路積分法に基づく極めて強力な方法が提出された．この方法は，種々の変換に対してフェルミオンに関する径路積分の測度の変換を，適当な正則化の手続きにより確定するものであるが，ここでは立ち入らない．

あとがき

本書においては場の理論における古典的方法に焦点を当てて種々の問題を取り扱ってきた．しかしながら多くの積み残しがある．例えば，現在では余り用いられなくなった南部-Bethe-Salpeter の方程式，S 行列や形状因子に対する分散理論などである．この題目については，拙著，Fields and Particles（前掲）を参照されたい．また Feynman-Dyson 理論における高次補正に対するくりこみ理論や赤外発散の問題については，中西襄著「場の量子論」（前掲）を参照されたい．

索　引

著　　者

西島和彦（にしじま かずひこ）

1948年に東京大学理学部物理学科を卒業．大阪市立大学理工学部助手，講師，助教授，イリノイ大学物理学科教授，東京大学理学部教授，京都大学基礎物理学研究所教授，中央大学理工学部教授を歴任して，現在，日本学士院会員．
主な著書；Fundamental Particles (W.A. Benjamin), Fields and Particles (W.A. Benjamin), 相対論的量子力学(培風館), 力学系と自然法則(産業図書).

場の理論

1987年 8月 31日 第1刷発行
1997年 6月 5日 第8刷発行

発行所　株式会社 紀伊國屋書店
東京都新宿区新宿3-17-7
電話 03(3354)0131(代表)

出版部(編集)電話 03(3439)0172
ホールセール部(営業)電話 03(3439)0128
東京都世田谷区桜丘5-38-1
郵便番号 156

ISBN 4-314-00489-4 C3342
PRINTED IN JAPAN
定価は外装に表示してあります

印刷　研究社印刷
製本　三水舎

紀伊國屋数学叢書について

数学を学ぶにはいろいろの段階があるが，いずれの場合でも書物などによって自学自習することが最も重要であり，単に講義を聞くというような受動的な勉強だけでは，はなはだ不十分である．

みずから学ぶために現在いろいろな数学書が出版されている．しかし，数学の進歩は極めて基礎的な考え方に対してさえ常に影響を与えており，従ってどのような段階の勉強であっても，常に新しい考え方を理解することが必要である．このためには，数学の過去と将来とを結ぶ視点から書かれた書物が数多く出版されることが望ましい．即ち，新しい視点と古典的な視点とを見くらべ，基本的なことをも将来の発展を考慮した視点から説明するという立場で書かれた書物が要望されている．

本叢書はこのような要望に応えて企画されたものであって，各巻が大学理工学系の専門課程の学生または大学院学生がそれぞれの分野での話題，対象について入門の段階からある程度の深さまで勉学するための伴侶となることを目指している．このために我々は各巻の話題の選択について，十分配慮し，現代数学の発展にとって重要であり，また既刊書で必ずしも重点が置かれていないものを選び，各分野の第一線で活躍しておられる数学者に執筆をお願いしている．

学生諸君および数学同好の方々が，この叢書によって数学の種々の分野における基本的な考え方を理解し，また基礎的な知識を会得することを期待するとともに，更に現代数学の最先端へ向かおうとする場合の基礎ともなることを望みたい．